第六届全国流体力学学术会议论文集

自然、工业与流动

上海 2001

李家春 主编



气象出版社

责任编辑：林雨晨

封面设计：靳　新

ISBN 7-5029-3123-6/O·0079

定价：70.00元

第六届全国流体力学学术会议论文集

自然、工业与流动

上海 2001

李家春 主编

气象出版社

内容简介

本书是第六届流体力学学术会议论文集，收集了大会、分会报告共80余篇。这些论文回顾了20世纪流体力学的成就，展望21世纪的研究方向，反映了我国流体力学界在湍流与流动稳定性，空气动力学，水动力学，多相流，非牛顿流，渗流，环境流体力学，地球物理流体力学，生物流体力学，计算流体力学，实验流体力学等分支领域的最新研究成果。

本书可供流体力学、计算数学、声学、大气动力学、航空、航天、船舶、水利、海岸、海洋、化学、石油、能源、环境、生物医学工程等领域的研究与工程技术人员，大专院校的教师和研究生阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

自然、工业与流动/李家春主编. - 北京:气象出版社,2001.4

ISBN 7-5029-3123-6

Ⅰ.自…　Ⅱ.李…　Ⅲ.流体力学-学术会议-中国-文集　Ⅳ.O35-53

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第16128号

自然、工业与流动

李家春　主编

责任编辑:赵大刚　林雨晨　终审:周诗健

封面设计:新新　责任技编:王丽梅　责任校对:李幼合

*

气象出版社出版

(北京市海淀区中关村南大街46号　邮政编码:100081)

北京地大彩印厂印刷

新华书店北京发行所发行　全国各地新华书店经销

*

开本:787mm×1092mm　1/16　印张:28.25　字数:720千字

2001年4月第一版　2001年4月第一次印刷

印数:1~500　定价:70.00元

第六届全国流体力学学术会议论文集

自然、工业与流动

编辑委员会

主　编　李家春

副主编　贺德馨　叶取源

委　员（按汉语拼音顺序排次）

黄永念　李　潜　罗纪生　缪国平　张兆顺　朱自强

编辑小组

赵大刚　杨亚政　闻　玲　齐志红　汤亚南　詹世革

第六届全国流体力学学术会议

2001年4月23日~26日

（上海）

主办单位

中国力学学会

上海交通大学

协办单位

中国科学院力学研究所

北京大学湍流及复杂系统研究国家重点实验室

中国空气动力学研究与发展中心

交通部科学研究院河口海岸科学研究中心

第六届全国流体力学学术会议

科学委员会（按汉语拼音顺序排次）

崔尔杰　郭尚平　何友声　刘高联　吴有生

曾庆存　张涵信　周　恒　庄逢甘

学术委员会

主　任　李家春

副主任　贺德馨

委　员（按汉语拼音顺序排次）

何友声　黄永念　李　潜　鲁传敬　罗纪生　孟庆国

缪国平　魏庆鼎　叶取源　张兆顺　赵大刚　朱自强

组织委员会

主　任　叶取源

副主任　何友声　缪国平

秘书长　鲁传敬

委　员（按汉语拼音顺序排次）

陈康民　陈美发　戴世强　乐嘉钻　刘　桦　刘应中

刘宇陆　柳兆荣　陶明德　吴文权　周连第

序言

在新世纪的第一个春天，中国力学学会、上海交通大学等单位共同在上海召开第六届全国流体力学学术会议。这次会议将回顾 20 世纪流体力学的成就，展望 21 世纪的研究方向。一个世纪以前，虽然经典的理论流体动力学已经发展得相当完美，并由 H. Lamb 将牛顿以来该学科的成就总结在“Hydrodynamics”一书中。但人们对处理真实流体现象，除了经验方法外，仍束手无策。20 世纪上半叶流体力学主要成就是应用渐近理论，结合大量风洞试验，克服了研究黏性流动与可压缩流动中的困难，突破声障和热障，使人类进入空间时代。20 世纪下半叶，流体力学为人们认识绚丽多彩的物质世界的运动规律提供了范例。由于计算与实验的理论、方法和技术的进步，不仅在湍流、涡动力学、分离流动、非线性水波等传统领域取得进展，而且促进了许多交叉的学科领域诸如：生物流体力学，地球物理流体力学，等离子体与磁流体力学，物理化学流体力学的发展。当今的科学技术进步的速度，与以往相比已不可同日而语，所以我们只能预测 21 世纪初的发展趋势。IUTAM 副主席 Leen Van Wijngaarden 在“Future trends in fluid mechanics”一文中提到：人们仍将为研究湍流而艰苦努力；对流体力学基础研究的需求会更加迫切，并深入到物理的领域；多相流的研究活动会增加，其理论分析与工程应用会更紧密地结合；与生命与环境有关的领域会得到重视；计算流体力学将在各分支领域产生重大影响，并注重其物理阐释。总之，流体力学学科的前沿领域会有新的进展，并在航空，航天，船舶，水利，海岸，海洋，化学，石油，能源，环境，生物医学工程中有着广阔的应用前景，它仍将是一门富有生命力的学科。

近半个世纪以来，在老一代科学家的带领下，奠定了我国近代力学的基础。其中，学术交流的作用是无可置疑的。自 1963 年起，中国力学学会流体力学专业委员会组织的前五届全国流体力学学术会议分别在上海、无锡、长沙、北京等地召开。他们在流体力学界的共同努力下，取得了成功。历次会议的文集真实地记录了我国流体力学研究的发展历程：分支学科不断增加，研究队伍不断壮大，研究手段不断进步，研究成果不断创新。38 年后，我们又回到经历改革开放后发生巨变的上海市来共同研讨新世纪流体力学的发展，这是一件很有意义的事情。本次会议我们共收到了 80 余篇学术论文，其中 13 篇为大会邀请报告，涉及湍流与流动稳定性，空气动力学，水动力学，多相流，非牛顿流，渗流，环境流体力

学，地球物理流体力学，生物流体力学，计算流体力学，实验流体力学等众多领域。为了有利于深入地讨论和切磋学术问题，我们将组织复杂流动的模拟；海洋与船舶工程；工业与环境流动；计算与空气动力学研讨会。尤其是本论文集反映了年轻一代科学家的最新研究成果，向我们展示了未来世纪的希望。

我们要感谢上海交通大学的领导、组织委员会以及为本次会议辛勤工作的同志们，在筹备与召开本次会议的全过程中，没有他们的努力，会议的顺利召开几乎是不可能的。我们要感谢上海交通大学、中国科学院力学研究所、北京大学湍流与复杂系统研究国家重点实验室、中国空气动力学研究与发展中心和交通部科学研究院河口海岸科学研究中心给予本次会议的资助。要感谢国家科技部“九五”攀登“流体和空气动力学关键基础问题研究”项目组的全力支持。本次会议学术论文的许多成果都是在国家科技部、国家自然科学基金委员会的长期资助下取得的，值此机会，谨向他们对流体力学基础和应用研究长期不懈的支持展示感谢。中国力学学会办公室的赵大刚、闻玲等同志细致工作，保证了本文集的顺利出版。我们对中国科学院力学研究所 LNM 李战华等同志为本书封面提供水洞实验照片表示感谢。我们还要再一次感谢流体力学及相关领域学术界的前辈、同仁和朋友们一贯的友持和合作，从而促进了我国流体力学研究的进展。

最后，祝大会圆满成功！

李家春

2001.2

目 次

大会邀请报告

1 流动稳定性与湍流

2 实验流体力学

注*文章为分会场邀请报告

3　海洋船舶工程

4　水波动力学

5　多相流与渗流

带*文章为分会场邀请报告

6 环境流体力学

7 计算流体力学

8 空气动力学

带*文章为分会场邀请报告

流体力学的基础研究

周　恒　　　　张涵信
（天津大学力学系，天津 300072）　（中国空气动力研究与发展中心，四川绵阳 621000）
（计算流体力学国家重点实验室，北京 100083）

摘要　从 20 世纪流体力学的发展可以看出其特点是：主要从工程技术发展的需要提出问题，对象是复杂的真实介质或系统。在解决问题的过程中，又形成新的学科。而在众多的工程技术中，又以航空航天技术的发展需要对力学发展的推动作用为最大。预计在 21 世纪，这一趋势仍将继续一段时间。据此提出了若干亟需解决的流体力学基础问题。

关键词　流体力学，基础问题

1　从 20 世纪流体力学与工程技术的关系看其今后的发展

要想看出一门科学的发展方向及其今后的研究重点，应该先了解它的历史。

力学作为一门科学应该从牛顿时代算起，它和天文学一起是最早形成的两门自然科学。到 19 世纪末，力学已发展到很高的水平。当时它主要以比较理想的模型，如质点、质点系、刚体、理想弹性体、理想流体等为对象，建立起了相当完善的普适的理论体系。同时也开始了与工程技术问题的结合。

20 世纪力学发展的最大特点是：它的研究对象已不再限于理想模型，而更多地以自然界和工程技术中必然遇到的复杂介质或系统为对象，建立更多的力学模型，在解决问题的过程中形成了更多的力学分支，丰富了力学的体系，也使力学成为众多工程和技术科学的重要基础。在 20 世纪由于力学的参与而得以形成的工程或技术科学有航空航天技术的科学、船舶工程的科学、土木工程（包含水利工程）的科学、机械工程的科学、运输工程的科学、能源技术的科学、气象科学、海洋科学、兵器工程的科学、等等。它们无疑对人类文明起了极大的推动作用。

由于力学的发展才得以实现的工程技术中的标志性成就有：可载四百多人的喷气客机，将人类送入太空的航天技术，单台功率达 100 万千瓦量级的发电机组，单跨近 2000m 的桥梁，有抗震能力的超高层建筑，时速达 300km 的高速列车，巨型水利枢纽如三峡工程，大型海上采油平台，等等。

在各种工程技术中，航空航天技术和力学的关系最为密切。它的每一个重大进展都依赖于流体力学的新突破。如在 20 世纪，流体力学先后为航空技术的四次飞跃提供了科学基础。第一次解决了能不能飞的问题，第二次解决了飞行能不能超音速的问题，第三次解决了飞弹重返大气层或飞机做高超音速飞行时的热保护问题，第四次解决了高速飞行时气体电离导致的通信中断问题，同时也为隐身技术提供了新思路。

20 世纪后半叶，战机的发展经历了四代。第一代是附体流型飞机，第二代是带定常脱体涡的飞机，第三代是带非定常脱体涡的高机动性及高敏捷性飞机，第四代是能超音速巡航及隐身的飞机。航天技术也已从火箭发展到航天飞机。每一次技术的飞跃，都伴随着有流体力学的新进展。

在为工程和技术科学提供科学基础的过程中，流体力学形成了七个分支学科，即黏性流体力学，空气动力学，气动热力学，热化学流体力学，电磁流体力学，稀薄气体动力学，物理力学。20 世纪中叶，还突破了经典声学中的发声原理，提出了流体动力发声原理，为工程

技术中噪声问题的解决提供了理论基础。

流体力学还为非线性科学提供了范例，如孤立波，混沌等。

由此可见，力学在 19 世纪，主要以理想模型为对象，以力求建立包罗万象的理论体系为目标，取得了很大的成就。而 20 世纪的特点则是以具体的更复杂的介质或系统为对象，从中提炼出基础问题，而在解决问题的过程中，逐步建立起新的力学分支。从学科上讲，它仍是一门基础科学，但同时它更是众多工程科学和技术科学的基础。

虽然力学在 20 世纪得到了非常大的发展，但面向 21 世纪，仍有很多重要的基础问题急待解决。这既是科学发展本身的需要，也是工程技术进一步发展的需要。

现在人们最感兴趣的学科是所谓的新兴学科，这是很容易理解的。但是否力学这种已有很大发展的学科就不会或不需要有更大的发展了呢？显然不是如此。正是由于力学是一个历史较长的学科，已经渗透到很多工程和技术的科学中，所以如果它还有未解决的重大基础问题，自然将影响到很多工程技术的发展。反之，力学在基础研究上的任何重要进展，都将推动很多工程技术的发展。必须看到，解决一个老学科的基础问题更多地具有攻坚的性质，它与新学科的基础研究更多地具有发现新规律的性质是不同的。但由于老学科影响面广，即使不是突破性进展，只要有进展，就可能产生巨大的影响。

仅以流体力学的进展对能源工业的影响为例。现全世界电网装机容量约为 40 亿千瓦，每年发电约 28 万亿度，总值约1万亿美元，几乎全都通过叶轮机（气轮机，水轮机）来发电。20 世纪后 50 年，由于流体力学中的湍流理论（尽管进展是缓慢的）、计算流体力学及测试技术的发展，使得叶轮机的设计得以改进，其效率提高约三分之一，这相当于使得电费每年节省约 5000 亿美元，而这里还没有考虑力学对锅炉燃烧过程效率提高的贡献。由于同样的原因，全世界仅小汽车的燃料费就可以节省约 1800 亿美元，而污染却减少了百分之九十几（化学在其中也起了重要作用）。采油工业中，由于有渗流力学的指导，使得二次、三次采油技术得以在实际中被有效应用，否则将有大量的石油无法被开采。其巨大的经济效益也是显然的。

工程、技术和自然界中具体的流动问题千差万别，它们的力学问题至今仍有很多是我们所不了解的。例如海面上水和大气的作用，大浪对船舶的作用，飞机大攻角机动时的流动规律，等等，不胜枚举。面对这么多的具体问题，如果采取零敲碎打和就事论事的办法，尽管也能解决一些具体问题，但很难取得系统的成就。要从这些复杂问题中，提炼出几个基础问题来研究。特别是选择与力学发展关系最密切的技术领域，从中提炼出基础问题。力学发展到现在，不考虑应用的可能性而去做纯粹的学术研究，一般已很难取得价值很大的成果。另一方面，仅仅着眼于解决具体的问题，不同时深入研究其机理，也不能有效推动力学的发展。

2 建议优先考虑的流体力学基础研究课题

21 世纪中，至少在一段时间内，航空航天技术发展的需要，仍将是力学发展的最大推动力。根据这样的观点，我们认为以下几个问题是关键的基础问题。

(1) 湍流及转捩。这是流体力学中的一个重要而又古老的问题，一直是流体力学中心问题之一，也被认为是经典物理中留下的最大难题。它曾经吸引了不少最著名的力学和物理学家参与研究，但至今仍是流体力学中的有待进一步研究的最重要问题之一。20 世纪由于计算机和计算方法的发展，曾经有人认为力学问题几乎都可以用计算的方法解决。但实际上由于湍流问题没有解决，使得很多问题无法精确计算。固然，直到现在为止，人们都认为 N-S 方

程可以用以做湍流计算，但有些问题的计算工作量大得如果不用湍流模式就无法用现有的计算机来算。例如飞机、船舶及各种车辆的设计就是如此。由于有湍流问题而不能通过计算解决，所以还必须做费时的风洞或船池实验。不少其它重要的流动，如气轮机中的流动，也是如此，更不要说如气象这种尺度更大的问题了。

而且，湍流的复杂性超出了人们的想象。例如，由于压力梯度的变化，很多边界层中的湍流并不处于统计平衡状态，而现在的湍流理论或模式还都不能正确考虑这一因素。平均流为非定常流的流动也是这样。最近，已有人通过实验证实，湍流中如带有周期性的大尺度流动，对应的雷诺应力和变形率之间存在相位差。这一问题在涡轮机内流问题中显然也是必须考虑的新问题。

由于湍流的复杂性，寻找一种普适的湍流理论恐怕是不可能的。针对不同类型的流动寻找不同的解决方法，也许是比较可行的途径。但是，我们认为应强调的是，湍流研究的最主要目的，是使得人们可以预测湍流，或更具体地说，可以对湍流进行定量计算。

转捩问题和湍流问题是密切相关的。经过多年的努力，对不可压流，其机理在原则上已清楚了。目前仍不能完全靠理论预测转捩，主要是环境中扰动的特性无法预先知道。而这一点似乎也不可能完全解决，因而继续这方面的研究取得很大进展的可能性很小。今后的重点，似应放在可压缩流的转捩问题上。

(2) 计算力学是 20 世纪力学发展，甚至可以说是科学发展中的最重要的进展之一。它使很多科学和技术问题得以定量计算。但是它还远不能说已经完善。即使不考虑湍流模式理论不完善造成的困难，仍有不少问题由于计算方法不够好而无法精确计算。例如为了计算有激波的流场，已经发展了不少有效的能捕捉激波的方法。但它们有一个共同的缺点，就是能高精度地计算激波的方法，在无激波区的精度都不够高（顺便提一下，在谈起计算格式的精度和分辨率时，对流场的连续区和有间断处，要用不同的标准。在连续区的精度和分辨率很容易理解。但对激波捕捉格式，精度应指在通过激波时能保证通量守恒的精度，或满足 R-H 关系式的精度。而分辨率高低则应由激波的厚度来衡量，激波薄则分辨率高。)。这使得既有激波而流场又很复杂时的精确计算很难实现，特别是非定常问题。而高速运动物体如超音速飞机或火箭周围的流场，都是这类流场。

又如，由于高速流的实验非常难做，所以超音速湍流及转捩的基础研究恐怕不能依靠实验提供详细的数据。直接数值模拟将是可能提供流场详细资料的一种方法。但直接数值模拟将遇到流场中可能出现很多小激波的问题。这时有效捕捉激波和无激波区高精度高分辨率的要求就是目前还无法解决的矛盾。所以，发展既能高精度地捕捉激波，又能在流场的光滑区具有高精度和高分辨率的计算格式，是计算力学中的重要问题之一。

流固耦合问题的计算，也是一个困难问题，特别是如果固体有大变形时。

(3) 实验是任何自然科学的发展所必需的。它是发现新现象和验证理论所不可少的，也是在计算精度不能保证时必须依靠的手段。20 世纪流体力学的实验方法和手段有了很大的发展。既有地面的实验，如风洞实验，又有现场实验，如飞行实验。发展了力、热等的量测及遥测技术及流场显示技术等，对流体力学的发展起了重要的作用。

但上述各种方法，都是单点测量或整体测量，不能提供流场细节。而对基础研究来说，恰恰需要能提供流场细节的方法。因此，当前从基础研究的角度来说，最需要的是发展能对全流场，或至少是部分流场进行精细测量，给出复杂流场的流动细节的实验技术及方法。必须强调的是，实验决不是仅仅为了验证理论，或在无法计算时提供一些结果的辅助手段，它

还是发现新现象的主要手段。

(4) 旋涡和分离，是飞行器，乃至一切运动物体不可避免要遇到的问题。对飞机来说，美国的 F117 的隐身设计使得分离流在巡航时就不可避免。分离对飞行器的性能会产生重要影响。既可能是好的影响，也可能是坏的影响，关键是对其认识及控制。飞行器在大攻角时常由于背风面的非对称分离而产生非对称力矩使其失去控制。现代高机动性飞机在前机身一般都有边条或小翼等能控制分离和分离涡的装置。这是经过多年研究才逐步成熟的技术，但不同的飞机在控制这类分离的水平上有很大的差距。这反映人们对旋涡和分离的认识还很不充分。特别是对非定常流，目前甚至于连一个公认的分离判据还没有。即使知道分离位置，非定常分离的性质也显然比定常分离更为复杂。而设计高敏捷性的飞机就要处理非定常分离的问题。

旋涡看起来是一个古老的问题，但实际上对其认识仍不充分。例如，大飞机形成的翼梢涡，对位于其后下方的飞机会产生严重的干扰，因此人们曾尝试将其破碎，但经人为破碎的涡有可能重组，而其机理至今仍不甚清楚。在这里，也许可以探讨一下一些人试图通过对涡的局部控制来控制流场的想法。流场中涡的产生是流场演化的结果。涡与流场的关系通过毕奥-萨瓦尔公式联系。如果对某一涡做局部的控制，则人们往往只注意主观上想要增减的那部分涡量，而忽略了同时会产生的相反的涡量（例如，如果设想在一静止的理想流体流场中放入一个刚性涡，则在靠近涡的一薄层内，会立即形成一个具有相反涡量的涡层）。因而大多数试图通过控制涡来控制流场的人往往不自觉地仅用毕奥-萨瓦尔公式去计算主观上希望增减的那部分涡量所诱导的流场，以预测其控制的结果，而忽略了同时产生的相反的涡量的影响。这显然是不对的，因而导致往往不能得到预期的结果。上述对涡的人工破碎实际也是对涡的局部控制。可以将涡被破碎后的涡量分布设想成原来的涡量分布加上一些新的涡量，而后者的总和为零。前者与原来的流场是匹配的，而后者则很快地通过涡量的扩散而失去影响。其结果看起来似乎涡又重组了。

对旋涡和分离机理的研究将对飞行器的设计提供十分有用的知识。

(5) 非定常流中还有不少问题还没有为我们所认识。鸟类和昆虫的飞行以及鱼类的游动，绝大多数都伴随着非定常流。而它们由此所具有的卓越飞行或游动性能，是人类至今还无法作到的。而且我们也不了解其规律及原因。现代飞机和导弹也经常在非定常情况下飞行，特别是在高敏捷性的要求下。。

随着微机电技术及智能材料的发展，有可能实现智能飞行。采用分布于飞行器表面的微机电元件和某些由智能材料制造的器件，与控制系统结合在一起，将有可能使飞行器外形在一定范围内随飞行条件不断变化，以获得最优气动外形。这时，即使在巡航条件下，流场就将是非定常的。因此，确定非定常流场的气动参数，特别是实时确定非定常流场的气动参数变得重要起来。这也将是一个难题。

我国在航空航天以及很多工程技术领域中和先进国家相比还有不小的差距。而 21 世纪，航空航天技术仍将是为国防和国民经济必须加快发展的领域。无论是航空还是航天，都在酝酿技术上的新突破。中国作为一个推行独立自主政策的大国，绝不允许在这方面无所作为。其它工程技术领域也都将不断有新的发展。目前我国尽管在航空航天及其它工程技术上已取得很大成就，但与国际先进水平比，还有相当大的差距。这固然与我国整体的技术发展水平有关，但很重要的一点是我国的基础研究没有能为技术的发展提供必要的知识储备，力学就是其中之一。由于我们流体力学基础研究的不足，我们还不掌握复杂流场细节的量测和计算

能力；不掌握控制和利用分离、旋涡的规律性知识；不掌握湍流和转捩的一些重要的规律；不掌握和增升减阻有关的规律性知识；而这些不足在很大程度上也影响了其它技术科学的发展。例如在航空航天技术上就因此缺乏原始的创新能力，遇到技术难题时也不易顺利解决。船舶技术也是如此。有时尽管我们拿到了某项先进产品的样机甚至技术资料，也无法将其很好地消化吸收，更不要说提出完全创新的技术发展思想。

当然，即使在上述几个基础研究问题上取得了进展，并不等于就能马上解决航空航天或其它工程技术中的具体问题。但如不能在这些基础问题研究上取得突破，则对一些重要的具体问题，我们甚至于会有无从下手的感觉。

3 流体力学与非线性及复杂系统科学的关系

力学作为基础科学的重要组成部分，通过其研究，不仅可以推动很多工程和技术科学的发展，还可能对非线性科学或复杂系统的科学提供有用的范例，就如在流体运动中发现的孤立波和混沌对非线性科学的形成所已起的作用那样。其实，非线性科学和复杂系统的科学虽然已引起广泛关注，但都还处在发展的很初级阶段。无论从已知的现象还是从已初步掌握的规律来看，离建立系统的理论还差得很远。从 20 世纪力学以及其它科学的发展经验来看，建立一个新的学科，不能从概念和推理出发，而必须以足够的事实为依据。因此，以已知的非线性问题或复杂系统为对象去进行研究固然能促进其发展，但更重要的是从各学科中发现更多的典型范例并加以研究。只有这样才有可能从中归纳出更多的共同规律，形成真正的科学体系。运动的流体本身就是高度非线性和复杂的系统，其基本规律自然会成为非线性科学及复杂系统科学的重要组成部分。而由于力学研究的是宏观现象，更便于直观观察，更有助于形成概念。因此其新的研究成果，一定会象孤立波和混沌所起的作用一样，继续起着推动非线性科学及复杂系统科学发展的先锋作用。

致谢 本文中提出的观点，实际是在和众多同行的交流和讨论中形成的。特别是在国家自然科学基金委员会所支持的重大及重点项目以及国家科技部支持的国家基础研究预研项目的实施过程中，更提供了实践和讨论的机会。其中庄逢甘院士的观点特别具有启发性。对所有这些同行，以及国家自然科学基金委员会及国家科技部，我们表示由衷的感谢。

浅水流动与污染物扩散的高分辨率计算模型

王嘉松　　　　　　　　何友声
（上海交通大学动力与能源工程学院，上海 200030）　（上海交通大学工程力学系，上海 200030）

摘要 将组合型 TVD 格式应用于守恒型的浅水方程和污染物扩散方程，建立了二者耦合求解的高分辨率有限体积计算模型。给出了溃坝水流、明渠突扩流和污染物输运计算的典型算例，并与实验数据或其它数值结果进行了比较，证实了该模型的有效性，表明它不但能处理有激波的非恒定流问题，也能较好地计算具有任意边界的一般的浅水流动和污染物扩散问题，为浅水流动和水环境模拟提供了精度高、稳定性好、普适性强的数值方法。
关键词　浅水流动，污染物扩散，TVD，有限体积，数值模拟

引　言

浅水流动在水利工程界是非常广泛的水流现象，污染物扩散与人们日益关注的环境问题密切相关，它们在水利和环境工程界一直受到高度重视。描述其运动特性的二维模型已比较成熟，三维模型也有了很大发展。但鉴于目前的计算机速度和工程适用的程度，二维模型将在实际工程中继续发挥重要作用。尽管如此，无论是浅水流动一般问题还是污染物扩散问题，都有进一步发展的必要，如强潮河段与海口的潮流与污染物运移特性需要更优秀的格式来模拟、天然水域任意复杂的边界需要计算模型具有对任意边界的适应性、大面积的排污水体需由统一模式来描述，而无需细分为近区与远区分别加以处理而导致两区衔接的困难。这就需要引入更优秀的数值方法和发展适应性更广的计算模型。TVD 格式以其精度高、激波捕捉能力强、稳定性好的特点而在空气动力学得到广泛应用，有限体积离散方法兼有有限元和有限差分的优点因而得到迅速发展，因此，本文首次采用任意四边形单元基础上的有限体积离散方法结合应用高分辨率 TVD 格式来研究浅水动力学和环境水力学问题。我们知道，水流特征影响污染物浓度分布和扩散，但反过来如果不考虑密度变化，污染物对水流特性没有影响，因此耦合或非耦合求解浅水方程和浓度方程均是可行的手段。考虑到 TVD 格式应用的特点，需对方程组作特征解耦，为了方便本文将二者耦合求解。

1　数学模型

描述浅水流动与污染物扩散运移现象的控制方程为浅水方程和污染物浓度扩散方程，本文将两组方程耦合求解，组成新的方程组，并改写成守恒形式，为

$$\boldsymbol{Q}_t + [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q})]_x + [\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q})]_y = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{Q}) \tag{1}$$

其中

$$\boldsymbol{Q} = (h, q_x, q_y, C)^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q}) = (q_x, q_x^2/h + 0.5gh^2, q_xq_y/h, q_xC/h)^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q}) = (q_y, q_xq_y/h, q_y^2/h + 0.5gh^2, q_yC/h)^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{Q}) = (S_1, S_2, S_3, S_4)^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

$$S_1 = 0 \tag{6}$$

$$S_2 = -\frac{\tau_{bx}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\nu_e\frac{\partial q_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\nu_e\left(\frac{\partial q_x}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x}\right)\right] \tag{7}$$

$$S_3 = -\frac{\tau_{by}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\nu_e \frac{\partial q_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\nu_e\left(\frac{\partial q_x}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x}\right)\right] \tag{8}$$

$$S_4 = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial C}{\partial y}\right) + S_C \tag{9}$$

式中$\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q})$, $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q})$, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{Q})$分别是守恒物理向量、$x$-和$y$-方向的通量向量及源项；$h$为流动水深(m)；$g$为重力加速度；$q_x$，$q_y$，$\tau_{bx}$，$\tau_{by}$，$K_x$，$K_y$分别为$x$-和$y$-方向的单宽流量（$m^2/s$），底部剪切应力及浓度扩散系数；$C$为污染物深度平均浓度（mg/l）；$\nu_e = \nu + \nu_t$为有效应力系数，$\nu_t$为紊流黏性应力系数；$S_C$为考虑物理、化学、生物和污染源汇等因子影响的综合项，对于化学耗氧量COD，实际上表示单位时间内单位面积上污染物的负荷量。

假设由于河床产生的剪切应力起支配作用，那么紊流黏性系数可表示为[1]

$$\nu_t = \frac{\kappa}{6} u_* h \tag{10}$$

式中κ为von Karman常数（=0.41）；u_*为剪切速度由下式给出

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}} \tag{11}$$

τ_b为底部剪切应力

$$\tau_b = \sqrt{\tau_{bx}^2 + \tau_{by}^2} \tag{12}$$

且

$$\tau_{bx} = \rho g h S_{fx},\ \tau_{by} = \rho g h S_{fy} \tag{13}$$

摩阻定义为

$$S_{fx} = \frac{n^2 q_x \sqrt{q_x^2 + q_y^2}}{h^{10/3}},\quad S_{fy} = \frac{n^2 q_y \sqrt{q_x^2 + q_y^2}}{h^{10/3}} \tag{14}$$

式中n为曼宁粗糙系数。

对于扩散系数，参照国内外通用的做法，根据Eider经验公式[1]，有

$$K_x = 5.93\sqrt{g}n|q_x|/h^{1/6} \tag{15}$$

$$K_y = 5.93\sqrt{g}n|q_y|/h^{1/6} \tag{16}$$

2 数值方法

针对任意四边形单元i(内部区域Ω，边界$\partial\Omega$)，对方程组（1）进行积分，得到积分形式的方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_\Omega U\mathrm{d}A + \int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})\cdot n\mathrm{d}l = \iint_\Omega S\mathrm{d}A \tag{17}$$

式中A为区域Ω的面积，dl为边界$\partial\Omega$的弧长，n为边界$\partial\Omega$的外法向单位向量。边界$\partial\Omega$由四条线段组成，上式左端第2项可以写成

$$\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})\cdot n\mathrm{d}l = \sum_{k=1}^{4} f_n^k(U)l^k \tag{18}$$

其中单元 k 为各边的编号，l^k 为边长，f_n^k 为第 k 边外法向通量。

设向量 U 在单元内部保持不变，进一步离散(17)式，得到有限体积基本方程

$$\frac{\mathrm{d}U_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{A_i}\sum_{k=1}^{4}f_n^k l^k+S(U_i) \tag{19}$$

对上式 f_n^k 采用组合型 TVD 格式插值。不过，由于 TVD 格式是差分格式，待解变量布置在节点上，为了应用于有限体积算法，我们提出了卫星单元及其拓扑关系，将待解变量布置在单元形心，对单元各边法向通量进行 TVD 插值[2]。源项采用中心差分基础上的有限体积离散形式，时间的导数项采用二步 Runge-Kutta 法离散，得到时空皆为二阶精度的数值模型。由于 TVD 格式是针对求解双曲型方程（无源项或源项很小）所作的定义，本文模型包含的源项可能很大，正负交错。因此对源项中含待解变量的负系数显式项进行隐式化，移到离散方程左端，以利于计算的稳定。详见文[2~4]。

3 算例

3.1 溃坝波的圆柱绕流

我们曾将组合型 TVD 格式用于计算一维溃坝波，表明与理论解相当吻合，并确定了最优限量函数；用于二维计算，与实验结果比较吻合较好，证实了数学与数值模型的有效性。Yang & Hsu[5]曾模拟了非恒定激波绕圆柱的绕射问题。在此考虑以相同的几何条件计算溃坝波的圆柱绕流问题。圆柱半径为 0.5m，坝距圆柱 1.2m，设上下游初始水位分别是 10m 和 2m。计算域延伸到半径 3m，划分 361×101 个辐射式网格单元。在本算例中，模型中不含浓度扩散方程，且不计底摩擦和紊流黏性，于是模型中不含源项。计算坝溃决 0.2s 后水位等值线如图 1，可以看到波遇圆柱发生反射的弧形激波和绕过圆柱两波相互作用等复杂涌波结构。

3.2 明渠突扩流动

如采渠道断面的几何形态发生突变，水流将与边界分离，形成回流区，这是非常典型的流动现象。这种水流形态到处可见，在土木水利工程中具有重要的实际意义，例如防波堤、港口、海湾附近的水流，水工建筑物消能工水流，闸门和障碍物周围的水流均含回流区。泄入江河湖海的水流和分层流也会形成回流区。

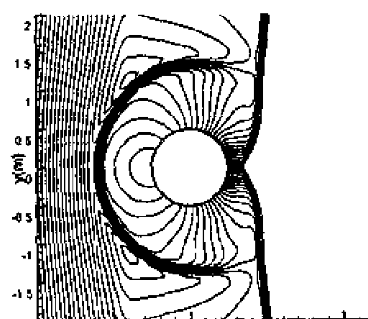


图 1　圆柱绕流溃坝波水位等值线

明渠突扩流动常作为断面突变水流的典型代表算例，用以测试各种紊流模型。一般实验测得的回流区长度是台阶宽度的 7 倍，而用标准 k-ε 模型的计算值低于实验值约 20%（台阶宽度的约 5.6 倍）[6]。给定明渠突扩流动的几何和网格条件：台阶宽 H=0.5m，长 8.0H，渠道入口宽 3.0 H，渠道总长 28.0H，划分 4000 个单元。计算得到稳定后的速度场示于图 2，其回流区长度约为 5.6~6.0H，与标准紊流模型相当，可见本文的模型具有相当的精度，且由于无需求解 k 方程、ε 方程和无需利用壁面函数确定固壁边界，计算量比 k-ε 双方程模型小许多。

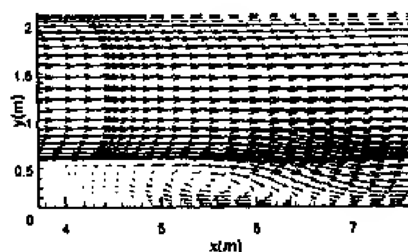


图 2　突扩渠道的速度场

3.3 污染物的扩散运移

在通常的排污工程中，污水多以射流形式排入纳污水体如海洋、江河之中。根据污水排放位置的不同，排污形式有岸边排放和底部排放。当污水以岸边排放方式排入纳污水体时，排放口将卷吸其上下游的环境水体，并在排污口附近形成一掺混中心。环境水体流动将被排污口射流推移开，而排污口射流本身也会被环境水体的流动所弯曲。由于排污口射流对下游环境水体的卷吸受到岸边固壁边界的限制，因此在排污口下游的近岸区将形成回流区。回流区的大小与变化规律受相对排放速度比、岸边界形状、环境流体流动特性等诸多因素的影响，难于采用通常的理论分析求解方法而获得，通常进行数值模拟。

给定边界条件为：(1) 进口边界：$q_x = hU_0$，$q_y = 0$，$C = 0$(主渠道人口)；$q_x = 0$，$q_y = V_0$，$C - C_0$(排放口)；(2) 出口边界：$\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + V_n\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$($\varphi = q_x, q_y, h, C$，$n$ 为出口边界外法向方向；V_n 为流速在出口边界外法向方向的分量)；(3) 固壁边界：与边界重合的边，其法向和切向通量为 0。

给定几何条件为：渠道入口宽度 B=1.82m，水深 h=0.06m，排污口宽 b=0.225m，入流速度 U_0=0.1m/s，排污速度 V_0=4.0U_0，设排放口排放污染物浓度为 C_0=1.0mg/l。取排污口上游渠道长 1.08m，下游渠道长 2.52m。渠道视为光滑且为平底。在排污口附近加密网格，共划分 90×40 个单元。计算得到如图 3 所示恒定(44.87s)时的污染物排放速度场和浓度场。

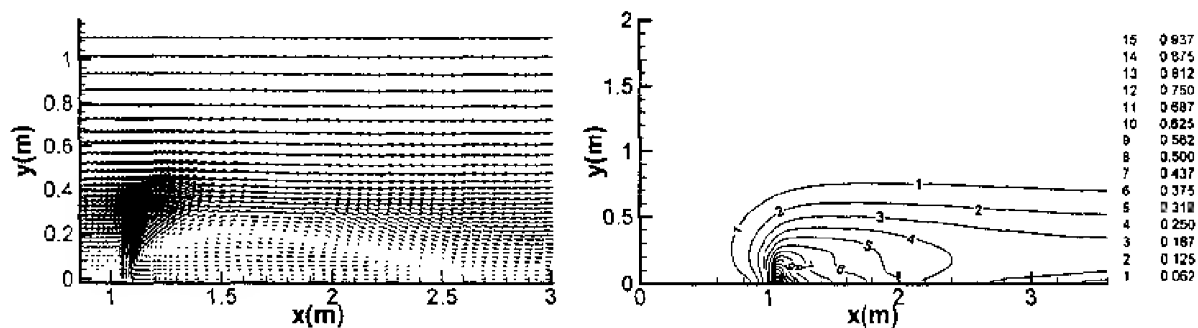


图 3 岸边排放速度场（排放口附近局部放大）和浓度场

反映回流区特征的参数是排污口后面的大旋涡长度 L 和高度 H。实验发现，回流区旋涡的大小和形状与一个简单的关系式 $M = R^2 b / B$(其中 $R = V_0 / U_0$)有关。此处 $M \approx 0.2$。文献[7]给出了实验结果，文献[8]给出了利用深度平均 k-ε 紊流模型和 Power-law 格式及 Roe 的近似黎曼解法加 SIMPLEC 算法得到的结果，现将这些结果和本文的结果列于表 1 中。

表 1 回流区旋涡参数的比较

参 数	实 验[7]	二维模型			三维模型[9]	
		本文	Roe[8]	Power-law[8]	QUICK	Hybrid
L/B	1~1.7	0.9	1.04	0.71	1.088	0.56
H/B	≈ 0.2	0.142	0.185	0.132	0.23	0.1

可以看出，不同模型和不同算法得到的结果有显著差别，本文模型优于用 Power-law 算法求解二维 k-ε 紊流模型和 Hybrid 算法求解的三维 k-ε 紊流模型，但不如 Roe 算法求解二维

k-ε 紊流模型和 QUICK 格式求解三维 k-ε 紊流模型。可见数值算法和所选取的模型都非常重要，由于本文采用的是比 k-ε 紊流模型简单得多的零方程紊流模型，计算工作量小，但数值计算精度高，这是完全合理的结果。可以预见，将本文算法用于求解 k-ε 紊流模型或其它紊流模型有可能得到更加精细和可靠的结果。

4 结 语

本文引入组合型 TVD 格式和有限体积离散方法用于求解浅水方程和污染物扩散方程，建立了二者耦合求解的高分辨率有限体积计算模型。以浅水流动和水环境中的几个典型流动作为算例，模拟了溃坝波的圆柱绕流特征、明渠突扩流动和污染物扩散输运现象，并与实验数据或其它数值结果进行了比较，表明该模型不但能处理有激波的非恒定流问题，也能较好地计算一般的浅水流动和污染物扩散问题，为浅水流动和水环境模拟提供了精度高、稳定性好、普适性强的计算模型。进一步的工作是应用于实际河口、海口、海湾等，以解决更多的工程实际问题。

参 考 文 献

1 Elder JW. The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow. *J Fluid Mech*, 1959. 5

2 Wang Jiasong, Ni Hangen. A high-resolution finite-volume method for shallow water equations. *J of Hydrodynamics*, Ser B, 2000, (1): 35~41

3 Wang Jiasong, Ni Hangen, He Yousheng. Finite-difference TVD scheme for computation of dam-break problems. *ASCE J Hydr Eng*, 2000, 126(4): 253~262

4 王嘉松. 浅水流动和污染物扩散计算的有限差分和有限体积高分辨率算法. 上海交通大学工程力学系博士后出站报告，2000. 8

5 Yang JY, Hsu CA. Computations of free surface flows, Part 2: 2D unsteady bore diffraction. *J Hydr Res*, 1993, 31(3): 403~412

6 陈景仁著. 湍流模型及有限分析法. 上海交通大学出版社，1989

7 McGuirk JJ, Rodi W. A depth-averaged mathematical model for the near field of side discharges into open channel flow. *J Fluid Mech*, 1978, 86(4): 761~781

8 Ye J, McCorquodale JA. Depth-averaged hydrodynamics model in curvilinear collocated grid. *ASCE J Hydr Eng*, 1997, 123(3): 380~388

9 Demuren AO and Rodi W. Side discharge into open channels: Mathematical model. *ASCE J Hydr Eng*, 1982, 109(12): 1707~1722

渗流力学几个方面的进展和建议

郭尚平

(中国石油勘探开发研究院，北京 100083)

摘要　简述渗流力学四个较重要方面，即：非线性渗流，微(细)观渗流，计算渗流(油藏数值模拟)和微动态渗流的进展和建议，并建议开展气水合物渗流环境。

关键词　渗流，非线性，微(细)观渗流，油藏数值模拟，天然气水合物

渗流力学发展的特点是涉及的产业部门和工程技术日益广泛，研究方向和内容不断增多。很难对渗流的研究和应用作全面论述。本文仅就五个方面近十多年来的进展做一综合概述并提出一些建议。

1　非线性渗流

非线性渗流涉及很广泛的渗流问题，现代工程技术中需要研究解决的渗流问题绝大部分都是相当复杂的非线性问题。本文只概述渗流中的分形(Fractal)、分叉(Bifurcation)和混沌(Chaos)研究。

1.1 分形

现代非线性科学的概念和理论在渗流力学中的应用，以分形开始较早，工作也较多。多孔介质的宏观和微细观特征多具分形特性在渗流力学及其基础多孔介质物理的研究和应用中，分形理论可能发挥重要作用。

1985 年~1986 年以来，各个产业部门和各种工程技术中的渗流研究都比较注意引入分形理论。研究的侧重点是用分形几何描述多孔介质的物理特征，例如孔隙形状及结构、岩体和媒体的裂隙壁面和孔隙壁面的不规则性、裂缝网络的分布、孔隙度和渗透率等参数的非均质分布等。另一种工作是用分形理论研究和定量描述两相渗流时的黏性指进，多半是以实验数据为基础，个别工作是以逾渗理论为基础。稍后，开始用分形理论研究单相弱弹性流体渗流、不混溶的和混溶的两相流体渗流、溶质粒子弥散过程和气泡生长机理以及裂隙介质渗流和双重介质渗流等。

发表的成果不少，有些成果有应用意义。例如石油勘探开发研究院用分维描述地层渗透率非均质，确北原有方法更为细致。总的看来，渗流的分形研究今后宜努力于更好的结合工程技术实际，增强成果的应用价值。

1.2 分叉

与渗流有关的研究较多的分叉问题是多孔介质体的热对流问题。1967 年~1972 年，Elder JW，Becd JL，Straus JM 和 Horne RN 等发表了多孔体内热对流分叉的文章，以后陆续发表了一些论文。我国空气动力研究与发展中心、吉林大学数学系、中国科技大学力学系和渗流流体力学研究所也先后开展了与渗流有关的分叉研究。

他们研究的物理模型多是底部加热的、流体饱和的、水平放置的多孔介质层。后者的垂直截面或是正方形的，或是矩形的。沿长轴方向或是有限的，或是无限的。多孔介质是均质的、不可压缩的。边界是不渗透的，侧壁边界是绝热的。流体为单相牛顿流体，遵循达西渗流定律。

作为表征量的参数采用瑞利(Rayleigh)数 *Ra* 和平均努赛特(Nusselt)数 *Nu*，而瑞利数和努赛特数间有相关关系。瑞利数是由气体的导热系数、热膨胀系数、黏性系数、比热、密度、重力加速度和上下表面温差值等构成的无量纲的综合参数。

研究的内容围绕如下两个问题：参数变化引起的分叉过程和机理及稳定性分析。其次，也研究了几何尺寸(多孔介质体的高宽比)的影响以及流动模式的转换等。已经研究了二维和三维、定常和不定常问题。研究方法为解析法和数值方法。已经获得的主要结论大体是：控制方程中的瑞利数是多孔介质热对流的重要参数、特征参数；上下表面温差小时，多孔体内的气体处于稳定的静止状态，只存在静态传热，此时的解为平凡解，即平凡的静态传热解；上下表面温差增至较大数值、瑞利数达到临界值时，非线性方程解出现分叉，多孔体内的流态出现回流，导致平凡解失稳；分叉临界瑞利数不止一个，而是多个；随着瑞利数的逐步增大，会依次出现一、二、三……个临界数，相应地相继出现方程的第一、二、三……级分叉解，而多孔体内的流态相应地依次出现单回流、双回流、三回流……。数值解已经预测出第一、二、三个临界瑞利数。各家的解析解获得的第一个瑞利数与数值解十分一致。有的作者的解析解预测的第二个瑞利数与数值解已较好地接近。但解析解的第三个瑞利数值与数值解的结果还相差较远。

Riley 于 1990 年代发表的文章称，当瑞利数固定不变，但截面宽高比值变化时，发现随截面宽高比值的增加，也出现失稳，陆续出现分叉，其情况与宽高比值固定时瑞利数变化引起的分叉类似。也有人研究了多孔介质体倾斜放置的分叉问题。

1.3 混沌

渗流混沌研究比分形和分叉研究开展更晚，国内外都如此。迄今发表文章很少。国外开始较早的是 Kimura；国内最先发表渗流混沌成果的作者是中国科技大学孔祥言。Kimura 1986 年发表的模型是底部加热的正方形截面的多孔体内的热对流，他用伪谱法研究二维非定常热对流问题中瑞利数不断增大导至的变化，发现多孔介质内的热对流从稳定状态到单频的周期振荡到两个基频的准周期状态到混沌的发展历程与非多孔介质由的历程明显不同。

中国科技大学 1997 发表的成果很有意思。他们的模型是矩形截面的均质的和不变形的多孔体，四周的力学边界条件为不渗透，热学边界条件为等温，单相牛顿流体，固相与流体相处于热平衡状态，惯性项忽略不计。由此所得数学模型为由非定常的连续方程、达西方程和能量方程组成的关于流函数和温度函数的非线性的二维对流的椭圆型控制方程。这种传热问题涉及两个综合参数：一是渗流瑞利数*Ra*；一是努赛特数 *Nu*。用高阶差分研究这一问题，瑞利数计算至 16 000。考虑了多孔体水平放置和倾斜放置情况。从计算结果得出几点有意义的认识：首先，多孔介质中热对流随瑞利数增大的发展特点不是循序渐进地单调地由有序状态发展到越来越严重的无序状态，而是呈反复不定的变化，即稳定对流-周期性对流-混沌-稳定对流-混沌-周期性对流-混沌……(以下未继续计算)(见表 1)。值得指出的是，Kimura 的研究结果也显示出类似特点。第二个特点是，当多孔体不是水平放置，而是倾斜放置时，出现循环往复的阵发现象(间歇现象)，即：由相轨线图看出流动由周期性对流和一个混沌区组成，解的发展历程呈现“周期性-混沌区-周期性-混沌区……”的特点。Ryland 研究倾斜放置的矩形截面多孔体内的热对流时，也发现与此类似的情况。第三个特点是：倾斜放置与水平放置相比，稳定对流转化为不稳定对流的瑞利数有增大趋势。

分形、分叉和混沌等非线性概念和理论引入渗流学科是有重要的学科发展意义和应用前景的。例如，就以多孔介质为热对流的非线性理论来说，就与石油热法开采、地下热能开发、

甲烷水合物开发、雪层内质量传输、冰丘冰凌和血崩的形成以及核废料处理等工程技术有密切关系；化学工业和航空航天部门对多孔材料日益增多的需求也需要开展多孔介质内热对流等方面的非线性理论。

表 1　热对流的发展(多孔体水平放置)

瑞利数 Ra	对流状态	Nu-t 图	功率谱图	相轨线图
低值	稳定对流	一条水平线(除初始段外)		呈一点
4600~5200	周期性对流	周期性振荡	有明显尖峰	一条封闭曲线
5400~<5880	混沌			
5800~<6200	稳定对流	一条水平线		
6200~9000	混沌	无周期性振荡	无明显尖峰	混沌结构
9500~11000	周期性对流			
11500~16000	混沌			

但是，与学科发展和工程技术的要求相比，渗流分形、分叉和混沌等的理论研究还嫌太慢，与实际应用结合紧密的成果更少。有必要加强这方面的渗流研究和应用。

在进一步的研究中，在下述等方面值得深入开展工作：热对流之外的其他渗流问题；考虑非达西渗流的影响；非牛顿流体渗流；低温条件下的渗流；研究对流时除自然对流外还要考虑强迫对流以及自然对流和强迫对流共存的混合对流。

2　微(细)观渗流

这里的“微观渗流”系指孔隙层次的渗流研究。

传统的渗流研究是宏观研究，即以岩石或土壤的样品以及地层或土壤为研究对象。这种研究无疑是必要的和重要的。不足之处是通过宏观研究不知道或不确切知道多孔介质内部的物理、化学、生物学和力学的细节，因此不可能知道或不确切知道很多重要的渗流机理和规律。微观研究可弥补宏观研究的不足。宏观研究和微观研究相辅相成可使渗流研究进一步深化，使渗流应用有更扎实的理论基础。微观研究和宏观研究最终会很好地结合起来。

孔隙层次的渗流研究可以观测、模拟和计算多孔介质的孔隙、孔洞、裂隙、裂缝本身结构及其内表面的各种物理参数和化学(矿物)组成以及渗流过程中的物理、化学、生物学和力学的细节、机理和规律。这种微观研究的方法有二，即物理模拟实验和数值模拟计算。

2.1 微观物理模拟

2.1.1　二维物理模拟

微观物理模拟实验是从二维研究开始的，主要是借显微技术观测透明的二维模型内的细节、机理和规律，用录相手段记录，并用二相和三相的微量测定仪同步测定微流量。我国起步较早，中国科学院渗流所于 1960 年代提出“微观渗流”思想，于 1970 年代后期正式开始二维物理模拟的模拟技术、测试技术和设备的研究开发以及二维微观渗流实验研究。1980 年代初期即率先在国内和国际上发表微观渗流研究成果，1990 年发表微观渗流专著。1980 年代中期已开发成功由 11 项技术配套的模拟和测试技术，可以较好地模拟天然孔隙、裂缝介质的拓朴结构、孔隙表面粗糙度和润湿性以及高温高压下的复杂流动，还可以模拟一些矿物成分如黏土矿物的影响等，可以进行微量多相流体各相流量的计算。模拟温度可达 200℃，模拟压力可达 20~30MPa；模型有效尺寸可达 10 cm×10 cm，孔隙直径可小至 10 μm。

他们应用这项模拟测试技术已经在多相渗流、非牛顿流体渗流、物理化学渗流和非等温渗流等方面进行了比较系统的研究，新发现了一些渗流机理和规律，对以前大约知道，但不

具体、不系统和不确切了解的一些机理和规律进行了具体化、完善化和系统化。例如，发现了水油二相渗流时的“小孔包围大孔”机理，后者可能是在宏观上相当均质的油层中也有相当多的残余油的一个重要原因。又如，原来认为聚合物驱油只能提高波及系数，不能提高洗油系数，但渗流所于 1980 年代后期完成的孔隙层次实验表明，聚合物不但能提高波及系数，也能提高洗油系数。这一发现对工业上大规模推广应用注聚合物提高石油采收率提供了一个重要的新的科学依据。

除玻璃光刻的二维物理模型外，我国又发展出用天然岩石薄片制出的二维物理模型。岩石薄片模型的孔隙表面性质等更接近实际。西北大学和渗流所在进行这项工作。二维物理模型继续完善的方向是：孔隙结构和表面性质要更接近天然岩石实际，从这一角度出发，天然岩石薄片二维模型值得重视；模型有效尺寸要尽可能加大，以保证流动的充分发展，也便于将宏观和微观研究结合起来。孔隙尺寸应尽可能缩小以更接近实际：要解决模型内饱和度分布和压力分布的测试技术。

近十多年来，孔隙层次的二维实验模拟在国内外都逐渐普及。在我国，有些石油研究院所已将这一层次的实验研究视为常规手段，与宏观实验配套进行。

2.1.2 三维物理模拟

孔隙层次的三维渗流研究值得非常重视。美国 Brookhaven 国家实验室已初步实现孔隙层次的三维实验。他们于 1998 年已实现高分辨率的三维岩样成象，其分辨率可小至 2.7 μm，因而对一块北海布伦特砂岩岩样完成了视野为 0.75 mm 直径的园柱体的孔隙层次三维成象，孔隙结构和尺寸都很清楚。他们用该技术还研究了渗透率为 1100 千分达西砂岩的孔隙连通情况和临界喉径，研究了渗透率为 15 达西的砂岩的孔隙弯曲度和流体流通路径，研究了渗透率为 5.8 达西的岩样吸水后的油水分布，还观测了 2.5 cm 直径的岩芯水驱油后的油水分布，其视野为 6mm 直径的园柱体，分辨率为 30 μm。

上述孔隙层次三维观测的实现是由于开发成功一种 CMT (Computed Microscopic Tomography) 设备和技术。这种计算机微层析成象技术是在一般 CT 成象技术的基础上，用 X 射线同步加速器加强的结果，所以实际上是加强的 X 射线计算机层析成象技术。该技术的不足之点是被测试的岩样和视野还嫌太小，有待改进。孔隙层次的三维实验观测和二维实验观测(当模型的有效尺寸足够大时)的发展可能将微(细)观实验和宏观实验结合起来，在宏观研究的同时，又知道宏观机理和规律的深层次原因——微细观细节和过程，知道各微细孔隙内的物理、化学、生物学和力学的细节。

2.2 微观数值模拟

从孔隙层次渗流研究出发，渗流流场受孔隙空间的边界条件、黏性力、毛管力和重力以及复杂的物理-化学过程等因素所控制，在此复杂条件下，将错综复杂的多孔介质理想化为某种形式的抽象点阵或网络，看来是解决问题的较好途径。

从这类设想出发，发展了几种模拟方法，主要是两种方法：格子法和网络模拟法。

格子法(Lattice Gas Automation 法和 Lattice Boltzmann 法)起源于分子布朗运动的计算模拟，模拟的尺度更微细，但数学数值上更复杂。

孔隙层次网络模型或孔隙网络模型(Pore scale network model)起源于防毒面具内多孔炭介质的气体渗流研究，其模拟尺度更粗，但为更合实际应用的方法。多孔炭介质渗流存在一个临界值，即孔隙尺寸和连通性必须保证气体通过的阀值；超过阀值即出现渗流。这就是“逾渗”(Percolation)。所以孔隙网络模型法也被称为逾渗法。“逾渗”本是统计物理中的一个概

念。统计物理认为，许多随机系统的宏观性质都是基于系统内部的联接性质，同时，逾渗现象又与临界现象类似。所以逾渗理论成为统计物理研究随机系统的手段。渗流问题的孔隙介质相当于随机系统，而孔隙为流体充填则相当于联接性。

格子法和孔隙网络法(逾渗法)都是用计算机计算模拟孔隙层次微观渗流的方法，都已有一定的发展。网络法的研究者更多，应用更广。在石油工程、水文工程和化学工程的多孔介质物理和渗流力学等领域都获得应用。

2.2.1 格子模型

用格子法模拟孔隙渗流，在国内外都有进展。美国 Los Alamos 国家实验室用格子法模拟岩石孔隙中的二相渗流，计算出相对渗透率曲线和残余油饱和度。我国中科院渗流所与力学所用格子法研究了气体渗流的 Klinkenberg 滑脱效应和油水二相渗流相渗透率曲线。中国和美国的上述研究单位的计算结果与物理模拟结果对比，虽然在定量上还有较大误差，但定性符合较好。

2.2.2 孔隙网络模型

Fatt 最早开始用孔隙网络模型研究多孔介质二维网络的动态和静态问题。以后，很多学者改进和发展了网络模型。例如，美国南加州大学将网络模型与扫描电镜等技术结合，找出了获取孔隙结构参数的方法；明尼苏达大学提出了应用逾渗理论计算 Bethe 网络渗透率的方法，Watertoo 大学提出了计算毛管压力和饱和度等参数的方法，Schlumberger-Do11 研究中心提出了一种分别考虑孔隙和喉道作用的方法和入侵逾渗(Invasion Percolation)概念，实际上是网络模型的一种重要的计算法，有人用网络模型研究了三相渗流问题和润湿性非均质的孔隙介质中的渗流问题。

我国最早用网络模型研究渗流问题的单位是北京石油大学(1994)，以后，西南石油学院和中国石油勘探开发研究院也陆续开展网络模型数值计算。

石油勘探开发研究院用不规则网络(Bethe 网络)法计算出的油水相渗透率曲线与 Jones 用 JBN 法获得的相渗透率数据吻合较好。他们还用逾渗理论结合网络模型研究了孔隙半径、孔隙分布均匀度和配位数对两相相渗透率的影响，发现：平均喉道半径、孔隙分布均匀程度和配位数值增大都会导致(同一饱和度下)两相相渗透率值增大。他们在导出以油水界面为核心的网络模型计算微分方程的基础上，用规则网络模型模拟了由 51 万个孔隙单元构成的岩心的吸渗模拟计算，得出了孔隙层次三维模拟的吸渗图象。这项模拟考虑了孔径、喉径、毛管压力和相渗透率等因素。

美国 Brookhaven 国家实验室同时用 Lattice Boltzmann 法和孔隙网络法，对前面所述的用 CMT 技术测试的岩样进行了模拟计算，结果表明，两种数值模拟计算的结果与实验测试结果在定性上符合较好。

综上所述，可以认为：孔隙层次的渗流微观研究值得重视，既有学科意义又有应用前景；孔隙层次的物理实验模拟和数值计算模拟要并重，二者各有长处也各有不足，让二者同时发展，相互补充，相互促进，相互映证，有机地结合起来才有可能较好的促进渗流理论的深化和应用；三维模拟和二维模拟都须重视，三维模拟更须加强；要重视孔隙层次微观模拟和宏观研究的紧密结合，结合越紧密越能提高渗流研究的应用意义；二维模拟和三维模拟的规模足够大时，孔隙层次和宏观层次的研究就结合起来，宏观机理和规律就有了微观细节为基础，宏观结果就有微观数据做解释。

3 计算渗流

计算渗流力学在国内外有关产业部门和工程技术领域都已得到相当的重视。虽然重视的程度和工业性应用的规模稍有不同，但总的情况是发展很快。其特点是非常着重在工程实际中的应用，为工程设计、生产动态预报和控制以及方案优选决择等及时地提供核心数据和科学技术依据。下面以油田开发方面的计算渗流研究和应用为例，介绍二十年来的发展，重点介绍 10 年来油藏渗流并行算法方面的进展。

在国内外的石油行业中计算渗流力学被称为“油藏数值模拟”。由于油藏计算渗流力学为油田开发方案优选、产量和地层压力动态预报、地下剩余油分布和采收率预测、经济效益预测以及整个油田开发的重大问题决策提供了一个有严格科学依据的现代计算技术，所以国内外在 1970 年代就开始研究和应用，但真正工业性的应用和软件的商业性推广是从 80 年代开始的。这当然与硬件的发展水平有关。石油渗流的计算模拟要求最大限度地逼近油藏实际的地质条件、地层参数、渗流中的物理化学过程和全部生产实际，这对计算机的硬件和软件的要求都是十分苛刻的。1980 年代初，大型矢量机的出现使油藏渗流计算开始走向真正的工业化应用，而以后的计算机工作站和并行机的问世，促使油藏渗流计算又向前大大进步。

为解决工程设计和生产计算中的实际问题，油藏渗流数学模型是相当复杂的偏微分方程组。仅以相对简单的砂岩多孔介质中的油气水三相三维渗流模型(黑油模型)来说，已是一个较为复杂的抛物型非线性偏微分方程组，其解法一般都是用差分格式离散，然后以牛顿迭代法求解。这样的黑油模型软件的主体部分大约也是 10 万行 Fortran 语句的大程序。若要完成百万网格的精细数值模拟，在全隐式黑油模型条件下就需要解 300 万阶的非对称的稀疏矩阵。对三次采油工程，由于化学法开采、热力开采、注高压气混相开采和微生物法开采等引起的油藏内出现非常复杂的化学、物理和生物学过程，其数学模型就更为复杂。

已有的水平大概是，对较先进的各种油藏生产模式，对各种二、三次采油技术，国际上都有较好的商用软件。我国自己开发的和引进的软件已初步配套，可以用串行计算完成二次、三次采油方面的规模不大的、非精细的模拟计算。要完成大规模的精细的数值模拟，必须考虑应用并行计算。我国当前已能进行百万网格规模的比较精细的黑油模型数值模拟。

纵观近 20 年来油藏计算渗流力学的发展，前 10 年后 10 年的变化都是很大的。

3.1 油藏计算渗流力学近 20 年来的主要进展

3.1.1 1980 年代的主要进展

(1) 全隐式方法

1970 年代主要使用 IMPES 方法和半隐式方法，其稳定性差，容易产生不收敛。全隐式方法用非常简单的牛顿迭代使油气水渗流模型绝对稳定。这就使油藏渗流数值计算容易被不十分了解渗流计算的油藏工程师掌握运用。

(2) 预处理共轭梯度法

1970 年代的主要数值解法是逐次超松弛迭代法和 D_4 高斯直接求解法。二者在较大规模应用时都有致命的弱点。前者遇大型计算问题时收敛速度很慢，又不能保证精度；后者在计算时所用内存随网格节点数呈平方倍增加。1980 年代的预处理共轭梯度法兼有高速度和精度，目前已被所有油藏渗流数值计算商用软件采用。

(3) 矢量化

矢量机使计算速度呈数量级的增长。

(4) 自适应隐式方法

使用该法可节省三分之一到一半的运行时间，该法已成为多组分渗流计算时解决隐式问题的主要途径。

(5) 局部网格加密

该技术将油藏中一个区域细分，然后程序自动计算出内部网格的传导率。这项技术使油藏渗流计算有了更符合渗流力学原理的离散化处理。可用该项技术研究水锥、天然裂缝、断层、水平井、不规则井以及一个盆地中开采多个油气藏等。

(6) 状态方程组分模型

为模拟凝析气田循环注气开采、回收地下反凝析液体、高收缩挥发性原油开采过程、注 CO_2 或 N_2 的非混相驱或近混相驱、水气交替注入以及地下储气库等，需要物理化学过程非常复杂的组分模型。1970 年代用收敛压力法，1980 年代将烃类组分相平衡与渗流力学有机结合，获得了状态方程组分模型。

(7) 稠油热采渗流模型

这是非等温渗流数值模拟。在流动方程中增加了水组分平衡条件方程、能量方程、温度变量、汽相水摩尔分数变量、各种流体属性对温度的依赖关系以及地层围岩热损失速率等。该模型还可用于注热水驱油、研究热效应对采收率的影响，还可用于地下热能开发模拟。

(8) 裂缝多孔介质渗流模型

有双孔单渗和双孔双渗的多重介质渗流计算模型。目前应用较成熟的是块状灰岩油藏，对低渗透砂岩裂缝性油藏的渗流计算还缺乏较好的模型。

(9) 聚合物驱油渗流模型

该模型考虑了非牛顿流动、不可逆吸附、一阶离子和二阶离子的盐敏效应和与黏土交换、渗透率降低、不可及孔隙体积和各种浓度相关属性变化等。已有 19 组分的化学驱油模性，但实际应用时考虑的组分更少些，使未知量只约 20 个。

(10) 工作站前后处理软件

工作站的出现对油藏渗流数值模拟应用计算机的方式产生了重大影响。

3.1.2 1990 年代的主要进展

从硬件发展趋势看，1980 年代是矢量机的时代，1990 年代是工作站的时代。油藏数值模拟的发展与硬件发展紧密联系，1990 年代由传统计算机转向工作站。工作站的速度约以一年翻一番的速度增长。加上工作站软件系统的完善和标准化以及三维图形库的应用，使油藏渗流数值模拟面目一新。同时，油藏渗流模型与石油勘探开发的其它学科间的软件系统横向整合的趋势发展很快。

(1) 工作站软件一体化

1980 年代末，工作站前后处理程序以单独软件出现，与主模型之间的联系仅以文件形式体现，以至文件体积庞大，运算效率低。现在，一体化的工作站软件使前后处理程序与主模型程序组合在一个软件中，使用公用的内部数据库，数据调用方便，模块联系紧密。而且，由于采用通用的 X/MOTIF 标准，各公司的软件都能在各种工作站上运行。

(2) 模块化、集成化

1980 年代以单个软件形式出现，用户每用一个软件都要重新学习，每个软件还需配备自己专用的前后处理软件。模块化集成化就是将工作站的各种油藏渗流情况下的软件统一于一个系统中。模块化集成化完善和加强了工作的站的一体化。统一的初始化，统一的主模型计

算，统一的数值解法，统一的前后处理图形输入输出，使原来很多类型油藏渗流软件的重复工作大幅度减少。

(3) 横向整合

石油勘探开发的各学科，包括地震、测井、油藏描述以及三维可视图象等各种软件，横向地综合于一个系统，下分数据平台(共享的数据库)和软件平台(不同学科的软件间能相互调用)。

(4) 网格精确化

1980 年代的正规的矩形网格使计算误差大，也不能模拟一些重要的渗流机理。现在采用局部网格加密、井附近杂交网格、井中心技术、九点差分格式、角点技术以及非正常联系技术等，使油藏渗流模拟网格技术向逼真性、精确性大大前进一步。

(5) 数值解法标准化

1980 年代，各公司所用的解法五花八门，增添了用户的困难，现在各家解法软件已趋向标准化、规范化，并在解法参数选取上尽量自动化，以致用户使用解法软件就像使用傻瓜照像机那样方便，一切解法都是自动化、隐含化的。

(6) 可视化

可视化技术不仅有显示三维图象和直观渗流动态的优点，而且可在三维空间检验、处理数据，更重要的是会启发我们产生新思想、新方案，并分享数据、分享思想，及时快速地交流(人与人间交流、人与机间交流和不同专业间的渗透)。这对渗流研究及其在工程中的应用都是很有意义的。

(7) 并行化

3.2 并行化保证了油藏渗流计算的精细化、大规模化和高效化

并行处理技术对油藏计算渗流的工业性应用具有非常重要的意义。以前，油藏渗流计算的工程应用由于只能串行处理而受到很大限制。例如，用二维二相简化黑油模型计算各网格上的压力和饱和度分布，其规模只能做到约 10 万个网格；对三维三相黑油模型只能一万个至多几万个网格。平面上的网格尺寸一般是百米量级，纵向上一般限制在 10 层以下。这样，一个网格的面积已达几万平方米，其间的井数可能已是二、三口。纵向上只能模拟计算主力层和少数非主力层；对其它层系则只能将若干层合并为一个层进行计算，使计算模拟的一个层往往是实际生产中的几个层，而且可能是生产中分层开采的几个层。如果考虑到我国油藏多属陆相沉积，地质特征和物性参数变化很大，上述处理确系太粗。油藏渗流计算的主要内容之一是计算一个油藏开发一段时间之后的剩余油分布，以便有效地开采油藏中的剩余油。剩余油的分布是十分杂乱无章的，特别是已开发多年的高含水期和特高含水期油藏。非精细的规模不大的渗流计算当然离地质实际和生产要求相距较远。

生产上的要求是：两口井间的网格数不少于三个，所以平面上的网格步长必须小至几十米，最好十几米；纵向上不要将分层合并，要能模拟几十个层甚至上百层。这么精细的渗流数值模拟导至总网格数达几十万、几百万甚至上千万的大规模。与此同时，生产上急需及时的模拟计算结果为决策依据，因此计算速度是非常重要的。这样，急需大规模的高效率的精细化的油藏渗流数值计算。

为解决此问题，首先需要有大容量和高速度的计算机。提高单 CPU 巨型机的性能困难很大，造价也高；并行机当属首选。

并行机的体系结构和编程方式与串行机有很大差异，串行计算软件和一些计算处理方法

必须进行很大的修改并研制一些新处理法，开发油藏渗流并行计算软件。

美国于 1982 年开始并行化编程和计算方法研究，1990 年代初推出并行油藏数值模拟软件。

我国于 1990 年代初开始油藏数值模拟并行化软件研究，中国海洋石油公司与中科院合作在 Transputer 微机上成功地实现了三维二相黑油模型软件并行化。1994 年中国石油天然气总公司石油勘探开发研究院开始油藏模拟软件并行化研究，他们与大庆和胜利油田研究院、清华大学、中科院软件所和计算所、复旦大学以及北京应用物理与计算数学所等合作，现已开发成功一套油藏数值模拟并行黑油软件系列，包括：三维三相隐式压力显式饱和度共享内存并行黑油模型，多层二维二相共享内存并行黑油模型，共享内存并行三维三相全隐式黑油模型，适用于砂岩和裂缝等多孔介质的三维三相共享内存并行多功能黑油模型，同时适合共享内存和分布内存的通用并行三维三相全隐式黑油模型。应用这一并行软件系列可完成百万网格的较精细油藏渗流数值模拟。

上述软件系列是在下述环境下开发的：硬件环境是多指令流多数据流共享内存并行计算机——4CPU 和 6CPU 的 SCI Power Challenge 并行机；计算机语言是适合共享内存计算机的 PFA(Power Fortran Accelerator)，同时适合分布内存和共享内存的通用编程环境的 PVM(Parallel Virtual Machine)；并行算法是当前较成熟的区域分裂法。

对上述并行黑油软件系列已用我国实际资料和国际石油工程师协会资料进行测试检验，结果表明并行计算的效率很明显，当网格数上百万时，如果模拟 10 年时间，串行计算几乎无能为力，而并行计算 (6 个 CPU) 只用 52 小时，如果并行机的 CPU 数更多，则并行计算效率会更显著。石油勘探开发研究院现已引进一台 IBM SP3 分布内存并行机，48CPU，这将使我国油藏渗流数值模拟的加速比大为提高。

国外的大石油公司一般都能进行百万网格规模的油藏渗流数值模拟。最大规模的一项计算是 PGS 公司和美国 Los Alamos 国家实验室合作，用隐式压力显式饱和度黑油并行软件，用 128CPU 的 Cray 公司的 T3D 分布内存并行机，用 10 个小时完成了 1800 万网格的数值计算，模拟了 2200 口井的 25 年生产历史，比串行计算速度高 100 倍。

3.3 对今后工作的建议

(1) 油藏渗流数值模拟的基础是多孔介质的描述，当前需要研究解决多孔介质体的形态、性质、分布及其物理参数的精确的三维描述。渗流数值模拟人员有必要同地质人员合作加强多孔介质体精确描述工作。

(2) 特别急需加强高含水期剩余油分布的精细的大规模模拟及其可视化工作。

(3) 水动力方法提高采收率条件下油藏内压力、油气水流量和含水饱和度的分布和变化的精细模拟及其可视化工作。

(4) 考虑了长期水洗过程引起的地层孔隙内各种物理参数不断变化条件下油气水渗流的精细模拟和可视化。

4 微动态渗流

自然界存在各种类型的流场变化幅度微小的地下渗流，我们暂称之为“微动态渗流”。这是一个值得重视的领域。

4.1 微动态渗流背景

通常涉及的地下渗流中，渗流动态变化总是较大的；微动态渗流的动态变化则是相当轻

微的。现例举微动态渗流出现的背景：

固体潮 月球等星体的运行对地球的引力不断变化，使地球不断变形，使地球的固体部分也发生潮汐作用，这称为固体潮。深井水位受固体潮汐的影响，反映为每一昼夜出现两个波峰和两个波谷，变化幅度一般为 12~18 cm，最大可至 24~30 cm，朔望两日的波幅最大。

地震活动 地质构造活动和地震孕育过程使深井地下水位动态异常。我国地下水位观测可测出 0.02 cm 的波动幅度和几秒的波动周期。

荷载变化 饱和流体的地层上方的荷载变化导致该地层中渗流动态微细变化。引起荷载变化的因素很多，如气压波动、降水降雪、海洋潮汐、地面水体和上覆的饱和流体地层的流量变化、高速的大量注水采油，甚至火车通过时的震动等等，都可引起深层渗流场的微细波动。

4.2 微动态渗流研究具有重要意义

深层渗流微动态可为人类提供重要信息。以地下深层水来说，它有三个特点：分布范围极广（无论纵向分布还是横分布，地下水都遍布于地壳各处）；易于流动；压缩系数相对较小。所以，地下水稍受激励就有明显响应，反映相当灵敏，因而深层地下水就是重要的地下信息的载体。以地震为例，地震预报是人类最关心的、急需解决的重大问题之一，而地下水渗流微动态就能提供地震前兆信息。新构造运动和地震孕育过程必然引起地层岩体受力变形，导致孔隙流体的流场变化。观测和研究这种渗流微动态与地震的关系，就能找到预报地震的方法。联合国教科文组织召开的地震预报科学讨论会（1979 年巴黎）所列三项首要地地震预报研究项目之一就是地下水动态。实际上，自 1960 年代以来我国以地下渗流微动态异常为基础的成功的震前预报已有多次。全球每年发生地震约有 1500 万次，造成破坏的也有 800 次，其中 7 级以上造成严重灾害的地震约 10 次。20 世纪前 80 年全球发生造成伤亡的地震 623 次，死亡 120 万人。同一时期，我国发生的死亡千人以上的大地震 31 次，共死亡 61 万人，经济损失数百亿元。可见，如果微动态渗流研究单只为地震预报做出贡献，其重要意义也就不小了。

微动态渗流主要涉及深层的和封闭的地下环境。据估计，地下 60 km 处还可能有液态水，岩石圈中水的藏量约相当于大洋水量，甚至在上地幔中也可能有水存在。但是，人类迄今研究较多的只是大气圈、地表水圈、岩石圈上部和生物圈这四圈的交替循环的水。而后者只占总水量的很小部分。虽然地下深部的渗流问题与当前人类的生产和生活活动可能还无很大关系，但从长远来看，人类的视野和活动必会向地壳深处延伸。

将地下微渗流动态问题和其他相关学科如地球动力学、地球物理学、地球化学和地震学等结合研究，交叉渗透，可能会为人类的将来做出较好贡献。

4.3 微动态渗流是比较复杂的渗流

微动态渗流要求将渗流力学与岩石力学、弹塑性力学等结合研究，往往是流固耦合问题，还要考虑几种因素同时影响地下渗流微动态，例如，与地震孕育因素同时起作用的至少还有固体潮汐和气压波动；深井内的动态是面积很大的区域的渗流动态的反映；地层各处的物理参数随地层岩体的应力 应变过程而不断变化，等等。由于这种类型的渗流动态变化是微量变化，所以，虽然有关地质物理参数的变化幅度很小，其影响却是不能忽视的。

在渗流微动态研究方面，有些部门例如地震部门已经做过一些工作。已做的工作主要是观测性的和经验性的。渗流理论性工作和计算研究的加强必将促进有关工程技术问题的更好解决。

5 水合物渗流

5.1 工业背景

这是一个全新的方向。

天然气水合物矿藏或称气水合物矿藏是一种迄今较少为人谈及但很为重要的能源和资源。

天然气水合物是天然气被包含在水分子中的，在适宜的低温和高压环境下稳定存在的，呈白色、淡黄色、琥珀色或暗褐色的结晶体，有人称为“可燃冰”。据现有资料，天然气水合物类型有三：第一种气水合物含甲烷和乙烷以及 H_2S、N_2 和 CO_2，为立方晶体结构，分布最广；第二种除甲烷和乙烷外，还含有丙烷和异丁烷等，为菱形晶体结构；第三种除较小分子烃外，还含有比异丁烷分子更大的烃类。

天然气水合物主要分布于两种环境：深海海底的沉积层或沉积物的多孔介质内；陆地寒区永久冻土层下的地层多孔介质内。

从太平洋、大西洋、印度洋直到北冰洋甚至内海如里海、黑海和亚速海的海底都已发现天然气水合物。初步估计，这些大洋的 85%~95%面积的海底都储藏有天然气水合物，一般是分布于 300~500 m 的海底沉积层内。我国的东海和南海也有丰富的天然气水合物资源。

陆地上的永久冻土区包括永冻区的浅海带地层内遍布天然气水合物，例如，北极的格陵兰、南极大陵、俄罗斯的欧洲部份北部、西伯利亚和远东区、加拿大北部、阿拉斯加北部以及我国青藏高原广大区域。北极地区资料表明，气水合物一般分布于地面以下 130~2000 m 地层内。初步计算表明，全球天然气水合物资源量约为石油、天然气和煤等矿物燃料资源总藏量的二倍，资源量如此巨大的原因不仅是由于其分布范围广泛，而且还由于一个单位体积的天然气水合物释放的能量约为 164 单位体积的天然气。

由于气水合物资源如此诱人，由于现有的石油和常规天然气资源逐渐枯竭，由于不少国家和地区本来就极缺矿物燃料资源，所以世界众多国家非常重视天然气水合物资源的研究和勘探开发。俄罗斯、加拿大、美国、日本、印度、德国、法国、澳大利亚、挪威、英国、巴西、韩国等都已开始天然气水合物计划。

前苏联 1968 年在西伯利亚永冻区发现 Messoyakha 气水合物气田，1971 年投入开发，还成功地实验了向井内注甲醇大幅度提高产量的技术。加拿大 1993 年在 Mackenzie 三角形地区也钻获气水合物矿藏。美国在阿拉斯加北部为勘探气水合物已钻井数百口，在普拉德霍湾钻获气水合物。

与此同时，各国的国家水合物开发计划和国际水合物会议以及文献信息出版均已相当活跃。美国能源部 1982 年即已开始天然气水合物研究与开发计划，1991 年由能源部、地调局和海军研究实验室共同召开了国家气态水合物第一次讨论会，国会已立法通过“1999 年甲烷水合物研究开发方案”。1990 年联合国召开的国际讨论会已将气水合物列为专题；1989 年第 28 届国际地质大会讨论了气水合物问题。1983 年荷兰已出版气水合物专著。

在我国，中科院冰川冻土所 1970 年代在青藏高原永冻区、1960 年代在祁连山多年冻土区通过钻探发现了类似天然气水合物的显示，1997 年申请立项开始了青藏高原永久冻土层天然气水合物研究，国家海洋局已开展东海海底天然气水合物资源潜力研究。中科院 1998 年召开的我国 21 世纪能源科学发展战略研讨会上也讨论了青藏高原水合物研究问题。中国海洋石油公司也在海洋能源资源会上讨论了水合物资源问题。

天然气水合物稳定存在的条件是低温和高压，其开采原理是人为地使水合物分解为天然

气及水，所以现有的开采方法是加热法、降压法、化学法和二、三种方法综合应用的混合法。

加热法是从地面向天然气水合物储层内泵入热水、蒸气、热盐水或其它载热流体，或用电磁加热等井下加热法，目的都是让储层温度上升导致水合物分解后采出。降压法是降低环境压力导至水合物分解。化学法是向储层注入盐水、氯化钙、甲醇、乙醇、乙二醇、丙三醇等化学剂以降低水合物稳定温度或改变水合物的相平衡条件。

5.2 天然气水合物渗流问题

综上可知，有必要及早开始多孔介质内天然气水合物的渗流研究，这是一类很有特色的渗流物理、渗流化学和渗流力学问题。从已经了解的情况分析，水合物渗流研究必须考虑一系列复杂的机理和物理-化学过程：在加热开发条件下，升温至一定程度后水合物晶体开始分解为水和天然气，水气开始混流；在降压开发条件下，储层压力降至一定程度后水合物晶体开始分解成二相流体，开始二相渗流；在化学法开采条件下，当化学-物理过程进行到一定程度后，水合物开始分解并开始渗流。在这些基本过程中还伴随不少复杂机理，例如：分解为水和天然气的过程开始后，天然气逐渐膨胀，直至最后可膨胀几倍几十倍甚至百倍；水气混流时，水气容积比不断变化，水气二相分布结构不断变化；分解过程和渗流过程中温度和压力不断变化，传质和传热；水合物有自保护效应，即水合物在低温下可在表面形成一层冰膜，后者会阻止水合物的进一步分解；水合物分解的滞后效应，即水合物在降压后还能稳定相当一段时间，等等。其它一些地质条件和工程因素使水合物的分解和渗流过程更加复杂化。例如，一般不会是用单纯的一种方法开采生产水合物，而会是加热法-降压法-化学法的不同类型的混合应用，其渗流机理将更为复杂；地层孔隙介质是非均质的，因而储层内各处甚至紧邻的一些孔群的地质-物理参数相差很大，这将导致水合物分解和渗流过程差异很大。看来，天然气水合物矿藏内的分解过程和渗流问题是相当复杂的但很有意思的问题，值得及早开展研究工作，特别是基础性工作。

此外，水合物矿藏成藏时的渗流问题也值得重视。气水合物形成矿藏模式之一为渗流模式，即气和水渗流入储集层，当达到气水合物稳定条件时，渗流中的气水混合物中出现气过饱和状态，逐渐形成水分子包含天然气的气水合物晶体。这一气水混合物渗流-成藏过程研究有重要的理论意义和应用价值，将对天然气水合物矿藏的成藏理论以及资源勘探和开发工程有重要意义。

关于非定常流动的计算问题

张涵信

(中国空气动力研究与发展中心，四川绵阳 621000)　(国家计算流体力学实验室，北京 100083)

摘要　对于非定常流动计算，除了差分格式应满足耗散控制、色散控制和激波控制条件以保证计算过程中的稳定性、不产生虚假波动和良好地捕捉激波外，还应特别要求满足保频率条件，并且要求计算网格和边界计算方法要与内点计算匹配协调。文中对此作了讨论，并按此要求给出了差分计算格式、网格和边界处理方法，对二维超声速剪切层在 M_c=0.5 的情况作了数值模拟。时间发展问题的结果表明，在起始阶段，初始产生的周期解是稳定的，只是在很长时间以后，流动出现分叉，不论计算域长度取多少初始扰动周期数的倍数(相应，初始含有不同数目的涡)，最后均合并成一个涡。空间发展问题的结果表明，在离进口的很长一段距离内，进口单频扰动产生的周期解，一直保持，只是在离进口很长距离的下游，才出现猝发现象，有大扰动间歇出现，以后逐步演化为多周期解、准周期解甚至混沌。如果进口为双频 $\left(\omega,\frac{1}{k}\omega\right)$ 扰动，周期解失稳提前发生，k=2 时，出现两涡合并，k=3 时，出现三涡合并，k=4 时，出现四涡合并。

关键词　S 个非定常流动，计算方法，超声速剪切层

引　言

伴随飞行器外形不断变化、速度不断提高和性能大幅度改进，飞行器绕流流型的研究已经历了四代：第一代为无黏流型，第二代为黏性附体流型，第三代为定常脱体涡流型，第四代为非定常分离涡流型。现在正处于第四代。机动飞行器、微型仿生飞行器以及智能飞行器等发展的需求，要求研究非定常分离涡流型的规律和机理，以便进行控制。和其它流型相比，非定常分离涡流型是复杂的，它具有以下特征：第一，流动常常是多尺度的，即流场内包含不同尺度的旋涡；第二，流场是多频运动的，即含有不同频率的振荡运动。大家知道，NS 方程是一耗散系统，它所描述的运动，要么稳定于定态解（即定常流动），要么动稳定于周期解、多周期解、准周期解或混沌、湍流运动。第三，流动是可以演化的。随参数变化它可由周期振荡解演化为多周期、准周期或混沌运动。鉴于非定常流动的复杂性，要准确地进行计算就变得困难，我们必须根据非定常流动的物理特征，建立网格、内点和边界点计算匹配协调的正确的计算方法。这里和流动特征的物理分析相结合是重要的，一方面可以帮助建立合理的数值模拟方法，另一方面可以帮助揭示复杂流动的演化机理。本文目的是从物理分析出发来探讨非定常流动的计算和演化问题。

1　非定常流动的计算方法问题

在 NS 方程中，由于黏性耗散项具有椭圆型的特征，其差分计算采用中心型格式是合宜的。研究 NS 方程的求解，主要困难在于无黏性项的处理。关于三维无黏性项的计算，又可分别按三个一维问题来处理，因此我们可从一维无黏性方程

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}=0 \tag{1}$$

出发，来讨论问题。这里$A=\frac{\partial F}{\partial U}=S^{-1}\Lambda S$，其中$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)$为 A 的特征对角矩阵，S 为其左特征向量矩阵。如果引入

$$S\mathrm{d}U=\mathrm{d}W$$

$W=(w_1,w_2,\cdots,w_m)^{\mathrm{T}}$，(1)可进一步写成

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\Lambda\frac{\partial W}{\partial x}=0$$

如果再令$w_l=u,\lambda_l=a$，则上式可写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{2}$$

设利用某种差分格式求解(2)，则与差分方程对应的修正方程式是

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{n=m+1}^{\infty}\nu_n\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \tag{3}$$

这里ν_n是截断误差中 n 阶导数项的系数，它与Δx^{n-1}成正比，其中Δx为网格间距。m 表示格式的精度，截断误差的导数项由 m+1 阶开始。

同定常计算一样，在非定常计算中，我们也应要求：(1) 在计算过程中，计算是稳定的，即计算过程中的数值误差不能增长；(2) 在物理量连续的区域，不产生虚假的波动；(3) 如果流场有激波，应该能光滑、狭窄地捕捉激波。为了满足这些要求，应该和定常问题一样，要求修正方程式的截断误差项满足我们在文[1]给出的耗散控制、色散控制和激波控制原则。但是，对非定常流，另一个必须满足的要求是流动的频谱控制。因为非定常流常常包含有各种频率的振荡，如果数值解给出的频谱和真实物理问题的频谱不一致，根据李天岩、约克[2]“周期 3 就意味着混沌”以及沙可夫斯基[3]定理，数值解的结果可能与真实解相差甚大。所以非定常流动的保频谱原则是非常重要的。设式(2)和(3)分别可写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}=R$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\overline{R}$$

式中$R=-a\frac{\partial u}{\partial x},\overline{R}=-a\frac{\partial u}{\partial x}+\sum\nu_n\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$，假定$\int_{-\infty}^{\infty}|R|\mathrm{d}x<\infty$，$\int_{-\infty}^{\infty}|\overline{R}|\mathrm{d}x<\infty$，$R$ 和 $\overline{R}$ 的频谱为

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\\ \overline{F}(\omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{R}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4}$$

为了让真实解和差分解之间的频谱差最小，我们要求

$$\left|F(\omega)-\overline{F}(\omega)\right|=\min \tag{5}$$

将上面给出的 R 和 $\overline{R}$ 代入式(4)和(5)，可以得到

$$\alpha^2+\omega^2\beta^2=\min \tag{6}$$

式中$\alpha=\sum(-1)^n\nu_{2n}k^{2n}$，$\beta=\sum(-1)^n\nu_{2n+1}k^{2n}$。(6)式表明，要满足保持频谱的条件，差分格式截断误差中的色散项和耗散项都要小。因为ν_{2n}和ν_{2n+1}都与网格间距有关，于是我们得到：

保频谱的格式应该是截断误差小的高阶格式，或者网格很密的二阶格式。

根据这一要求，并利用耗散控制、色散控制和激波控制原则，李沁等人[4]对方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0 \tag{7}$$

建立了如下保频谱的二阶和四阶混合格式

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j=-\frac{1}{\Delta x}(h_{j+1/2}-h_{j-1/2}) \tag{8}$$

式中

$$h_{j+1/2}=h^+_{j-1/2}+h^-_{j+1/2}$$

这里

$$h^+_{j+1/2}=\begin{cases}\left(h^+_{j+1/2}\right)_{\text{NND}} & \text{if} \quad \left|\text{sign}(\Delta f^+_{j-3/2})+\text{sign}(\Delta f^+_{j-1/2})\right|+ \\ & \quad\left|\text{sign}(\Delta f^+_{j-1/2})+\text{sign}(\Delta f^+_{j+1/2})\right|=0 \\ & \text{or} \quad \left|\text{sign}(\Delta f^+_{j-1/2})+\text{sign}(\Delta f^+_{j+1/2})\right|+ \\ & \quad\left|\text{sign}(\Delta f^+_{j+1/2})+\text{sign}(\Delta f^+_{j+3/2})\right|=0 \\ w_1\tilde{h}_1^++w_2\tilde{h}_2^++w_3\tilde{h}_3^+ & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\tilde{h}_1^+=c_1f^+_{j-2}-\frac{1+4c_1}{2}f^+_{j-1}+\frac{3+2c_1}{2}f^+_j$$

$$\tilde{h}_2^+=c_2f^+_{j-1}+\frac{1-4c_2}{2}f^+_j+\frac{1+2c_2}{2}f^+_{j+1}$$

$$\tilde{h}_3^+=\frac{1+2c_3}{2}f^+_j+\frac{1-4c_3}{2}f^+_{j+1}+c_3f^+_{j+2}$$

$$(c_1,c_2,c_3)=(0.189915766,-0.149078931,-0.149078931)$$

$$w_i=\frac{b_i}{b_1+b_2+b_3},\quad b_i=\frac{\alpha_i}{(IS_i+\varepsilon)^2}$$

$$IS_1=(f^+_{j-2}-4f^+_{j-1}+3f^+_j)^2$$

$$IS_2=(f^+_{j+1}-f^+_{j-1})^2$$

$$IS_3=(f^+_{j-2}-4f^+_{j+1}+3f^+_j)^2$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0.1092369696,\ 0.47093503,\ 0.419827974)$$

$$\varepsilon=10^{-6}\sim10^{-9}$$

类似地可给出 $h^-_{j+1/2}$，格式(8)在激波附近为二阶 NND 格式，在激波以外为四阶精度。

对于三维 NS 方程，分别将(8)用于构造每个方向上的差分格式，其黏性项采用四阶中心格式，就可得到三维计算的计算式。

最近，沈孟育及其合作者，利用类似的原则和方法，也成功地构造了五阶和三阶的混合格式。

在利用高精度格式求解非定常 NS 方程时，还有两个问题必须同时考虑。一个是网格间距的选取问题，它除了应该满足文[5]提出的根据格式精度和流动区域的雷诺数确定网格间距

的条件外，还应该满足条件(6)。另一个是边界计算与内点计算同精度的问题，这可从文[4，6]给出的边界控制方程出发，并用同内点一致精度的格式求解该方程来解决。

2 超声速混合层的演化问题

作为一个例子，这里来计算超声速混合层的演化问题。这是一个当前学术界和吸气式发动机研制者非常关心的课题。实验指出，当对流 Mach 数小于 0.6 时(M_c<0.6)，流动仍具有二维的特征，因此，我们研究 M_c=0.5 的二维超声速剪切层的混合，并分成时间问题和空间问题加以讨论。

2.1 时间发展问题

假定求解域为矩形：$0 \le x \le L$，$-H/2 \le y \le H/2$，初始时刻(t=0)，已知流场为

$$u = U + u'$$
$$v = V + v'$$

其中 $U = \dfrac{U_1 - U_2}{2}\,\mathrm{th}\,y$，$V = 0$，$u'$，$v'$ 均是沿 x 方向具有周期性的小扰动速度分布，它们可用无黏 Reyleigh 方程最不稳定的解给出，其周期长度为 λ。U_1，U_2 均大于声速，是已知的。流场的初始压力是均匀的，温度分布按 Busemann-Crocco 分布计算。计算域的长度 $L = n\lambda$，其中 n 为整数，曾计算了 n=2，3，4 等三种情况。我们在此初值下利用上节给的差分格式和相应要求的网格及边界处理方法，对 NS 方程作了数值计算，x=0，和 x=L 两边界，取周期性边界条件，$y = -H/2$ 和 $y = H/2$ 两边界，按边界控制方程计算。以剪切层初始厚度为特征长度的雷诺数为 5 000，横向取 451 网格点，流向每初始波长 λ 取 150 个网格点。H 可取剪切层厚度的 35 倍。计算给出了如下结果：

(1) 利用等压力线和流线图可清晰显示流动演化的特征，在演化过程中，等压力线一直保持中心点形态，并且流线的涡心，近似对应于等压力线的最小压力点，流线的鞍点（涡心与涡心间），近似对应于等压力线的最大值点(图 1，2)。

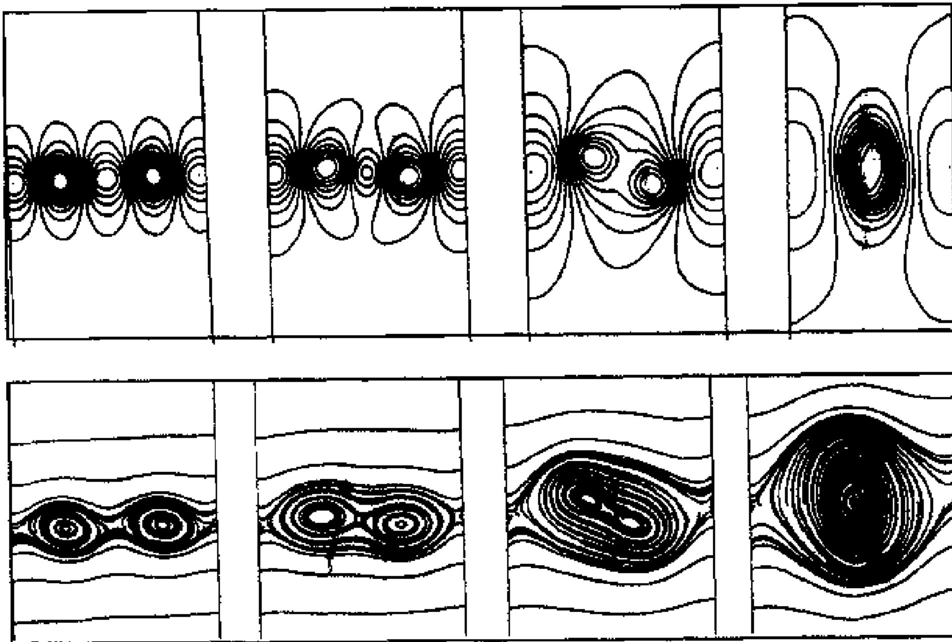


图 1 等压力线和流线，两周期情况 M_c=0.5，Re=5 000
（由左向右 t=20，70，80，90）

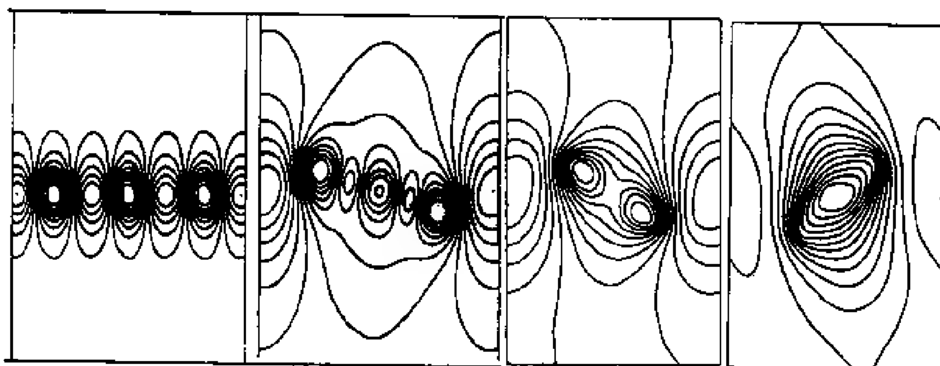


图 2　等压力线，三周期情况 M_c=0.5，Re=5 000
（由左向右 t=20，90，100，120）

(2) 在初始阶段，初始扰动给出的周期解，能在很长一段时间内保持。在周期解稳定存在的阶段，不论计算域的 n 值为何，在一个周期内，解都是相同的。但是时间很长以后，周期解失稳，流场拓扑结构改变，此时，不同 n 值的解，就变得很不相同。

(3) 周期解失稳后演化的情况是：当计算域取为 2λ 时，随时间增长，两涡合并成一个涡(图 1)。当计算域取为 3λ 时，随时间增长，中间一个涡先消失，然后剩下的两个涡合并，最后演变为一个涡(图 2)。当计算域取为 4λ 时，随时间增长，先是两个两涡合并，然后合并后的两个涡又合并，最后变成一个涡(图 3)。总之，不论初始阶段流场有几个涡，由于左右两边周期边界条件的限制，最终都变成一个涡。通过理论分析，我们可以给出涡结构分叉(消失，合并)的理论条件，可参见文[7]。

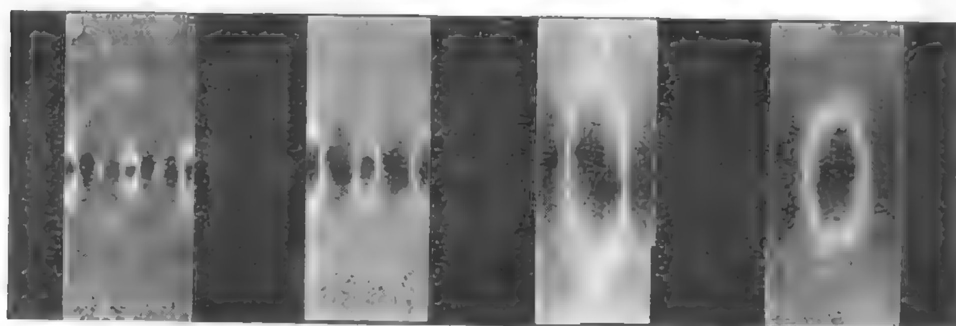


图 3　等压力线云图，四周期情况 M_c=0.5，Re=5 000

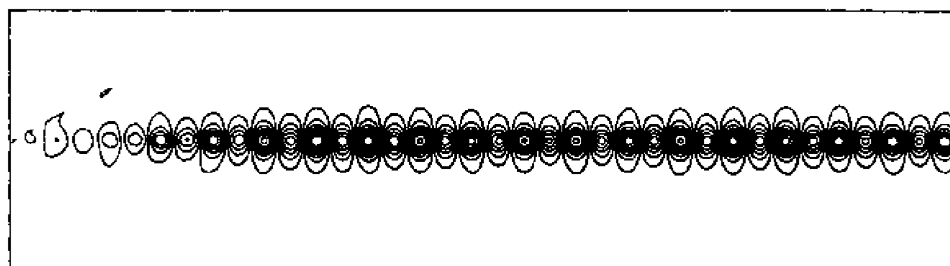
2.2 空间发展问题

求解域仍为：$0 \le x \le L$ 和 $-H/2 \le y \le H/2$ 的矩形，但是在进口边界，已知速度分布为

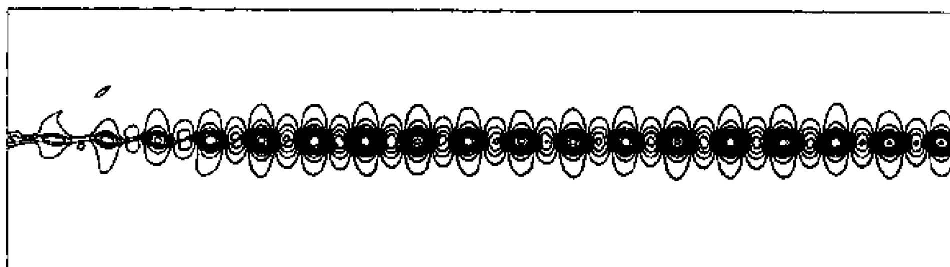
$$x=0\ \begin{cases} u=\dfrac{U_1+U_2}{2}+\dfrac{U_1-U_2}{2}\,\mathrm{th}y+u' \\ v=0+v' \end{cases}$$

式中 u'，v' 是已知的 t 的周期小扰动函数（设无量纲频率为 ω）。进口边界的其它参数用时间发展问题的公式计算。在出口和上下边界，利用边界控制方程计算。利用上节给出的方法求解 NS 方程，设 L=256，H=70，Re_L=2.1×10^4（L 为剪切层的厚度），网格为 1 515×451，可以得到如下结果：

(1) 由进口向后，在单频扰动的情况下，(如 $\omega=0.3387$)，在相当长的距离内，剪切层的流动，一直保持单频周期运动的形态。但是沈清的计算发现（他用的是三阶精度格式）在离进口很远的距离以后，出现猝发现象，有大的扰动间歇出现，以后流动会变成多周期、准周期甚至混沌运动（见图 4，5）。

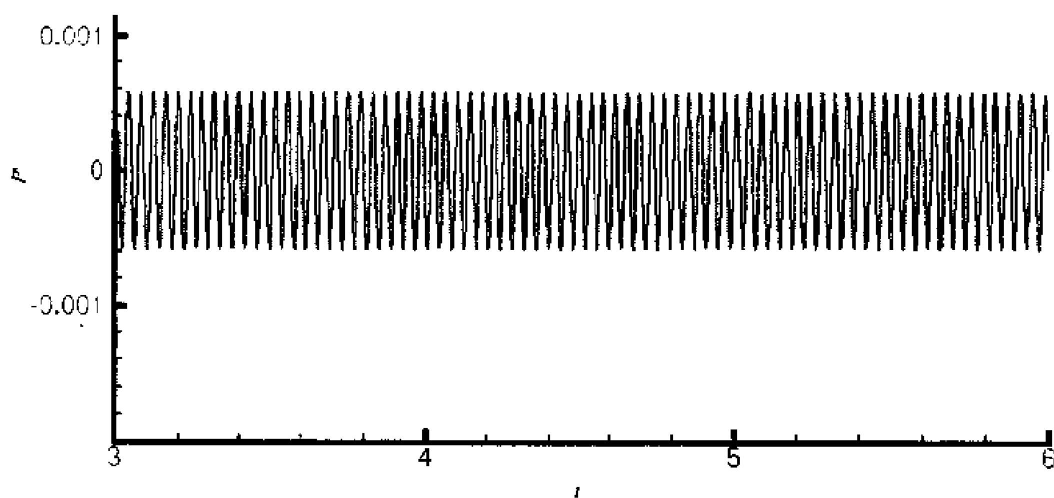


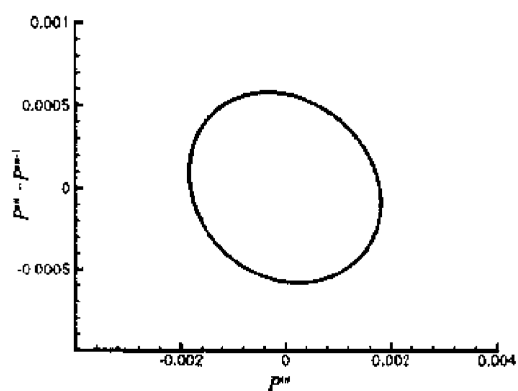
等压力线



等密度线

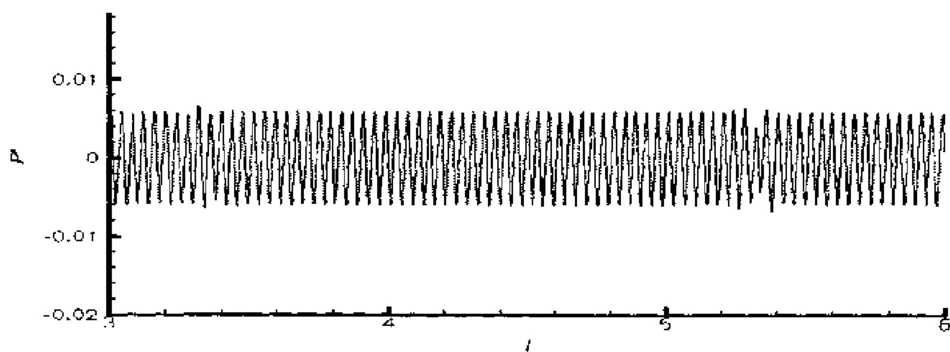
图 4　进口为单频扰动的等压力线和等密度线，M_c=0.5，Re=2.1×10⁴

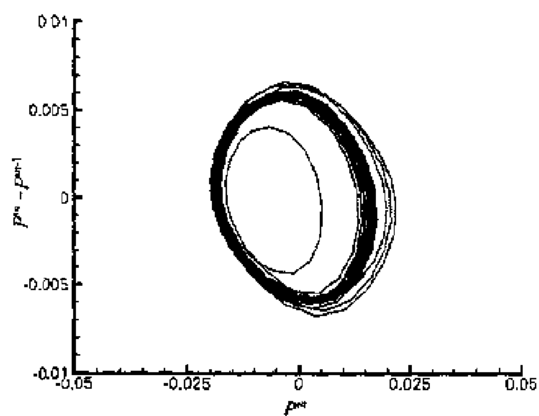




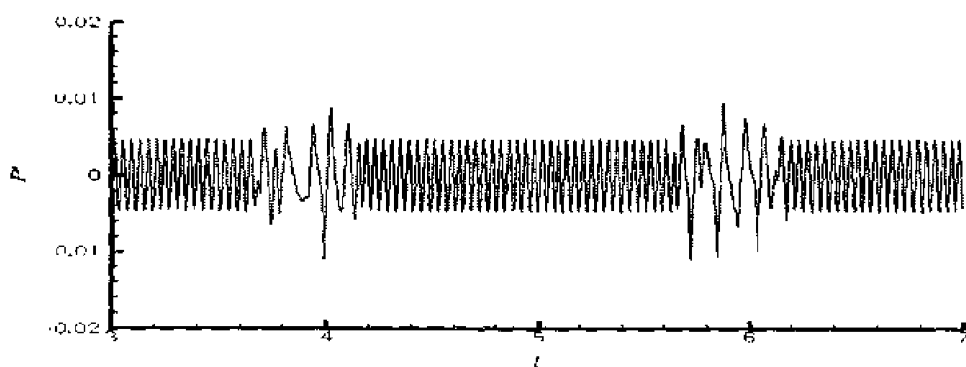
(a)　X/L = 2.0

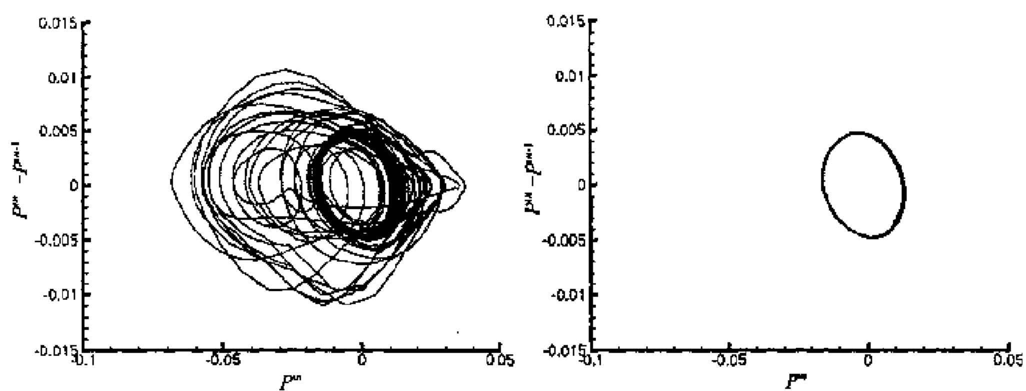
图 5　剪切层的三个空间点处压力随时间的变化曲线及相图





(b) $X/L = 2.4$





(c) $X/L = 2.48$

图 5 剪切层的三个空间点处压力随时间的变化曲线及相图（t=4.5~5.5）

(2) 若在进口存在两种周期扰动（以后叫双频扰动），一种频率为ω，另一种为$\frac{1}{k}\omega$，这里k为2，3，4，…。在离进口一定的距离后，当k=2 时，出现两涡合并；当k=3 时，出现三涡合并；当k=4 时，出现四涡合并，这些情况和时间发展问题中计算域长度分别取n=2，3，4 相对应。数值模拟结果给出的流线、压力线图以及频谱分析都清晰地证明了这一结论（见图6，7）。

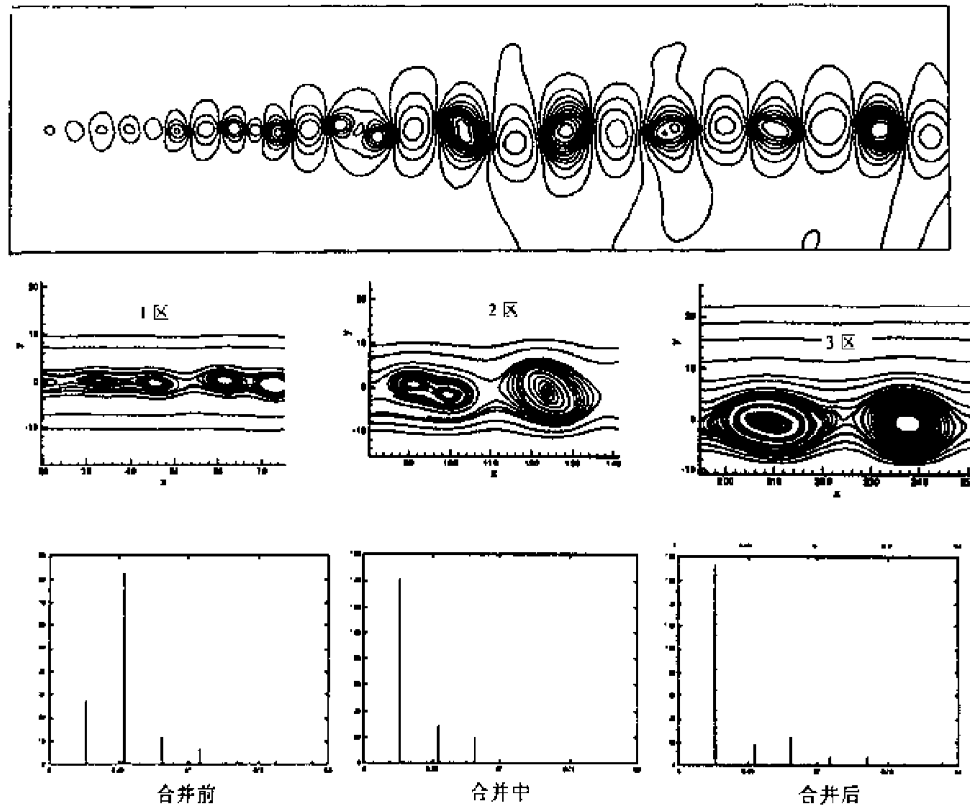
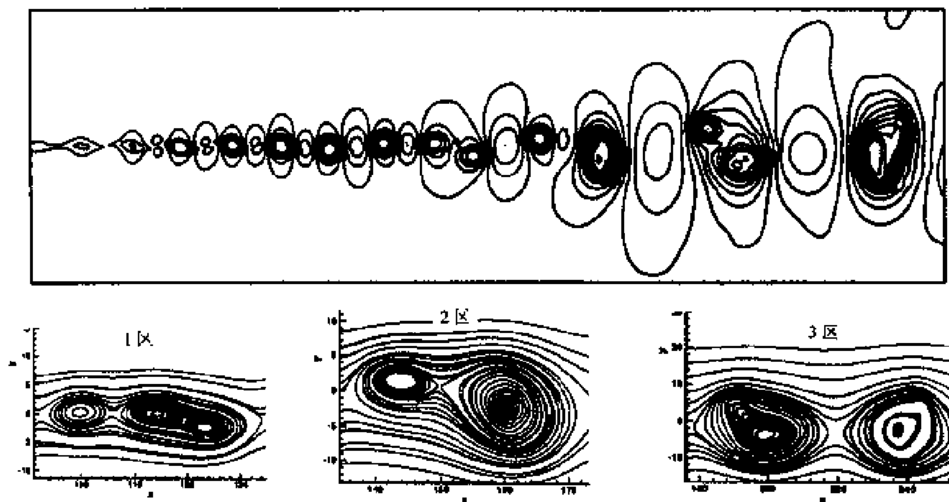


图6　进口双频扰动两涡合并的演化 $(\omega,\frac{1}{2}\omega)$



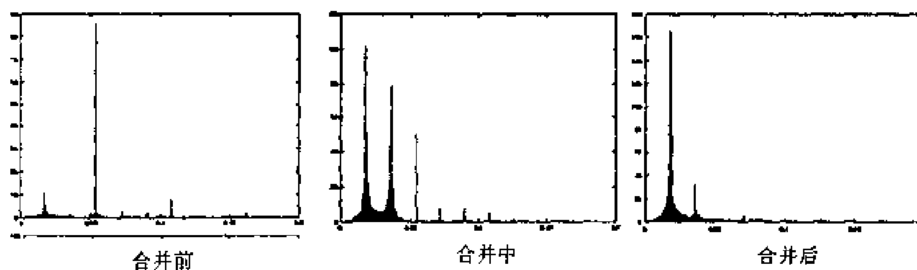


图 7 进口双频扰动三涡合并的演化 $(\omega,\frac{1}{3}\omega)$

(3) 若在进口两种频率是不可约的，情况和上面不同，很快出现多周期运动。

最近，我们对此现象作了理论分析，理论完全证实了这一结论（理论分析将另文发表）。

3 结 论

通过以上研究，我们有以下结论：

(1) 对非定常流动的计算，为了给出正确结果，在设计差分格式时，除了应该满足耗散控制、色散控制和激波控制条件外，应该特别重视满足保频率条件。还应该解决好网格和边界计算与格式的匹配问题。

(2) 对于 M_c=0.5 的超声速剪切层的时间发展问题，初始给出的周期性解，在较长的时间内一直保持，但后来失稳，计算域长度为双周期的解，出现两涡合并，计算域长度为三周期的解，出现三涡变成一个涡，计算域长度为四周期的解，最后也演化为一个涡。

(3) 对于 M_c=0.5 的超声速剪切层的空间发展问题，当进口为单频扰动时，周期运动会在离进口相当长的一段距离内保持，但在离进口很远距离的下游，会出现失稳，有大扰动的淬发现象间歇产生，再后变成多周期和准周期等运动。如果进口的扰动为双频情况，失稳会提前出现，双频为（$\omega,\frac{1}{2}\omega$）时，出现两涡合并，双频为（$\omega,\frac{1}{3}\omega$）时，出现三涡合并，双频为（$\omega,\frac{1}{4}\omega$）时，出现四涡合并的情况，这和时间问题中计算域长度 $n\lambda$ 分别取 n=2，3，4 的演化情况对应。

参 考 文 献

1 张涵信等. 关于建立高阶差分格式的问题. 空气动力学学报，1998，16(1)

2 Li TY and Yorke JA. Period three implies chaos. *Am Math Monthly*，1975，82：985

3 Sarkovskii AN. Ukr. *Math Zh.* 1964，16(1)

4 李沁等. 一种混合型四阶格式、基于特征的边界条件及其应用. 空气动力学学报，2000，18(2)

5 张涵信等. 网格与高精度差分计算问题. 力学学报，1994，31(4)

6 Zhang Hanxin. On the problems to develop physical analysis in CFD. In: 4th Asian Computational Fluid Dynamics Conference Mianyang，China，September 18-22，2000

7 张涵信等. 时间发展的二维混合层的物理分析和数值模拟. 空气动力学学报，2000，18(增刊)

数值气候预测

曾庆存
(中国科学院大气物理研究所，北京 100029)

摘要 简述气候系统动力学模式，计算格式，初值形成，集合预测方法等，尤其是中国科学院大气物理研究所跨季度数值气候预测的经验。

关键词 气候系统模式，初值形成，集合预测方法

引 言

简言之，气候是在某一足够长的时段内天气状态的总和。详细些说，某一确定时段内气候状态就是大气状态及其产物在此时段内的统计平均状态及极端状态。由于要作统计平均，时段要足够长才有意义，而在这足够长的时段内，大气运动状态显然要受到大气以外的且与大气有相互作用的介质的影响。因此，气候的形成及气候随时间的演变过程是由所谓的气候系统所决定的。气候系统由大气、海洋（包含海冰）、陆表层（包括植被和冰雪覆盖）组成。气候系统动力学模式就由描述上述各分系统的动力学方程组（大气环流模式，海洋环流模式，和陆表层模式）及其耦合所组成，其中还有各种边界条件，以及外源（如太阳辐射和地底热流）。至于数值气候预测，就是用数值方法积分这个气候系统动力学模式，在给定的初始条件下，算出所欲预测的时间段内的气候状况，尤其是它相对于其相应的统计平衡态的距平。本文将主要给出中国科学院大气物理研究所（IAP）准业务性的跨季度（即半年）气候预测的方法(IAP PSSCA)及一些结果。

1　气候系统动力学模式简介

先说大气环流模式（AGCM），其基本框架就是可压缩流体动力学方程组，包括动量方程（牛顿第二定律），大气质量守恒方程，能量守恒方程，气体状态方程，以及像水汽等大气中的微量成分的质量守恒方程等。此外，还加入“薄层近似”，“准静力平衡近似”，“理想气体近似”和“准热力平衡近似”等。

由于通过近百年的实际观测，长时间平均的大气在垂直方向上的温度结构（即标准层结 $\tilde{T}(z)$，其中 z 为高度）和各地地表面上的气压 $\tilde{p}_s(\theta,\lambda)$（其中 θ 和 λ 为余纬和经度）是已知的。不过 $\tilde{T}(z)$ 和 $\tilde{p}_s(\theta,\lambda)$（尤其是在崎岖陡峭地形情况下）随空间变化相当复杂，其沿空间的微商不易由离散的计算方法（例如差分方法或低阶的截谱方法）算准。IAP-AGCM 就先把这标准层结扣除，而只作气候状况相对于这标准层结状态的偏差的预测，因而大大减小了计算的误差。

由于使用了准静力平衡，可用气压 p（或 $\zeta = p/p_s$，其中 p_s 为地表处的气压）代替高度坐标 z，于是有温度 T、气压 p、等压面位势 gz 等可表为标准层结及偏差之和

$$
\left.\begin{aligned}
&T(\theta,\lambda,\zeta;t)=\widetilde{T}(p)+T'(\theta,\lambda,\zeta;t)\\
&gz(\theta,\lambda,\zeta;t)=g\widetilde{z}(p)+\phi'(\theta,\lambda,\zeta;t)\\
&p_s(\theta,\lambda,t)=\widetilde{p}_s(\theta,\lambda)+p'_{sa}(\theta,\lambda;t)\\
&\widetilde{p}_s(\theta,\lambda)=\widetilde{p}(\theta,\lambda,z_s)\\
&R\widetilde{T}=-g\zeta\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial\zeta}
\end{aligned}\right\}\tag{1}
$$

其中 R 为大气气体常数，z_s 为地表海拔高度，g 为重力加速率。而水平风速 v 以及T'，φ'，水汽混合比 q 的动力学方程就可写成如下

$$\frac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}t}-\frac{v_\lambda}{a}\mathrm{ctg}\theta=\frac{\partial\varphi'}{a\partial\theta}-\frac{RT'}{p_s^*}\frac{\partial p_s^*}{a\partial\theta}+2\omega\cos\theta v_\lambda+D_\theta+C_\theta \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}n_\lambda}{\mathrm{d}t}+\frac{v_\theta v_\lambda}{a}\mathrm{ctg}\theta=-\frac{\partial\varphi'}{a\sin\theta\partial\lambda}-\frac{RT'}{p_s^*}\frac{\partial p_s^*}{a\sin\theta\partial\lambda}-2\omega\cos\theta v_\lambda+D_\lambda+C_\lambda \tag{3}$$

$$C_p\frac{\mathrm{d}T'}{\mathrm{d}t}=\frac{C_pC_0^2}{R\widetilde{p}_s^*\zeta}\left[p_s^*\dot{\zeta}+\zeta\left(\frac{\partial p'_{sa}}{\partial t}+v_\theta\frac{\partial p_s^{**}}{a\partial\theta_s}+v_\lambda\frac{\partial p_s^*}{a\sin\theta\partial\lambda}\right)\right]+D_{T'}+Q_{T'}+C_{T'} \tag{4}$$

$$\frac{\partial p'_{sa}}{\partial t}+\frac{1}{a\sin\theta}\left\{\frac{\partial\widetilde{p}_s^*v_\theta\sin\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\widetilde{p}_s^*v_\lambda}{\partial\lambda}\right\}+\frac{\partial\widetilde{p}_s^*\dot{\zeta}}{\partial\zeta}=D_{ps} \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=D_q+Q_q+C_q \tag{6}$$

$$RT'=-\zeta\frac{\partial\varphi'}{\partial\zeta} \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+v_\theta^*\frac{\partial}{a\partial\theta}+v_\lambda^*\frac{\partial}{a\sin\theta\partial\lambda}+\dot{\zeta}^*\frac{\partial}{\partial\zeta} \tag{8}$$

其中 ω 为地球自转角速率，C_0 为层结大气中的重力波传速，定义如下

$$C_0^2\equiv\frac{R^2T}{g}(\gamma_a-\widetilde{\gamma}) \tag{9}$$

$\gamma_a\equiv g/C_p$，$\widetilde{\gamma}\equiv-\mathrm{d}\widetilde{T}/\mathrm{d}z$（设$C_0^2$为正），$C_p$为大气等压比热。如在$C_0^2$中的$T$用$\widetilde{T}$代替，则称为标准层结近似，此时可引入大气的有效位能，在数学-理论分析中有很方便之处。$\dot{\zeta}\equiv\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}t$，它可通过(5)及边界条件(11)而求得。

Q_T 和 Q_q 为源汇项，D_f 为由涡流脉动所导致的弥散项，而 C_f 则为反映由对流运动（它不能有上述方程所描述）所导致的大尺度运动的动量和能量的再分配。$Q_{T'}$，Q_q 和 C_j 很复杂，本文这里不谈。至于 D_f，则只须保证其耗散性即可。又：v_θ^* 等带 * 号的量被称为可灵活性替代，在实际计算时有许多灵活性，可以调节。

边界条件要与方程协调。今列出基本的三个

$$\phi_s'(\theta,\lambda;t) \equiv \varphi'(\theta,\lambda,1;t) \approx \frac{p_{sa}'}{\widetilde{\rho}_{sa} g} + \varphi_{sm}' \tag{10}$$

$$\dot{\zeta}\Big|_{\zeta=0,\ 1} = 0 \tag{11}$$

$$\int_0^1 |f|^2 \mathrm{d}\zeta < \infty \tag{12}$$

它们分别由几何关系、运动学关系和物理逻辑上推出。此外，在下边界$\zeta=1$处还应有通量连续性要求，$\zeta=0$处则通量为 0。$\varphi_{sm}'=z_m'(\theta,\lambda;t)$为大气下界面海拔高度的扰动（如在海洋上时），$\widetilde{\rho}_{sa}$为地表处标准大气密度。

类似地，在海洋中亦可引入标准层结$\widetilde{p}(z)$，$\widetilde{T}(z)$和$\widetilde{S}(z)$（盐度）和$\widetilde{\rho}(z)$（海水密度），扣除标准层结后的海洋环流模式（OGCM）方程为

$$\frac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}t} - \frac{v_\lambda^2}{a}\mathrm{ctg}\theta = -\frac{\partial p'}{a\rho_m \partial\theta} + 2\omega\cos\theta\, v_\lambda + D_\theta + C_\theta - \frac{\rho'}{\rho_m}\left[(1+\zeta)\frac{\partial\varphi_{s0}'}{a\partial\theta} + \zeta\frac{\partial\varphi_b^*}{a\partial\theta}\right] \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v_\lambda}{\mathrm{d}t} + \frac{v_\theta v_\lambda}{a}\mathrm{ctg}\theta = &-\frac{\partial p'}{a\rho_m \sin\theta\,\partial\lambda} - 2\omega\cos\theta\, v_\theta + D_\lambda + C_\lambda - \\ &\frac{\rho'}{\rho_m}\left[(1+\zeta)\frac{\partial\varphi_{s0}'}{a\sin\theta\,\partial\lambda} + \zeta\frac{\partial\varphi_b^*}{a\sin\theta\,\partial\lambda}\right] \end{aligned} \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}T'}{\mathrm{d}t} = -\widetilde{\gamma}_T W + D_T + C_{T'} \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}t} = -\widetilde{\gamma}_T W + D_{S'} + C_{S'} \tag{16}$$

$$\frac{\partial z_{s0}'}{\partial t} + \frac{1}{a\sin\theta}\left(\frac{\partial\widetilde{h}^* v_\theta \sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\partial\widetilde{h}^* v_\lambda}{\partial\lambda}\right) + \frac{\partial\widetilde{h}^*\dot{\zeta}}{\partial\zeta} = D_{zo} \tag{17}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial\zeta} = -\widetilde{h}^* \rho' g \tag{18}$$

$$\rho' = \rho_m\left[-\alpha_T T' + \alpha_s S'\right] \tag{19}$$

$$W \equiv \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = (1+\zeta)\left[\frac{\partial z_{ao}'}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla z_{so}^*\right] + \zeta\boldsymbol{v}\cdot\nabla\widetilde{h}^* + \widetilde{h}^*\dot{\zeta} \tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_\theta^* \frac{\partial}{a\partial\theta} + v_\lambda^* \frac{\partial}{a\sin\theta\lambda} + \dot{\zeta}^* \frac{\partial}{\partial\zeta} \tag{21}$$

其中$\zeta \equiv (z-z_{s0})/(\widetilde{h}+z_{s0})$，$h=\widetilde{h}+z_{s0}$，$h$和$\widetilde{h}$各为海水厚度和海表未受扰动的海水厚度，$\varphi_b = g z_b$，$z_b$为海底的海拔高度，$z_{s0}=z_{so}'$为海表高度（取$\widetilde{z}_{s0}=0$），$\rho_m$为海水平均标准密度，$\widetilde{\gamma}_T \equiv \mathrm{d}\widetilde{T}/\mathrm{d}z$，$\widetilde{\gamma}_s \equiv \mathrm{d}\widetilde{S}/\mathrm{d}z$，$\alpha_T$和$\alpha_S$为两系数。

海洋表面及下界面分别对应于$\zeta=0$和$\zeta=-1$。当然，还要提出上、下边界及侧边界条件。例如

$$\dot{\zeta}\Big|_{\zeta=0,-1} = 0 \tag{22}$$

$$p'_{so} \equiv p'(\theta,\lambda,0;t) = p'_{sa} + \tilde{\rho}_{s0} g z'_{so} \quad (23)$$

其中 $\tilde{\rho}_{s0}$ 为海表处海水标准密度。至于其他边界条件亦是关于通量连续性要求等，今不述。至于陆表层模式，主要是土壤温度、土壤水份（包括液、固、气态）演变方程以及地上面状况（冰、雪、植被影响）的方程；亦有上、下界边界条件，今亦不述。

气候系统动力学模式可参见文献[1]。

2 计算格式和初值形成问题

气候预测的计算量十分巨大，积分时段以及时间步数都异常巨大，计算稳定性是必须严格保证的。为此，在计算格式中保持在无源汇时平方守恒以及其他整体性质是十分重要而且很有效的。为了做到这些，IAP 气候系统数值模式中引入了 IAP 变换以及合适的差分格式，可参见文献[1]。

初始条件原则上由实测决定。但这些实测资料是在不同空间位置、不同时刻和不同仪器所测得，资料的时空分布极不均匀，精度也相差相当大。而且像海洋内部、土壤内部甚至极少或没有观测资料。这样，要作气候预测就还有一个初值形成问题。一个方法是将问题转化为广义的初值问题（这里略去边值问题不说，而把它视为动力学系统本身的一部分），即在作预测的开始时刻以前一段时间，先将模式和实测的不完全的资料按某种变分原则求解，得到初值，然后再积分气候系统模式，作气候预测。

3 集合气候预测方法

姑且不论计算格式所引入的计算误差，即就气候系统模式本身而言，就有许多近似，又有一些尚未很好明了的规律（如云和降水过程，辐射传输过程，对流运动影响的表达，地表通量等），以及一些不大确定的参数（如反射率等）；且初始条件包含有可观的观测误差及初值形成误差，经过一、二个季度的积分，是很难估计到气候预测的精度的，更何况气候系统本身还有混沌行为——如果定义混沌是确定性的非周期流，则气候系统绝对是混沌系统，即使模式是“准确”的，气候预测对初值误差的敏感性也是明白的。因此，为限制气候预测的不确定性，以用集合预测方法为宜。例如，若取同一气候系统模式，则可以用一段时间内每天的初始场作气候预测，形成气候预测样品集合。求这集合的某种数学期望作为最终的气候预测，而该集合的离散度则给出气候预测的可信度。又，还可以求某种事件（例如降水量距平为正或为负）的概率，这也是有用的预测量。此外，模式常有系统性的误差，因此付之在业务上使用之前，还应对历史性的系列先作事后的“预测”试验，以便知道其系统性误差，然后在每次预测中加以订正。

中国科学院大气物理研究所的跨季度降水量距平预测系统（IAP PSSCA）就是按上述方法做的。十年经验说明效果尚好[2, 3]，当然还需进一步提高。

参 考 文 献

1 曾庆存，林朝晖，周广庆. 跨季度气候数值预测方法. 2000（即将出版）

2 Lin ZH, et al. Extraseasonal prediction of summer rainfall anomaly over China with improved IAP PSSCA. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences*, 1999, 23(4): 351~366

3 周广庆等. 一个可供 ENSO 预测的海气耦合模式及 1997/1998 ENSO 的预测. 气候与环境研究，1998，3: 349~357

Clebsch 变换与流体力学变分原理

刘高联

（上海大学，上海市应用数学和力学研究所，上海 200072）

摘要　对 Clebsch 变换及其各种推广形式作了系统的推导，再结合林家翘约束进行了分析，并建议了一种更简便、更完善的 Clebsch 变换新形式。在此基础上给出了理想可压缩流体非定常流动变分原理的两种基本形式。

关键词　流体力学，变分原理，林家翘约束，Clebsch 变换，有限元法

引　言

对亚声速流动，势函数法是一个广泛应用的很简单的解法。但是近 20 年来，随着科技的发展，人们必须要解决越来越多的超跨声流动以及其他有旋流动问题。于是，我们不得不寻求更为普遍、更为复杂的流动数学模型和解法，其中 Clebsch 变换及其各种推广形式便日益受到重视，成为理论研究和计算流体力学中的常用的一种手段，如文献[1~7，12]。实用上常需处理一些流动，它在全场或部分域内只有微弱的旋度，或只在局部域上有较强的旋度，这时采用 Clebsch 变换就特别有利，并可部分地利用原有的势函数的解法和计算软件。另一方面，Herivel-Lin 变分原理是理想流体力学中的一条著名的变分原理[1~7]，在它的建立中，Clebsch 变换和林家翘约束起到了关键作用。从 60 年代开始，文献中对 Clebsch 变换和林氏约束的论证一直未断，逐步深入[1~7, 12]，但同时也出现了一些误解和混乱[8~10]。

本文首先对 Clebsch 变换及其各种变型作一全面、系统的推导，在此基础上，结合对林氏约束的分析，研究了相关的变分原理问题。

1　任意矢量场的 Monge 分解

1.1 Monge 分解

设有任一矢量场 $\boldsymbol{u}(x_1,x_2,x_3,t)$ 及其旋度 $\boldsymbol{\zeta}$

$$\boldsymbol{\zeta}=\nabla\times\boldsymbol{u} \tag{1}$$

取散度，有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\zeta}=0 \tag{2}$$

视 $\boldsymbol{\zeta}$ 为密流矢，可仿 3-D 流函数定义式写出

$$\boldsymbol{\zeta}=\nabla\sigma\times\nabla\chi=\nabla\times(\sigma\nabla\chi) \tag{3}$$

代入(1)式得

$$\nabla\times(\boldsymbol{u}-\sigma\nabla\chi)=0 \tag{4}$$

它表明必存在势函数 ϕ，使（至少局部地）满足

$$\boldsymbol{u}=\nabla\phi+\sigma\nabla\chi \tag{5}$$

此即 Monge 分解。ϕ，σ，χ——Monge 势。

取(5)式的旋度

$$\boldsymbol{\zeta}=\nabla\sigma\times\nabla\chi \tag{6}$$

即：σ 与 χ 的等值面是两组涡面，其交线为一涡线。

1.2 Monge 分解的另一种形式

改写(5)式，作分解：$\boldsymbol{u}=\sum_i \boldsymbol{u}_i$。分别对 $\boldsymbol{u}_i$ 写出(5)式再求和，得

$$\boldsymbol{u}=\nabla\Phi+\sigma_i\nabla\chi_i \qquad \text{（对下标求和）} \tag{7}$$

2 Clebsch 变换

考虑正压流动(barotropic flow)，即环量守恒流动。Helmholtz 涡定理——涡与流体完全粘附在一起，即涡线永为涡线，涡面永保为涡面(参看图 1)。于是，有

$$\frac{D\sigma}{Dt}=0, \qquad 和 \qquad \frac{D\chi}{Dt}=0 \tag{8}$$

可见：(5)，(8)式一同代表的只是正压流动，而(5)或(7)式则代表所有的(有旋、无旋、不均熵、有粘和无粘)流动。

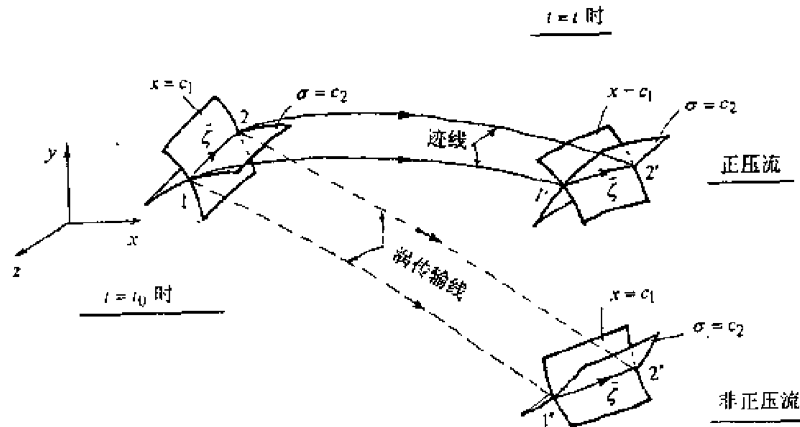


图 1 正压流和非正压流中涡面的运动

正压流的表达式(5)与(8)就是 Clebsch 变换（原始形式）。下面讨论它的各种变型。

2.1 (均熵)正压流

由(8)式知 σ 和 χ 都可表作拉氏坐标 $\alpha_i(i=1\sim3)$ 的函数，于是 $\sigma(\alpha_i)\nabla\chi(\alpha_i)=\beta_i\nabla\alpha_i$，其中 $\beta_i=\sigma\partial\chi/\partial\alpha_i$，代入(5)与(8)式，得

$$\boldsymbol{u}=\nabla\phi+\beta_i\nabla\alpha_i, \qquad (i=1\sim3) \tag{9}$$

$$\frac{D\alpha_i}{Dt}=0\ , \qquad \frac{D\beta_i}{Dt}=0 \tag{10}$$

2.2 普遍旋流 I

设想作分解：$\boldsymbol{u}_s$——均熵部分，$\boldsymbol{u}_\Delta$——非均熵修正项

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_s+\boldsymbol{u}_\Delta \tag{11}$$

由(5)，(8)式

$$\boldsymbol{u}_s=\nabla\phi_s+\sigma\ \nabla\chi \tag{12a}$$

$$\frac{D\sigma}{Dt}=0, \qquad \frac{D\chi}{Dt}=0 \tag{12b}$$

而按(5)式

$$u_\Delta=\nabla\phi_\Delta+\sigma_\Delta\nabla\chi_\Delta \tag{13}$$

既然 u_Δ 乃对非均熵的修正，则当 $\nabla S=0$ 时，$\sigma_\Delta\nabla\chi_\Delta$ 项必须消失，这只要令 $\chi_\Delta=S$ 即可。于是得：$u_\Delta=\nabla\phi_\Delta+\sigma_\Delta\nabla S$，代入(11)式得(改记 σ_Δ 为 η，$\phi=\phi_s+\phi_\Delta$)

$$u=\nabla\phi+\eta\nabla S+\sigma\nabla\chi \tag{14a}$$

$$\frac{D\sigma}{Dt}=0, \qquad \frac{D\chi}{Dt}=0 \tag{14b}$$

这里 $\frac{DS}{Dt}=g(x_1,x_2,x_3,t)$ 给定。

2.3 普遍旋流 II

仍作如(11)式的分解，并以(9)，(10)式代替(12a，b)式，即得

$$u=\nabla\phi+\eta\nabla S+\beta_i\nabla\alpha_i \qquad i=1\sim 3 \tag{15a}$$

$$\frac{D\alpha_i}{Dt}=0\ , \qquad \frac{D\beta_i}{Dt}=0 \tag{15b}$$

这里 $\frac{DS}{Dt}=g$ 给定。

2.4 普遍旋流 III

当定熵条件以 $S=S(\alpha_i)$ 的形式表达时，应将(14a，b)，(15a，b)式改写如下。因为

$$\nabla S=\frac{\partial S}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}e_j=\frac{\partial S}{\partial\alpha_i}\nabla\alpha_i$$

$$\eta\nabla S+\beta_i\nabla\alpha_i=(\eta\partial S/\partial\alpha_i+\beta_i)\nabla\alpha_i=\beta_i'\nabla\alpha_i \tag{16a}$$

故 $$\frac{D\beta_i'}{Dt}=\frac{D}{Dt}\left(\eta\frac{\partial S}{\partial\alpha_i}\right)+\underbrace{\frac{D\beta_i}{Dt}}_{=0}=\frac{D\eta}{Dt}\cdot\frac{\partial S}{\partial\alpha_i}+\eta\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha_i}\right)=\frac{D\eta}{Dt}\cdot\frac{\partial S}{\partial\alpha_i}+\eta\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\frac{DS}{Dt}\right)$$

对定熵流而言 $(DS/Dt=0)$

$$\frac{D\beta_i'}{Dt}=\frac{D\eta}{Dt}\cdot\frac{\partial S}{\partial\alpha_i} \tag{16b}$$

于是，(15a，b)式可改写为

$$u=\nabla\phi+\beta_i'\nabla\alpha_i \qquad (i=1\sim 3)$$

$$\frac{D\beta_i'}{Dt}=\frac{D\eta}{Dt}\frac{\partial S}{\partial\alpha_i}, \qquad \frac{D\alpha_i}{Dt}=0 \tag{17}$$

这里给定 $S=S(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

同理，对(14a，b)式，也可以用(17)式来表达，只是应取 $\beta_2=\beta_3=0$，$\sigma=\beta_1$，$\chi=\alpha_1$。

3 关于林氏约束和建议一种新型 Clebsch 变换

从以上的系统性的推导可看到，Clebsch 变换及其各种推广形式都有确定的适用范围，不可误用。例如，如果采用了(5)与(8)式或(9)与(10)式的变换，则只能描述正压（均熵）流动[9~11]。又如在文献[10]中，除用了(5)式外，还取 $D\alpha/Dt=0$ 和 $\partial\alpha/\partial t=0$，但这就必然导致 $\nabla\alpha=0$，即 $\alpha=\text{const}$，于是就只能用于势流了。在文献[9~11]中所导出的伯努利方程都是沿流线（并非迹线！）积分而得，其中积分常数（用 R 或 B 表示）对不同的流线应取不同的数值，而该三文中却都误将积分常数当作全场不变。此外在文献[9]的泛函中含有限制变分量 $\overset{0}{R}$ 和 $\overset{0}{S}$，因而其变分原理也只是近似的，而非真正的变分原理。

为了描述普遍的非均熵有旋流动，除采用 Monge 分解式(5)式或(7)式外，还可有两类方法：

(1) 引用一个林氏约束：即采用(14a，b)式（此时要给定 DS/Dt 的变化律）。但是文献[4~7]指出，这只是流场的一种局部性描述法，因为当流场中涡丝出现打结或缠绕时，诸 Clebsch 变量 ϕ，η，σ，χ 将出现多值性，即将有奇性。

(2) 引用三个林氏约束：这是整体性描述，又可分两种情况：

(i) 当以 $DS/Dt=g$ 形式给定熵变律时：应采用(15a，b)式。

(ii) 当以 $S=S(\alpha_i)$ 形式给定熵分布律时：应采用(17)式。

综上所述，可知：如果预知所考虑的流场中确无涡丝的打结或缠绕发生，则当然以只引用一个林氏约束(即用(14a，b)式)为最简便；否则，就应当采用整体性描述式(15a，b)或(17)式，即必须采用三个林氏约束。

那末，是否还有其它更简便的整体描述法呢？林氏约束是否可以少于三个呢？在深入分析了文献[4~6]以后，本文建议一个只引用两个林氏约束的新方法如下。

在(15a，b)式中，我们改取 $i=1$，2，并取 $\beta_1=u_1^0\left[=u_1(\alpha_i,0)\right]$[5]，$\beta_2=\alpha_3$，得

$$u=\nabla\phi+\eta\nabla S+u_1^0\nabla\alpha_1+\alpha_3\nabla\alpha_2 \tag{18a}$$

$$\frac{D\alpha_j}{Dt}=0\quad(j=1\sim3),\qquad\frac{Du_1^0}{Dt}=0 \tag{18b}$$

这里 $\dfrac{DS}{Dt}=g$ 给定。

应当指出，虽然在形式上，(18a)式中只包括了含 $\nabla\alpha_1$ 与 $\nabla\alpha_2$ 的两项，而取消了含 $\nabla\alpha_3$ 的项．但在(18b)式中却仍然包括了三个林氏约束。这意味着在变分原理中，虽然只需引入两个林氏约束 $D\alpha_i/Dt=0\ \ (i=1,2)$，但从变分原理中却以其欧拉方程的形式自然地导出了另一林氏约束 $D\alpha_3/Dt=0$。可见，在此方法中，变分原理中的未知变量可比(15a，b)式减少两个，而且原 β_1 并无明确物理含义，而代替了 β_1 的 u_1^0 则具有鲜明的物理意义——沿 x_1 坐标的流速分量 u_1 的初值分布，因而更容易给定和处理。显然，也可取 $\beta_1=u_2^0$(或 u_3^0)。

可以证明，采用(18a，b)式后，就可以消除文[4，7]所指出的(5)和(8)或(14a，b)式的局限性，即对正压流中涡线发生打结或缠绕现象时螺旋度 (helicity) H 恒为零的缺陷。事实上，此时螺旋度可计算如下

$$H=\int_{(V)}\zeta\cdot u\mathrm{d}V=-\int_{(V)}\left(\nabla\phi-\sum_{1}^{2}\beta_i\nabla\alpha_i\right)\cdot\sum_{1}^{2}(\nabla\beta_i\times\nabla\alpha_i)\mathrm{d}V=\int_{(V)}\{\nabla\phi\cdot\zeta+M\}\mathrm{d}V \quad (18c)$$

其中

$$M=\beta_1\nabla\alpha_1\cdot(\nabla\beta_2\times\nabla\alpha_2)+\beta_2\nabla\alpha_2\cdot(\nabla\beta_1\times\nabla\alpha_1)=(\beta_1\nabla\beta_2-\beta_2\nabla\beta_1)\cdot(\nabla\alpha_2\times\nabla\alpha_1)$$

即

$$M=(u_1^0\nabla\alpha_3-\alpha_3\nabla u_1^0)\cdot(\nabla\alpha_2\times\nabla\alpha_1)$$

显然，$\nabla\alpha_3$ 或（和）∇u_1^0 不会同 $\nabla\alpha_2$ 和 $\nabla\alpha_1$ 共面，因而 $M=0$ 的充要条件只能是

$$u_1^0\nabla\alpha_3=\alpha_3\nabla u_1^0$$

即

$$\frac{\nabla\alpha_3}{\alpha_3}=\frac{\nabla u_1^0}{u_1^0},\qquad \nabla\ln\left(\alpha_3/u_1^0\right)=0$$

故 $\alpha_3=ku_1^0$ （k 是任一常数）

这个条件显然是不可能在 V 内处满足的，因此 M 不可能为 0。

改写（18c）式

$$H=\int_{(V)}\{\nabla\cdot(\phi\,\zeta)+M\}\mathrm{d}V=\oint_{(\partial V)}\varphi\,\zeta\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}+\int_{(V)}M\mathrm{d}V \quad (18d)$$

由此不难看出，若将所考察的流体体积 V 的封闭边界面 ∂V 选取得使其上的 $\zeta\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 处处为零，亦即使微元面 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 处处选得同涡线相切，则对于 V 是包含一个或多个环形涡线的情况，显然上式沿封闭边界面 ∂V 的积分必等于零，但由于 $M\neq0$，故一般说，螺旋度 H 也不等于零！这样，我们建议的新型 Clebsch 变换(18a，b)式能保证其整体描述性，即可避免 ϕ、α_i 和 u_1^0 的多值性，因而具有较高的实用价值。

4 以 Clebsch 变量表示的流体力学变分原理

理想可压缩流体非定常有旋流动的基本方程组为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho u)=0 \quad (19a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u=\frac{-1}{\rho}\nabla p \quad (19b)$$

$$\frac{DS}{Dt}=0 \quad (19c)$$

现将(19b)式用(18a)式及

$$\frac{u^2}{2}-(E+\Pi)-p/\rho-\frac{D\phi}{Dt}-u_1^0\frac{D\alpha_1}{Dt}-\alpha_3\frac{D\alpha_2}{Dt}=0 \quad (19d)$$

代替，其中 E 和 Π 分别表示内能和体力势 $(\nabla\Pi=-\rho F)$。

从(19a，b，c，d)和(18a)式出发，应用文献[11]的系统性途径，可反推出下列变分原理：

变分原理 I

$\delta J_I = 0$，其中

$$J_I = \int\limits_{(t)}\int\limits_{(V)}\left\{\frac{\rho}{2}u^2 - \rho[E(\rho,S)+\Pi] + \phi\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho u)\right] - \rho\eta\frac{DS}{Dt} - \rho u_1^0\frac{D\alpha_1}{Dt} - \rho\alpha_3\frac{D\alpha_2}{Dt}\right\}\mathrm{d}V\cdot\mathrm{d}t \tag{20}$$

应用类似方法，还可推导出以 $S=S(\alpha_i)$ 形式给定定熵条件时的另一变分原理：

变分原理 II

$\delta J_{II} = 0$，其中

$$J_{II} = \int\limits_{(t)}\int\limits_{(v)}\left\{\frac{\rho}{2}u^2 - \rho\left[E(\rho,S(\alpha_i)) + \phi\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho u)\right] - \rho\cdot\beta_i{}'\frac{D\alpha_i}{Dt}\right\}\mathrm{d}V\cdot\mathrm{d}t \quad (i=1\sim3) \tag{21}$$

上式中的含 ϕ 项也可通过分部积分，改写为 $(-\rho D\phi/Dt)$。

5 结束语

本文对 Monge 分解、Clebsch 变换及其各种推广形式作了系统、全面的推导，进而分析了它们同林氏约束的联系，并探讨了削减林氏约束个数的可能性，为此建议了一种较简单的 Clebsch 变换。在此基础上，并给出了相应的变分原理，以供有限元分析实际应用。

参 考 文 献

1 Serrin J. Mathematical principles of classical fluid mechanics. In: Fluegge S ed. Handbuch der Physik, Vol. VIII-1. Berlin: Springer, 1959

2 Seliger RL, Whitham GB Variational principles in continuum mechanics. *Proc Roy Soc London*, 1968, A305: 1~25

3 Finlayson BA.. The MWR and Variational Principles. New York: AP, 1972

4 Bretherton FP. A note on Hamilton's principle for perfect fluids. *J Fluid Mech*, 1970, 44 (1): 19~31

5 Mobbs SD. Variational principles for perfect and dissipative fluid flows. *Proc Roy Soc London*, 1982, A381: 457~468

6 Wagner HJ. On generalized Weber and Clebsch transformations. *Arch Mech*, 1998, 50(3): 645~655

7 Moffatt HK. The degree of knottedness of tangled vortex lines. *J Fluid Mech*, 1969, 35: 117~129

8 Akay HU and Ecer A. FE formulation of rotational transonic flow problems. In: (eds. Gallagher RH, et al.) Finite Elements in Fluids, Vol 5. John-Wiley, 1984. 173~196

9 何吉欢. 简论林家翘约束. 现代力学与科技进步文集，中国力学学会，北京，1977，603~604

10 He JH. A generalized variational principle for 3-D unsteady transonic rotational flow in rotor using Clebsch variables. *Int J Turbo & Jet Engines*, 1997, 14: 17~21

11 He JH. Generalized Bernoulli equation for rotational flow in rotor. *Int J Turbo & Jet Engines*, 1999, 16: 17~18

12 Liu GL. Derivation and transformation of variational principles with emphasis on inverse and hybrid problems in fluid mechanics: A systematic approach. *Acta Mechanica*, 2000, 140: 73~89

应用格子 Boltzmann 方法(LBM)模拟微机电系统(MEMS)中的流动

陈十一* Gary D Doolen** 聂小波*

*(Johns Hopkins 大学机械工程系，Baltimore, MD 21218 USA)
**(Los Alamos 国家实验室非线性研究中心理论部，Los Alamos, NM 87545 USA)

摘要　在微机电系统中（MEMS），流体分子的平均自由程可以与装置的典型几何尺度有相同的量级，这时，连续介质的假设不再成立。这类流动的一个重要特征是在固壁上出现滑移，从而极大地影响系统的传质和传热。克努曾数 $Kn = l/L$ 是常常用来鉴别平均自由程对流动影响的无量纲数，其中 l 是平均自由程，L 是流动区域的典型尺度。

在过去十年间，Boltzmann 方法（LBM）（Chen，Doolen 1998）[1]已经成为模拟流体运动的另一种途径的数值方法。Boltzmann 方程解的连续介质极限，即小 Kn 数极限趋于 NS 方程的解。此外，由于 LBM 本质上是动理论的，所以，它也可以模拟某些高 Kn 数的流体流动。

我们研究的数值例子是微槽道流（Arkilic 1997）[2]。它是介于距离为 H 的两块平行平板间的流动，流体由进出口处的压力差 $P_i - P_e$ 所驱动。反弹边界条件用来确定在上、下板处的粒子分布函数。微槽道流出口处的滑移速度 V_s 定义为

$$u(Y) = Y - Y^2 + V_s$$

其中 $u(Y)$ 是出口处流向的速度分量，$Y = y/H$ 用最小二乘法拟合可以得到 u_0 和 V_s。

在图 1，我们给出了滑移速度和归一化的质量通量 $M_f = M/M_0$ 与 Kn 数的关系。滑移速度为 0 时的质量通量 $M_0 = H^3 P_e(\eta - 1)/24\nu L$ 是归一化因子。在图 2 中，我们给出了 $Kn = 0.165$ 时用我们的理论、实验（Arkilic 1997）[2]、工程模型（Beskok 1996）[3]和 LBM 方法得到的质量通量与压力比的关系。我们的理论，LBM 方法与实验结果符合的很好。

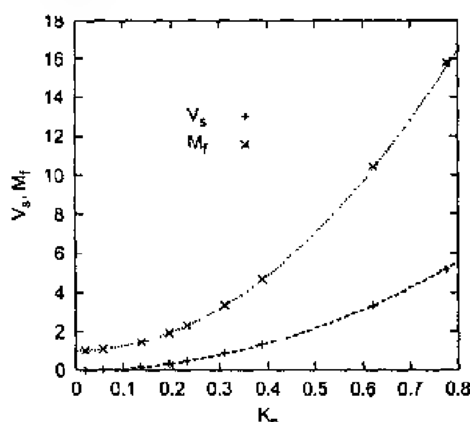


图 1　微槽道流出口处的滑移速度和归一化质量通量与 Kn 数的关系。$P_i/P_e = 2$，+和×是 LBM 数值结果，虚线和点线是 LB 理论结果

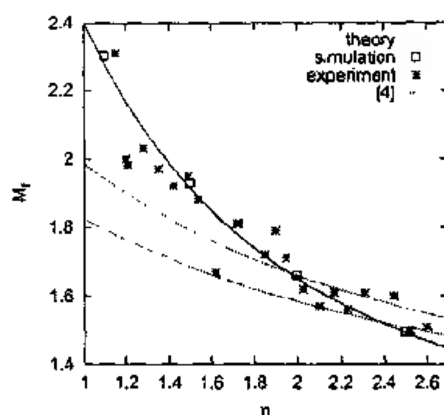


图 2　$Kn = 0.165$ 时，归一化质量通量与压力比的关系。理论是指 LB 理论结果

本文中，我们已经用 LBM 模拟了微槽道流动，其滑移速度、质量通量是压降的函数，由于 LBM 是一种基于粒子分布函数的动理论方法，可以用于研究它们同 *Kn* 的依赖关系。

关键词 微机电系统(MEMS)，微槽道流，Boltzmann 方法(LBM)，克努曾数(Knudsen)

参 考 文 献

1 Chen Shiyi，Doolen Gary D. Lattice Boltzmann method for fluid flows. *Ann Rev Fluid Mech*，1998. 329

2 Arkilic EB，Schmidt MA，Breuer KS. Gaseous slip flow in long micro-channels. *J MEMS*，1997. 167

3 Beskok A，Karniadakis GE，Trimmer W. Rarefaction and compressibility effects in gas micro-flows. Journal of Fluids Engineering，1996. 448

4 Ho CM，Tai YC. Micro-electro-mechanical-systems（MEMS）and fluid flows. *Ann Rev Fluid Mech*，1998. 579. 译文见：Ho CM，Tai YC. 微电子机械系统和流体流动. 力学进展，1998，28(2)：250~272

世纪之交谈流体力学实验

魏庆鼎　毕卫涛

(北京大学湍流研究国家重点实验室，北京 100871)

摘要　回顾了20世纪后期重要的、具有普遍意义的流体力学非定常实验技术的进展，如热线技术、激光技术、流动显示技术、小波技术等讨论了流体力学实验在进入21世纪时面临的挑战。

关键词　流体力学实验，实验技术，实验研究

引　言

刚刚过去的20世纪是人类取得科学技术飞跃进步的一个世纪，作为20世纪最伟大的科技成就之一的航空宇宙飞行技术是人类创造的最辉煌的奇迹。在这个世纪里，人们从最初只能飞200呎（1903年美国Right兄弟创造的人类依靠动力飞行的最早记录）到可以做环球飞行、登月飞行，乃至在太空中自由遨游。航空航天技术成就无疑是一项综合技术成就，而在其中起关键作用的则是空气动力学或者广泛一点说是流体力学的巨大进步。作为流体力学研究手段、研究途径之一的流体力学实验的贡献是尽人皆知的，也许可以说，在各个学科里，流体力学实验在设备规模和采用技术的先进性与复杂性方面，在人力、物力、财力的消耗方面都是名列前茅的。世界驰名的美国NASA、法国的ONERA、俄国的TsAGi、中国的CARDC都是典型的空气动力实验与研究中心，它们都拥有从低速到高超速的庞大的风洞群和相关测试设施，都拥有先进的计算机群，都拥有巨大的科学技术队伍。每一架新型的飞机、每一种新型火箭和飞行器，都要经过成百上千小时的风洞实验才能定型。自然，在其它传统的流体力学研究领域，如水力学、海洋学、气象学，大气物理以及化工、冶金、石油、汽车、船舶工业等方面，以及新兴的学科领域，如环境流体力学、生物流体力学，微重力流体力学等方面，流体力学实验研究也都起着极其重要作用。

世纪之交，要来议论一下流体力学实验技术与实验研究的近期进展与展望，显然是一个过于广袤的题目，所以本文只涉及流体力学实验技术中最重要和具有广泛应用范围的几项用于非定常流动测量新技术，那就是热线技术、激光技术、PIV 技术、小波技术。同时，议论一下新世纪里流体力学实验面临的挑战。

1　20世纪非定常流动实验技术的重要进展

1.1 热线技术

热线技术是20世纪流体力学测量中最成功的技术之一，它不仅可以测量流速，而且可以测量温度。在不可压理想流体的情况下，还可以通过测量流速而得到压强。更重要的是，它有极好的频响特性。通常使用的恒温型热线风速仪的频响可达到100kHz以上；而微硅型热线则可达到1MHz以上，这是任何其它流速测量装置不能与之比拟的。此外，它具有信噪比高（通常S/N>80dB）、流速测量范围广（从cm/s量级到高M数流动）、装置相对便宜和便于操作等优点。所以，从它在上世纪初建立原理[1]至今，在流动特别是湍流测量上发挥了极重要的作用。依靠电子学的发展，热线技术在上世纪50至70年代在理论上和技术上都趋于成熟。一些著名的经典热线理论与湍流测量结果也都是在那个时期完成的，如Kovaznay[2]，Klebanoff[3]，Freymuch[4-6]等的工作都是代表。20世纪80年代以后，热线技术在理论上和基本技术上已经没有什么突破性的进展，值得一提的是庄永基等的工作[7]，他们在仔细分析了热线主回路自激振荡产生的原因后，提出了一种予移相电路，即在探针臂和对应臂上分别加上予移相电感，以使电桥能够达到交流平衡。这一措施解决了热线主回路振荡的问题。在使用热线风速计时，不需要进行频率响应的调节。目前这一技术已用于美国TSI公司生产的

IFA300 型恒温热线风速仪。

近二三十年，热线技术的发展的主要特点在于活用热线技术进行精细的测量。这方面的例子是非常多的，主要有：

(1) V 型探头近壁测量：如果我们把各类单丝探头（包括垂直式、倾斜式、近壁式等）、X-型探头作为常规的探头类型的话，那么 V 型探头就属于一种异型探头，它的 3μm 或 5μm 直径的热丝被折成 V 型（图 1），这种探头具有体积小，支杆干扰小的特点，宜于做近壁测量，Nagano 等 对这一技术和有关热线近壁测量问题做了详细的介绍[8]。

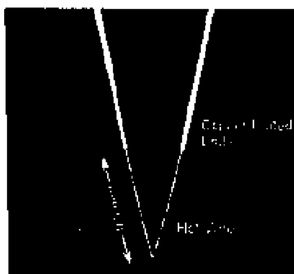


图 1　V 形热线探头

(2) 多丝探头涡量测量：应用三丝、四丝乃至六丝、九丝，甚至于二十丝的热线探头进行涡量测量，Wallace and Foss[9]对这方面的工作做了全面的介绍。国内魏中磊等研制了六线探头并进行了多种湍流涡量测量[10]（图 2~4）。

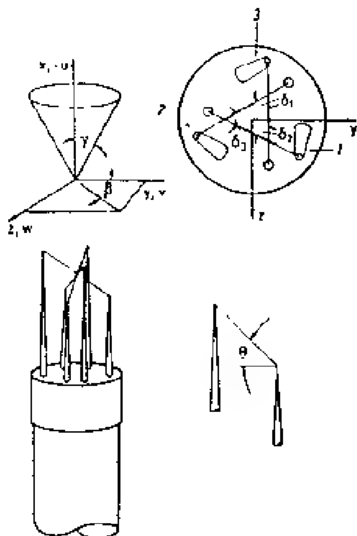


图 2　三丝形热线探头

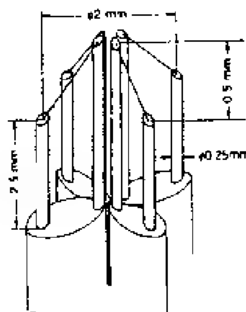


图 3　四丝形热线探头



图 4　九丝形热线探头

(3) 微型探头进行湍流细微测量：要测量湍流能量耗散

$$\varepsilon = \nu(u_{i,j} + u_{j,i})u_{i,j}$$

则需要比 Kolmogorov 微尺度 $(\nu/\varepsilon)^{1/2}$ 小许多的探头来测量，而通常的热线探头是与 Kolmogorov 微尺度同量阶的。近年来研制的 MEMS 热线探头[11]则将探头尺寸做到了数μm 量级（图 5），这就给湍流测量带来了新的有力的工具。

(4) 热敏探头浓度测量：应用不同气体热传导系数上的差异，可以对混合气体的组分进行热线测量。具体的做法是先进行混合气体在各种浓度比下的热线标定，然后就可以利用热线测量各组分浓度的变化[12]。

(5) 热线探头群湍流结构测量：应用多个探头分布在流场中，用条件采样法等测量控制方法可以得到湍流场的空间结构[13]（图 6）。

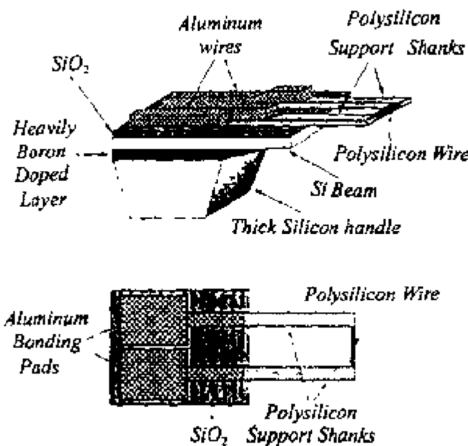


图 5 MEMS 热线探

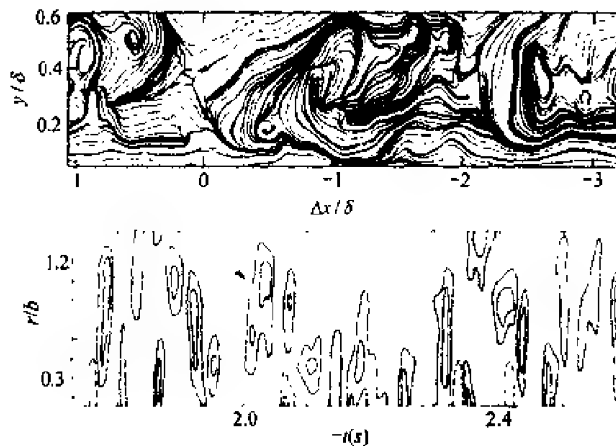


图 6 多个热线探头测得的湍流边界层模拟流线（Antonia et al. 1990）

(6) 飞行热线测量流动结构：热线用一定速度和角速度相对于流动而运动，可以获得流动的空间结构[14]。

(7) 冷-热双丝探头：同时测量温度场与速度场，冷线探头连接恒流式热线风速仪，热线探头用于恒温式热线风速仪，可以同时测量温度场与速度场[15]。

(8) 特别探头用于超音速流动测量：热线探头经过精心加工，可以用于超音速乃至高超音速测量，探头支杆形状不仅要做成楔形，而且探针头部和热线松度都要做适宜处理，以防止激波和噪声产生的影响[16]。

热线装置及其探头制作，在先进国家的不少大学和高水平研究机构里，主要不是靠购买而是靠自己研制，这是因为市贩的不仅价格昂贵，而且并不能满足各种特殊实验的需要。这种做法对于象我国这样的发展中国家尤为重要。目前的情况是，国内能够独立研制热线装置和制作各类探头的单位不多，而且呈不断减少的趋势，这对我们的实验研究极为不利。希望这种状况能随着我国实验流体力学队伍的不断发展和年轻化能够有所改变。

1.2 激光测速技术

尽管热线技术有上述的许多优点和测量上的多种多样的活用方式，但它有三个重要的缺点：一是热线探头-支杆-导线干扰流场；二是热丝极易被固体颗粒碰坏，所以不能用于固-液（气）两相流；三是不能在高温和燃烧的环境里工作。而这些缺点正可以由激光测速系统来弥补。激光用于测速的历史很短，它的原理是 1964 年由 Yeh 和 Cummings[17]阐明，是利用粒

了散射光的多普勒效应，由多普勒频移和粒子速度的关系来测量流速的，称为激光多普勒流速仪（Laser Doppler Anemometry，LDA）。1970年才有正式产品上市。激光测速除有频响较高的优点外，还具有非接触测量的优点，从而不会干扰流场，并特别适用于在高温、燃烧与多相流等环境中使用，在 LDV 基础上发展起来的相位多普勒粒子分析仪(Phase Doppler Anemometry，PDA)可以测量粒子的速度和粒径。此外，激光测速计是一种绝对速度计，它不需要校准，而且可以确定流速方向。从而，LDA 和 PDA 在航空航天、冶金、能源、化工、交通等诸多工业领域的研究中发挥了重要作用（图 7 为一应用例）。

1.3 粒子图像测量速（PIV）技术

粒子图像测速(Particle Image Velocimetry)技术是伴随着激光技术、电子技术与计算机技术而新生的一种空间定量流动显示技术。它的原理是利用测量悬浮在流体中的粒子(群)在短时间间隔上的移动来测量流速的。近十多年，这项技术发展极快，给流速测量打开了新的局面，这项技术的最大优点是能够给出一个平面乃至空间大量点上的瞬时速度矢量的两个或三个速度分量，从而弥补了热线与激光测速作为点测量技术的不足。PIV 系统作为市贩产品已有十年多一点的历史，最新的产品在技术上已经达到了可以一次得到一个片光平面上 25 000 个流速矢量，而计算速度可达每秒 4000 流速矢量[18](图 8)。



图 7 激光测速



图 8 PIV 测速

PIV 发展方向是提高时间分辨率，这将取决于激光光源和摄象系统性能的进一步提高，如果能够在保持全帧情况下达到 10K 帧/s 以上，那么它就会成为最有力流速测量工具，对于研究湍流和复杂流动会做出划时代的贡献，而这点在新世纪里是不太遥远的期盼。

1.4 小波分析方法

在实验数据处理方面，小波分析可以说是近二十来年唯一引起大量研究者兴趣并不断被应用于流体力学实验研究的新方法。从本质上来说，小波分析是一种比较滤波法，任何反映流动参数变化的数据（波形）都可以被变换成时间和尺度的一个二维曲面。与富立叶变换相比，小波变换能给出更多的信息[19~23]。以湍流结构的研究为例，小波变换提供了湍流信号的一种分解方法，使得人们方便地提取湍流中感兴趣的流动结构，如相干结构、涡结构、最间歇结构等[24~28]。在国内，姜楠等[23]提出了用小波变换辨识壁湍流猝发事件的能量最大法则。该法则认为湍流动能

$$E(a)=\frac{2}{C_{\psi}}\int\left|W_{\psi,f}(a,b)\right|^{2}\mathrm{d}b$$

取极大值的尺度a代表了猝发事件发生的时间尺度。而通过小波反演变换，可以得到猝发事件

的波形。国际上 Li 等[26] 运用二维正交小波变换对 PIV 测量的圆射流横截面内的速度场和涡量场进行了分析，提取了不同尺度的湍流脉动量，清晰地显示了湍流的多尺度运动状态(图 9)。

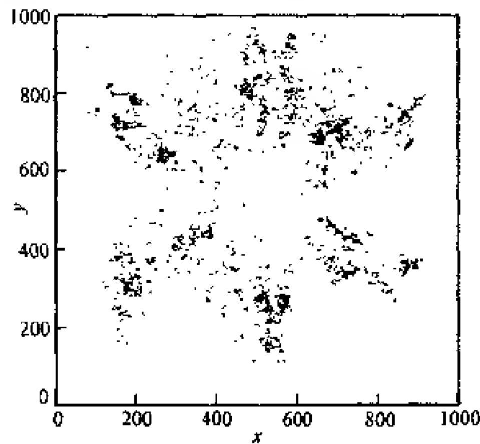
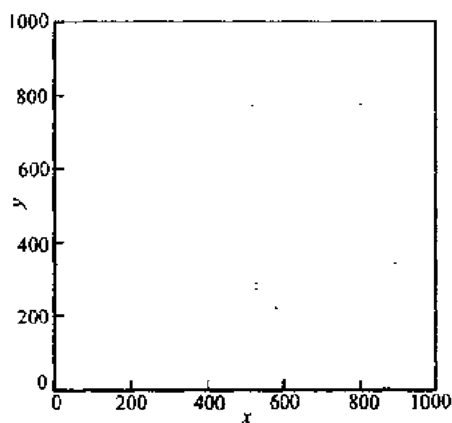
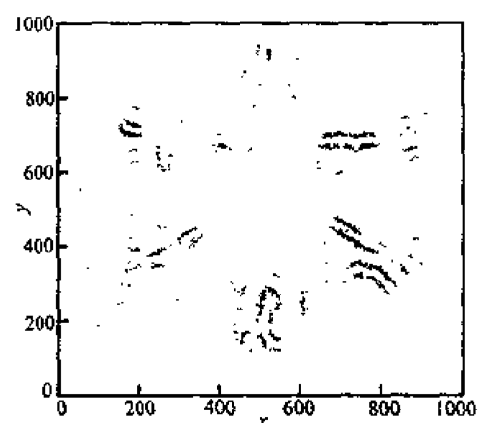


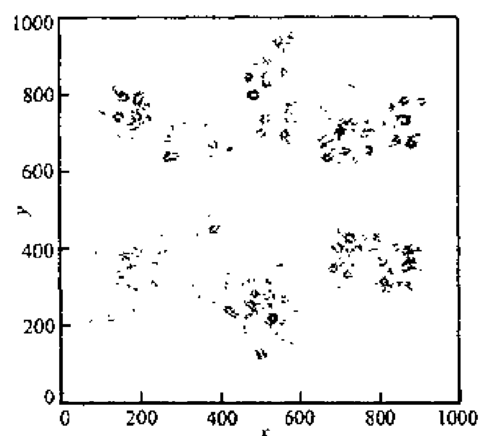
图 9a　PIV 测得的六角形射流场（横断面）



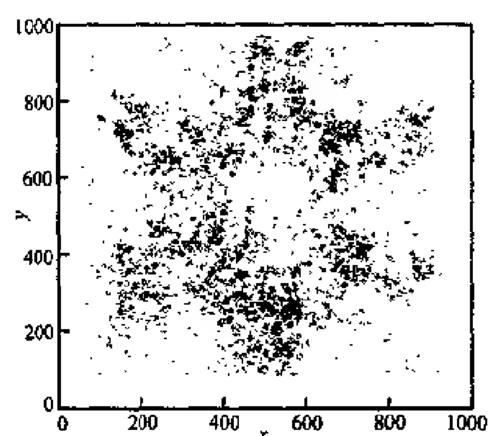
(a) d = 15.36mm



(b) d = 7.68mm



(c) d = 3.84mm

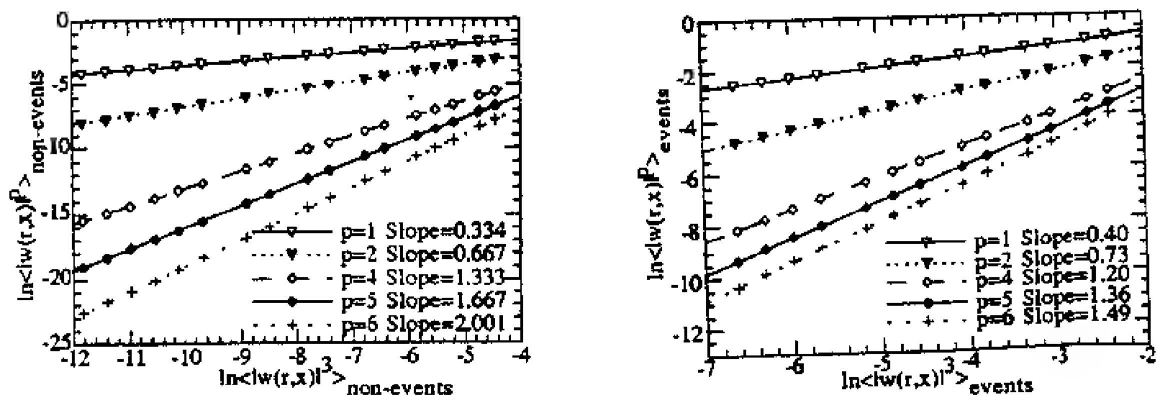


(d) d = 1.92mm

图 9b　小波方法分析 PIV 测量得到的射流场流动结构

近年来，关于湍流间歇性质和标度规律的研究引人注目，特别是对于湍流中具有最强间歇性的涡丝结构的发现和认识，大大地加深了人们对湍流的理解。 正交小波变换给出了湍

流信号的一个正交分解，由此可以轻易地分离具有不同间歇强度的流动结构。图 10[25]画的是以小波系数定义的结构函数所具有的扩展自相似性。图 10(a)是分离了强间歇结构后湍流信号的计算结果，其标度指数符合 K41 模型；图 10(b)是分离出的强间歇结构的计算结果，标度指数大大偏离 K41 的预测，可见湍流的标度性质和分形特征由强间歇结构控制。



(a) 去掉强间歇结构后的湍流标度指数　　(b) 湍流中强间歇结构的标度指数

图 10　小波方法用于湍流标度律研究

2　流体力学实验在新世纪之初面临的挑战

流体力学作为 20 世纪前期和中期红极一时的带头学科，曾帮助人类把神话般的幻想（例如敦煌壁画上的飞天、格林童话里的飞毯）变成了现实。而在上世纪后期和新世纪到来之时，流体力学的研究正在直面复杂性的难题。这是因为无论客观实际的要求，还是学科自身理论体系的发展都面临解决诸如湍流和复杂流动等的具有非线性、多尺度和非定常特征的问题。从流体力学实验技术的角度来谈，现有的非定常测试技术还满足不了人们看透这种具有复杂性流动本质的要求，具体地说，以下几个方面的测试技术亟待发展。

(1) 微观的测试技术。无论是湍流的微尺度（小于 Kolmogorov 微尺度）测量也好，微机电系统（MEMS）的测量也好，当前都缺乏适当的测量手段，因为现有的测试技术的分辨率只是毫米量级。

(2) 非定常空间流场的测试技术。PIV 是上世纪后期带给人们测量非定常空间流场的最有希望的技术，但是现在只较好地解决到了测量瞬时平均流场的程度。

(3) 透视流动测量技术。无论对于生物体内的流动也好，地下流动也好，工业装置（如炼钢炉、化学反应罐、输油管等）的内流也好，目前没有透视测量技术，而这种技术上、实用上（例如在人体医疗诊断上，工业流动监控上）都非常重要。

(4) 高速可视化实验数据处理技术。目前的富氏变换方法、小波方法都是一种统计的综合分析的变换方法，人们需要一种高速的实时可视化实验数据处理技术，它能象显示动态数值模拟结果那样高速分析显示定量测量结果。

流体力学实验研究的进展在很大程度上仰仗着电子技术、光学技术、计算机技术、计算方法和数学理论的成就。21 世纪肯定是一个人类科学技术迅猛发展的世纪，在新世纪里，力学、特别是流体力学实验研究也一定会放出耀眼的光芒。

参 考 文 献

1 King LV. On the convection of heat from small cylinders in a stream of fluid: Determination of the convection constants of small platinum wires, with applications to hot-wire anemometry. *Proc R Soc London*, 1914, 90: 563~570

2 Kovasznay LSG. Heat loss of wires in supersonic flow. *Bumbiebee Ser Rep*, 1950. 127

3 Klebanoff PS. Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient. NACA TN3178, 1954

4 Freymuth P. Frequency response and electronic testing for constant-temperature hot-wire anemometers. *J Phys E*, 1977, 10: 705~710

5 Freymuth P. Further investigation of the non-linear theory for constant-temperature hot-wire anemometers. *J Phys E*, 1977, 10: 710~713

6 Freymuth P, Fingersop IM. Electronic testing of frequency response for thermal anemometers. *TSI Q*, 1977, 3: 5~12

7 庄永基，盛森芝. 电桥予移相型恒温热线（膜）流速计的动态响应方程. 气动实验与测量控制，1992，1: 10~16

8 Nagano Y. Recent adovances in near-wall turbulence measurement. In: Proceeding of Third China-Japan Workshop on Turbulent Flows, 1998. 11~42

9 Wallace JM, Foss JF. The measurement of vorticity in turbulent flows. *Anna Rev Fluid Mech*, 1995, 27: 495~514

10 魏中磊. 热线风速仪和其探针的发展及其在湍流实验研究上的贡献. 周哲玮主编. 见：湍流理论新进展及其应用，第六届全国湍流与流动稳定性学术会议暨第二届全国工程紊流与流动模拟学术论文集. 上海：上海大学出版社，2000

11 Jiang F, Tai YC, Ho CM, Li WJ. Tech Digest, Solid-state Sensor and Actuator Workshop. Hilton Head Island, SC, 1994. 264~267

12 西岡通男. 热线流速计的基础. 流体实验手册（日文），朝仓书店，1997. 74~91

13 Antonia RA. Effects of reynolds number on the topology of the organized motion in a turbulent boundary layer. *J Fluid Mech*, 1990, 213: 267~286

14 Cantucell BJ. An experimental study of entrainment and transport in the turbulent flow near wake of a circular cylinder. *J Fluid Mech*, 1989, 136: 321~374

15 Tsuji T, Nagano Y, Tagawa M. Frequency response and instantaneous temperature profile of cold-wire sensors for fluid temperature fluctuation measurement. *Exp In Fluids*, 1992, 13: 171~178

16 Smiths AJ, Hayakawa K, Musk KC. A technique for evaluation of three-dimensional behavior in turbulent boundary layer using computer augmented hydrogen bubble-wire flow visualization. *Exp In Fluids*, 1983, 1: 43~51

17 Yeh Y, Cummins HZ. Localized fluid flow measurement with an He-Ne laser spectrometer. *All Phys Lett*, 1964, 4: 176~178

18 盛森芝，徐月亭，袁辉靖. 日新月异的现代流动测量技术. 见：北京大学赛特流动测量研究中心编：技术及其在流动测量中应用，2000年11月

19 Arneodo, Bacry E, Muzy JF. The thermodynamics of fractals revisited with wavelets. *Physica A*, 1995, 213: 232~275

20 Arneodo, Audit B, et al. Thermodynamics of fractal signals based on wavelet analysis: application to fully developed turbulence data and DNA sequences. *Physica A*, 1998, 254: 24~45

21 Struzik R. Determining local singularity strengths and their spectra with the wavelet transform. *Fractals*, 2000, 8(2): 163~179

22 Farge. Wavelet transforms and their applications to turbulence. *Annu Rev Fluid Mech*. 1992, 24: 395

23 姜楠，王振东，舒伟. 子波分析辨识壁湍流猝发事件的能量最大法则. 力学学报，1997，20(2): 406~411

24 江健生，尚晓东，舒伟. 湍流信号的三相分解. 力学学报，1997，29(5): 519~524

25 Onorato M, Camussi R, Iuso G. Small scale intermittency and bursting in a turbulent channel flow. *Phys Rev E*, 2000, 61(2): 1447~1454

26 Li H, Hu H, Kobayashi T, Saga T, Taniguchi N. Extraction of multi-scale turbulent structure from PIV results based on wavelet vector multiresolution technique. In: 9th International Symposium on Flow Visualization, 2000

27 Camussi R, Guj G. Orthonormal wavelet decomposition of turbulent flows: intermittency and coherent structures. *J Fluid Mech*, 1997, 348: 177~199

脉动血流管壁切应力与血管重建 1)

柳光荣　徐　刚

（复旦大学生物力学实验室，上海 200433）

摘要　血管为了适应所处力学环境的变化将产生结构和功能的变化，血液流动作用于血管壁上的切应力在这种血管重建中起着重要的作用。目前直接测量活体血管壁切应力存在着许多技术上的困难。通过分析动脉中血液脉动流的特性，提出一种利用测量血管轴上的血流速度，计算血管壁切应力的方法，并讨论颈动脉切应力对脑血管力学特性的影响。结果为确定血管壁切应力，进而讨论血液脉动流切应力对血管重建的影响提供必要的手段。

关键词　切应力，血管重建，脉动流，高血压

引　言

为了将血液从心脏运送到全身各部位，动脉管必须具备适应所处力学环境并在力学环境改变时作出适应性变化的能力，使得其结构尽可能与功能相适应。血管的这种适应性反应实质上是组成动脉管壁的细胞和细胞外基质感受作用力并对其作出反应的结果。通常称这为在一定力学环境中的血管重建[1]。

研究表明[2, 3]，在引起血管重建的诸因素中，黏性血液流动作用于血管壁的切应力具有重要的作用。在血管壁中，动脉内皮细胞与血液接触，直接感受到作用在管壁的切应力，并将所感受的切应力信息传递到毗邻的细胞，进而释放和激活某些物质以影响细胞和细胞外基质，促使血管壁结构发生变化，以使其最终与所处力学环境相适应。因此，研究流体切应力对血管重建的影响已成为当前研究的热点[1, 4]。为此，人们需要定量确定血管壁切应力的方法和手段。但是，至今直接测量活体血管壁切应力仍存在许多技术上的困难，因为这不仅要求血管壁邻近速度剖面的检测具有相当高的空间分辨率，而且还必须是无损伤和实时连续测量。特别是在血液脉动流情况下，要求检测管壁切应力在心动周期内随时间的变化情况尤为困难。

本文通过分析动脉中血液脉动流的特性，提出一种通过测量管轴上的血流速度计算血管壁切应力的方法，给出血管壁切应力的分析表达式。所得结果为定量确定血管壁切应力，进而讨论血管壁切应力对血管重建的影响提供必要的手段。作为例子，文章最后对 50 岁年龄组正常人和高血压患者（病程≥15a）的颈动脉切应力进行计算和比较，发现高血压患者的颈动脉切应力的平均值明显比正常人的相应值低。所得结果与颈动脉切应力低易引起颈动脉粥样斑块形成的病理现象和实验事实[7]相一致。

1　血液流速表达式

心脏泵出的血液在动脉中产生周期性的脉动流，这种血液脉动流动是以弹性动脉管壁作为其边界的，血液的流动与血管壁的运动是耦合在一起并相互制约的。对于这样一类流-固耦合问题，当以 x 和 r 分别表示血管的轴向和径向坐标，u 和 v 分别表示血液流动的轴向和径向速度分量，ξ 和 ζ 分别表示动脉管壁径向和轴向位移，p 为压力，η 为血液黏度，ρ 和 ρ_w 分别表示血液和血管壁密度（二者近似相等），σ 为血管的泊松比（$\sigma=0.5$），t 为时间，

1)　国家自然科学基金（19732003）重点资助项目

H 是考虑血管壁结缔组织后的等效厚度，以及 $K=\rho_w H\omega_0^{\ 2}$，其中 ω_0 表示血管微元在结缔组织轴向弹性约束下的固有频率，这样，根据动脉中血液脉动流的特征，利用线性化 Navier-Stokes 方程[5]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\\
&\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}\right)\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}=0
\end{aligned}\tag{1}$$

和小变形薄壁管运动方程

$$\begin{aligned}
&\rho_w\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=\frac{p}{H}-\frac{Eh}{(1-\sigma^2)H}\left(\frac{\sigma}{R}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\xi}{R^2}\right)\\
&\rho_w\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}=-\frac{Eh}{(1-\sigma^2)H}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\sigma}{R}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)-\frac{\eta}{H}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=R}-\frac{K}{H}\zeta
\end{aligned}\tag{2}$$

并考虑到血管壁（$r=R$）上的耦合条件

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=u\big|_{r=R},\qquad \frac{\partial\xi}{\partial t}=v\big|_{r=R}\tag{3}$$

和血管轴（$r=0$）上流动的对称性

$$v\big|_{r=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=0}=0\tag{4}$$

求得轴向极限强约束条件下动脉中血液流动速度的谐波解为

$$u=\mathrm{Re}\left\{\frac{A}{\rho c^*}\left[1-\frac{\mathrm{J}_0(j^{3/2}\alpha y)}{\mathrm{J}_0(j^{3/2}\alpha)}\right]\exp\left[j\omega\left(t-\frac{x}{c^*}\right)\right]\right\}\tag{5}$$

$$v=\mathrm{Re}\left\{\frac{jA\omega R}{2\rho c^{*2}}\left[y-\frac{2\mathrm{J}_1(j^{3/2}\alpha y)}{j^{3/2}\alpha\,\mathrm{J}_0(j^{3/2}\alpha)}\right]\exp\left[j\omega\left(t-\frac{x}{c^*}\right)\right]\right\}\tag{6}$$

式中 $\alpha=R\sqrt{\omega/\upsilon}$ 为 Womersley 数，$j=\sqrt{-1}$，J_0，J_1 分别表示零阶和一阶 Bessel 函数，ω 为谐波圆频率，$y=r/R$，A 为复数，其模和幅角分别表示压力 p 在 $x=0$ 处的振幅和初相位。复波速 c^* 满足[6]

$$c^*=\sqrt{\frac{Eh(1-F_{10})}{2\rho R(1-\sigma^2)}}\tag{7}$$

式中

$$F_{10}=\frac{2\mathrm{J}_1(j^{3/2}\alpha)}{j^{3/2}\alpha\,\mathrm{J}_0(j^{3/2}\alpha)}\tag{8}$$

考虑到实际动脉管沿轴向几何特性和弹性特性的变化，脉搏波在传播过程中将产生反射，当同时计及正向传播波和负向反射波影响时，压力和压力梯度可分别表为

$$p = A_1 \exp\left[j\omega\left(t - \frac{x}{c^*}\right)\right] + A_2 \exp\left[j\omega\left(t + \frac{x}{c^*}\right)\right] \tag{9}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = D\exp(j\omega t) \tag{10}$$

相应的血流速度将表示为

$$u = \mathrm{Re}\left\{\frac{R^2}{j\eta\alpha^2}\left[1 - \frac{\mathrm{J}_0(j^{3/2}\alpha y)}{\mathrm{J}_0(j^{3/2}\alpha)}\right]\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)\right\} \tag{11}$$

$$v = \mathrm{Re}\left\{\frac{j\omega R}{2\rho c^{*2}}\left[y - \frac{2\mathrm{J}_1(j^{3/2}\alpha y)}{j^{3/2}\alpha\,\mathrm{J}_0(j^{3/2}\alpha)}\right]p\right\} \tag{12}$$

注意到在动脉中的血液流动，径向速度分量v远小于周向速度分量u，以及在管壁上$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{y=1} << \left.\frac{\partial u}{R\partial y}\right|_{y=1}$，通常二者比值仅有$10^{-3}$的量级，使得在血管壁切应力表达式

$$\tau_w = \eta\left(\frac{\partial u}{R\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{y=1} \tag{13}$$

中，可略去$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{y=1}$项，只需考虑$\left.\frac{\partial u}{R\partial y}\right|_{y=1}$项。因此，下面只对式（11）所表示的轴向速度分量$u$进行讨论。

由关系式（11）可得压力梯度第n次复谐波分量$-\partial p_n / \partial x$所对应的流速为

$$u_n = \mathrm{Re}\left\{\frac{R^2}{j\eta\alpha_n^2}\left[1 - \frac{\mathrm{J}_0(j^{3/2}\alpha_n y)}{\mathrm{J}_0(j^{3/2}\alpha_n)}\right]\left(-\frac{\partial p_n}{\partial x}\right)\right\} \tag{14}$$

式中

$$\alpha_n = R\sqrt{\frac{n\omega}{\upsilon}} \tag{15}$$

表示第n次谐波对应的Womersley数。

为了描述整个心动周期中的脉搏波波形，现将实际压力梯度$-\partial p / \partial x$表示为具有不同圆频率谐波分量的线性叠加，即

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}\left(-\frac{\partial p_n}{\partial x}\right) \tag{16}$$

由关系式（14），可得相应的瞬时流速表达式为

$$u = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}\left\{\frac{R^2}{j\eta\alpha_n^2}\left[1 - \frac{\mathrm{J}_0(j^{3/2}\alpha_n y)}{\mathrm{J}_0(j^{3/2}\alpha_n)}\right]\left(-\frac{\partial p_n}{\partial x}\right)\right\} \tag{17}$$

2 血管壁切应力表达式

利用流速表达式（17），不难得到相应的管壁切应力表达式，但这并不宜用来直接确定管壁切应力，因为要获得血管内某一点的压力梯度是不容易的，至今没有无创伤直接检测活体血管压力梯度的方法和手段。为此，下面介绍一种通过检测管轴$(y=0)$上流速$u|_{y=0}$确定

管壁切应力的方法。

首先，假设在某血管处已测得血管轴$(y=0)$上的流速波形，并将其 Fourier 分解为许多具有不同频率的谐波分量之和，即

$$u\big|_{y=0}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}\left(u_n\big|_{y=0}\right) \tag{18}$$

由于$u_n\big|_{y=0}$是已测得血管上流速的复谐波分量，因而是已知的。

另一方面，由流速表达式（17）知，血管中血液脉动流在管轴$(y=0)$上的流速表达式相应为

$$u\big|_{y=0}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}\left\{\frac{R^2}{j\eta\alpha_n^2}\left[1-\frac{1}{\mathrm{J}_0(j^{3/2}\alpha_n)}\right]\left(-\frac{\partial p_n}{\partial x}\right)\right\} \tag{19}$$

比较管轴$(y=0)$上的流速展开式（18）和流速表达式（19），可得

$$-\frac{\partial p_n}{\partial x}=\frac{j\eta\alpha_n^2 u_n\big|_{y=0}}{R^2\left[1-\dfrac{1}{\mathrm{J}_0(j^{3/2}\alpha_n)}\right]} \tag{20}$$

由于可求得在血管轴$(y=0)$上，压力梯度各谐波分量$-\partial p_n/\partial x$用所测血管轴上流速各谐波分量$u_n\big|_{y=0}$表出的关系式，从而得管轴上的压力梯度表达式为

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{y=0}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}\left\{\frac{j\eta\alpha_n^2 u_n\big|_{y=0}}{R^2\left[1-\dfrac{1}{\mathrm{J}_0(j^{3/2}\alpha_n)}\right]}\right\} \tag{21}$$

由于动脉中的血液脉动流，在一般情况下压力梯度$\partial p/\partial x$沿血管径向位置的变化非常微小，可认为$\partial p/\partial x$与血管径向位置无关，因而由表达式（21）表示的管轴$(y=0)$上的压力梯度$-\dfrac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{y=0}$可同时适用于管径不同位置处。因此，当将关系式（20）表示的适用于任何血管径向位置的压力梯度谐波分量表达式代入血管中血液脉动流的流速一般表达式（17），可得任意管径位置上的流速表达式为

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{J}_0(j^{3/2}\alpha_n)-\mathrm{J}_0(j^{3/2}\alpha_n y)}{\mathrm{J}_0(j^{3/2}\alpha_n)-N}u_n\big|_{y=0}\right\} \tag{22}$$

将上式代入关系式（13），可最后得血管壁$(y=1)$上的切应力表达式为

$$\tau_w=\frac{\eta}{2R}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}\left\{\frac{j\alpha_n^2 F_{10}\mathrm{J}_0(j^{3/2}\alpha_n)}{1-\mathrm{J}_0(j^{3/2}\alpha_n)}u_n\big|_{y=0}\right\} \tag{23}$$

特例，由关系式（22）和（23）可知当$\alpha\to 0$时流速和管壁切应力表达式分别退化为

$$u_s=u_0(1-y^2) \tag{24}$$

$$\tau_{w_s} = -\frac{2\eta}{R} u_0 \tag{25}$$

式中u_0为管轴中心处的定常流速。这显然与定常 Poisseuille 流的结果一致。

3 血管壁切应力的确定

利用上述分析结果可检测人体某血管（如颈动脉）壁的切应力，具体步骤如下：

(1) 利用超声多普勒血流测试仪测得颈动脉管轴处的血流速度波形$u|_{y=0}$以及血管平均半径R；

(2) 将所测的血管轴速度波形在一个心动周期T中分解$2m$个等时间间隔，每个时刻所应的速度值为U_i'，则可定出流速关系式（18）中的各次谐波分量分别为

$$u_0 = \frac{1}{2m}\sum_{i=0}^{2m-1} U_i' \quad , \quad u_n|_{y=0} = U_n \exp[j(n\omega t - \phi_n)] \tag{26}$$

其中

$$U_n = \sqrt{A_n^2 + C_n^2} \ , \quad \phi_n = \text{arctg}\frac{C_n}{A_n} \tag{27}$$

且

$$A_n = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{2m-1} U_i' \cos\frac{in\pi}{m} \quad , \quad C_n = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{2m-1} U_i' \sin\frac{in\pi}{m} \tag{28}$$

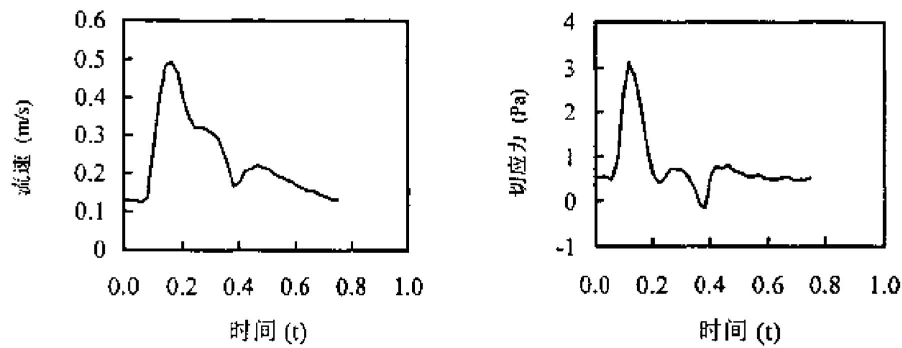
式中$n = 1, 2, \cdots$，表示谐波数。

(3) 测得血液黏度η，利用已测得的R和$\omega = 2\pi/T$，可算出基频对应的 Womersley 数$\alpha - R\sqrt{\omega\rho/\eta}$。再利用血管壁切应力关系式（23），可最后确定出血管壁上的切应力。

图 1 给出用超声多普勒所测得的一正常人颈动脉管轴($y = 0$)上的血液流动速度波形和利用上述步骤所算出的血管壁切应力波形。由所得切应力波形可以方便得出切应力在一个心动周期中的最大值τ_{max}，平均值τ_{mean}以及在舒张期的渐近值τ_d。作为例子，下面对 50 岁年龄组正常人（12 例）和高血压患者（12 例，病程≥15a）的颈动脉切应力进行计算，并从中定出相应的切应力指标τ_{max}，τ_{mean}和τ_d。正如表 1 中的结果所表明的，高血压患者的颈动脉切应力指标（τ_{max}，τ_{mean}和τ_d）的平均值均显著低于同龄的正常人，这恰反映了高血压患者常出现颈动脉粥样硬化的病理特征，以及与 Ku[7]等所给出的切应力低常意味着颈动脉内膜增厚和易形成粥样硬化斑块的实验事实相符。

表 1 50 岁年龄组正常人与高血压患者颈动脉有关数据(Mean±SD)的比较

受检者	年龄	R (mm)	η ($\times10^{-3}$ N·s/m^2)	α	τ_{max} ($\times10^{-1}$Pa)	τ_{mean} ($\times10^{-1}$Pa)	τ_d ($\times10^{-1}$Pa)
正常组(n=12)	52.7±2.2	3.82±0.21	3.33±0.27	5.73±0.53	33.36±4.08	7.57±1.60	4.77±1.45
高血压组(n=12)	54.7±2.7	4.53±0.33	3.87±0.53	6.29±0.86	26.70±9.46	5.34±1.52	3.01±1.13
差 异		P<0.001	P<0.005	NS	P<0.05	P<0.002	P<0.005



(a) 实测血管轴上的流速波形　　　　(b) 计算所得血管壁切应力波形

图 1　正常人颈动脉管轴处流速波形和计算所得的血管壁切应力波形

参 考 文 献

1 Langille BL, Donnell F. Reduction in arterial diameter produced by chronic decreases in blood flow are endothelium-dependent. *Science*, 1986, 231: 405

2 Langille BL. Remodeling of developing and mature arteries: endothelium, smooth muscle, and matrix. *Journal of Cardiovascular Pharmacology*, 1993, 21(suppl. 1): S11

3 Kamiya A, Togawa T. Adaptive regulation of wall shear stress to flow change in the canine carotid artery. *Am J Physiol*, (Heart Circ. Physiol. 8) 1980: H14

4 冯元桢. 生物力学—运动、流动、应力和生长, 第 1 版. 成都: 四川教育出版社, 1993

5 Womersley JR. The mathematical analysis of the arterial circulation in a state of oscillatory motion. Wright Air Development Center, Technical Report WADC-TR56-614

6 柳兆荣, 李惜惜. 血液动力学原理和方法, 第 1 版. 上海: 复旦大学出版社, 1997

7 Ku DN, Giddens DP, Zarins DK, et al. Pulsatile flow and atherosclerosis in the human carotid bifurcation-positive correlation between plaque location and low and oscillating shear stress. *Atherosclerosis*, 1985, 5: 293

8 Hajdu MA, Baumbach GL. Mechanics of large and small cerebral arteries in chronic hypertension. *Am J Physiol*, 1994, 266: H1027

走近湍流 1)

张兆顺　崔桂香　许春晓

（清华大学工程力学系湍流实验室，北京 100084）

摘要　简要回顾了 20 世纪湍流研究的进展，特别是近 30 多年湍流研究的新成就。对于湍流研究的若干热点问题提出一些想法。

关键词　湍流，拟序结构，湍流模式

引　言

湍流是流体力学中公认的难题。自从 19 世纪末 O. Reynolds 提出湍流的统计理论以来，已经有一个多世纪了，经过几代科学家的努力，湍流研究取得很大进展，但是仍然不能满足工程应用的需要，以至于经常有悲观的论调侵袭湍流研究。其实，在自然科学领域中，经过若干世纪而未能解决的课题数不胜数，数学中的希尔伯特难题、天体的起源和演化、生命的起源等等、等等。为什么湍流问题没有圆满的解决会受到如此关注呢？因为湍流是自然界和工程中十分普遍的流动现象，对于湍流问题的正确认识和模化直接影响到对自然环境的预测和工程的质量。例如，当前影响航天器气动力和气动热预测准确度的主要障碍是缺乏可靠的湍流模型。和其他一些自然科学的难题不同，解决湍流问题具有迫切性。

应当看到过去 100 多年中，无论是理论上还是实用上湍流研究都有很大进步。20 世纪初叶，在 Reynolds 统计理论的框架下，人们只用简单的湍流模型来解释简单的湍流运动，目前，虽然没有普适的湍流模型可以预测所有复杂的湍流，但是有经验的湍流模式专家可以根据复杂流动的性质提出实用的模型。近 50 年来，对于湍流本质的认识愈来愈深入，最突出的是，人们认识到湍流是有结构的不规则运动。根据这种认识，利用控制湍流结构来控制湍流取得了显著的成就。在探索湍流的历程中，科学家创造了先进的研究手段：各种精细的流动和流场测量方法，近代计算机的直接数值模拟，以及近代数学工具，如分形，子波等等。应用这些近代工具（以及发展新的工具），湍流研究人员正在走向对错综复杂湍流有全面和正确认识的道路上。

1　湍流是有结构的不规则多尺度流动

打开湍流的名著（如 Tennekes and Lumley[1]，Monin and Yaglom[2]，Hinze[3]等），对于湍流的定义有各种描述，以至于 Hinze 说无法给湍流一个公认的定义。这种说法表明，人们对于湍流的认识在深化中。撇开流体运动的一般特性，比如，流体运动是非线性耗散系统，真实流体运动是有旋流动等。湍流运动的最主要特征是不规则性，这是大家公认的。

对于湍流不规则性的深入认识，是 100 多年来湍流研究的主要成就之一。早期的科学家认为湍流象分子运动一样，是完全不规则运动。类似于分子运动产生黏性，湍流的耗散可以

1) 国家自然科学基金的资助项目

用涡黏系数来表述。20 世纪初，一些杰出的流体力学家，相继对涡黏系数提出各种流体力学的模型，如 Taylor[4]（1921）的涡模型，Prandtl[5]（1925）的混合长模型和 von Karman[6]（1930）相似模型等。当科学家用流体力学观念（不是分子观念）来建立湍流耗散的涡黏模型时，就开始考虑连续介质不规则运动的特点，其中有别于气体分子不规则运动的最主要特点是运动的多尺度性。第一个提出流体湍流运动中多尺度输运特性的科学家 Richardson[7]（1922）曾描述湍动能的多尺度传输过程如下：'大涡包含小涡，并喂予速度；小涡包含更小的涡，如此继续直到黏性耗散'[2)]。多尺度的思想导致产生描述多尺度的谱概念和谱分析方法，并最终产生了 Kolmogorov[8](1941)的局部各向同性的通用谱（即−5/3 谱）。

湍流不仅是多尺度的而且是有结构的运动。20 世纪中叶，大量的湍流实验（包括测量和显示）发现多尺度的湍流运动存在某种特殊的运动状态。Townsend[9](1951)，Corrsin[10](1955)和 Lumley[11](1965)等从脉动序列的间歇性和空间相关相继推测湍流结构的可能形态。理论上也提出过各种湍涡的模型：球涡模型，柱涡模型等。早期的湍流结构主要是从运动学上考虑，把旋涡结构作为湍流统计的样本。我国的周培源教授是近代湍流模式的奠基人之一。他首先提出先解方程后平均的统计方法，就是说湍涡必须满足 Navier-Stokes 方程（Chou and Chou，1995）[12]。

真实的、可以观察到的湍流结构通过流动显示，以及稍后湍流直接数值模拟所证实。典型的例子是混合层的 Brown-Roshko 涡(1976)[13]，图 1 明显地展示了混合层中存在规则的大涡和分布在大涡周围的细小湍涡。

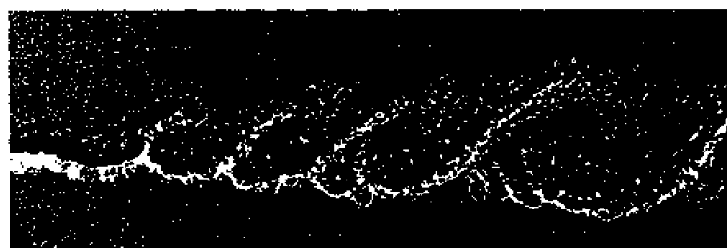
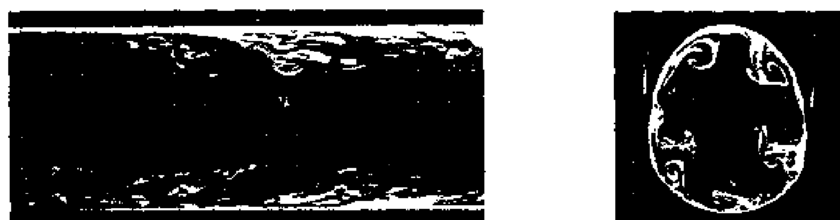


图 1　混合层的 Brown-Roshko 涡(1976)[13]

在边界层、槽道和圆管湍流中也存在各式各样的大涡结构。例如，用激光诱导荧光的显示方法，我们可以在圆管湍流中观察到周向(图 2(a))和流向大涡(图 2(b))。



(a) 通过圆管轴线的纵截面　　(b) 垂直轴线的横截面

图 2　圆管湍流的显示（崔桂香，张兆顺，2000）[14]

值得提出的是，不仅在剪切湍流中有大涡结构，简单的均匀各向同性湍流中也存在涡结构。图 3 展示的是各向同性湍流的直接数值模拟中强涡量等值面，它们是管状结构，这意味

---

2) 原文是：Big whirls have little whirls，which feed on their velocity，Little whirls have small whirls，and so on to viscosity

着各向同性湍流中存在管状涡。仔细分析还可以确定管状涡的平均长度约等于各向同性湍流的积分尺度，它们的平均直径约等于湍流 Taylor 微尺度。更进一步分析可以算出管状涡内部的平均速度场，它们接近于 Burgers 涡，即有轴向拉伸的柱状涡。在管状涡之间错综复杂地分布着各种尺度的树叉结构。


图 3 各向同性湍流中的涡结构[15]

所有以上发现充分说明，无论是简单还是复杂湍流中都存在一定的涡结构。

大尺度结构的发生是不规则的，就是说，在长时间和大范围来观察，大尺度运动结构发生的地点和时刻是不确定的。因此在大样本统计中我们不可能发现这种结构，这就是为什么经典的长时间统计未能察觉它们。另一方面，大尺度运动结构一旦生成，它以一定的动力学规律演化，因此湍流大尺度结构又称拟序结构，或相干结构。举例来说，在湍流边界层、槽道或圆管湍流的近壁区($5<y^+<100$)，间歇地发生猝发过程，它们是如下的拟序运动：有一股高速流动冲向壁面（称为下扫过程），它导致近壁区（$y^+\sim10$）产生流向涡（长度和直径比很大的涡管）；流向涡生成的初期，它缓缓升起，形成和壁面有一定倾角的管状涡（称为上抛过程）；当升至 $y^+\sim30\text{-}50$ 时，流向涡发生剧烈抖动直至破碎，在流向涡破碎的很短时间内，瞬时的脉动动量通量$(-u'v')$很大，可以达到平均脉动动量通量，即雷诺应力$-\langle u'v'\rangle$的 100 倍以上。以上从流向涡的出现到破碎的全过程称为猝发，只要在近壁区触发流向涡，它就以‘下扫—上抛—抖动—破碎’的序列演化，这就是大尺度运动的拟序性或相干性。

湍流中大涡拟序结构对于湍流生成和发展有主宰作用，因此抑制或消除大涡结构可能抑制整体的湍流强度，甚至使流动层流化。这是近代湍流减阻和降噪的主要思想(Bushnell 等，1989)[16]。

湍流是多尺度有结构的不规则流体运动。它指出湍流运动的主要特征，同时也指出了研究湍流的困难所在。单纯的不规则运动，例如气体分子运动，是不规则粒子群的运动，比较容易用统计力学的方法来分析，因为宏观上它只有一个特征尺度——分子平均自由程。湍流的第一个困难是它的多尺度（理论上是无穷多尺度）。如果无穷多尺度之间存在简单的关系，例如相似关系，这种多尺度系统也不难处理，但是湍流的多尺度不规则运动是有结构的，也就是说，不同尺度的运动之间的动力学关系是复杂的。本文中，我们将循着‘湍流是多尺度有结构的不规则流体运动’这条主线来探讨如何进一步认识湍流。

2 湍流的直接数值模拟和实验是认识湍流的有力工具

湍流的不规则有结构多尺度运动属于宏观流体运动，即使是最小的湍流耗散尺度也远远大于分子运动的平均自由程，因此湍流运动，不论它是多么不规则，仍然服从流体运动方程，对于不可压缩牛顿流体的湍流运动，它必须遵循 Navier-Stokes 方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}+f_i \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \tag{2}$$

湍流和层流是同一种流体的不同运动状态，而不是两种不同‘流体’的运动(Tannekes and Lumley，1972)[1]。近代非线性动力系统理论证实：在某些初值和方程的参量范围内确定性非

线性微分方程可以有不规则的渐近解。牛顿流体的湍流是在大雷诺数下 Navier-Stokes 方程的渐近不规则解。从 20 世纪 70 年代开始，湍流直接数值模拟（简称 DNS）成为研究湍流机制的主要工具之一。确实，直接数值模拟是一种非常理想的工具，湍流界曾经寄予很大的希望。上一节图 3 的各向同性湍流的大尺度结构就是直接数值模拟的结果。现在已经有湍流边界层、槽道湍流、圆管湍流、湍流混合层和湍射流的直接数值模拟数据库。直接数值模拟的优越性在于它提供了湍流场的高分辨的样本，因此 DNS 可以对流动结构做深入研究；它可以重复回放，对各种新的理论和统计模式进行检验；最后，DNS 可以获得物理实验难以测得或者根本无法测量的量，例如湍流场的高阶多点统计矩很难用实验测量，流场的脉动压强至今没有合适的测量方法；而 DNS 可以提供以上这些量的准确结果。举例来说，湍流边界层或槽道湍流中紧贴壁面的流动曾经被称为层流底层，后来，由流动显示发现，所谓的层流底层中也存在湍流脉动，应当准确地称为黏性底层。但是黏性底层是紧贴壁面的很薄区域，通常定义为 $y^+<5$，如果湍流边界层的 Re_δ=10 000，黏性底层厚度约为边界层厚度的 1/100，假如边界层等于 10mm，则黏性底层厚度大约只有 0.1mm，现有的速度测量技术几乎都不可能测量如此贴近壁面的流体速度。所以，人们虽然知道，黏性底层有湍流脉动，但是并不知道那里湍流脉动的细节。用 128^3 的空间分辨度对湍流槽道进行直接数值模拟(Kim 等，1987)[17]，离壁面最小的无量纲尺度可以达到 y^+~0.05。我们曾对黏性底层的湍流进行考察，结果发现在黏性底层存在强间歇现象，并称之为强脉冲(许春晓等，1996)[18]。我们发现强脉冲具有以下特性：

（1）强脉冲总是以正负脉冲成对出现（图 4）；

（2）强脉冲的流向迁移速度约为 0.6~0.7U_m，远远大于当地的平均速度（y^+=1.3 处的平均速度为 0.08U_m，接近于 y^+~15 处的平均速度，就是说强脉冲是由过渡层中的涡结构带动迁移；

（3）强脉冲的平均持续时间，或它的平均寿命约为 $10\nu/u_\tau^2$，因此它是可以检测的；

（4）正负强脉冲之间总有一个低压区（图 5），可以推断强脉冲对之间存在流向涡；

（5）湍动能的最大耗散总是位于正负强脉冲对之间（图 6）。

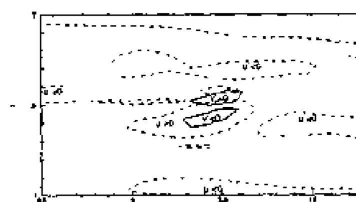


图 4 一个典型的正负强脉冲

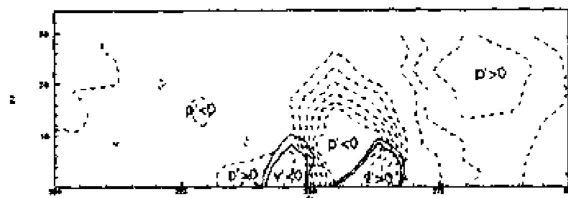


图 5 强脉冲对间的负压强区

强脉冲的发现被认为是湍流直接数值模拟成就的实例之一(Moin 等 1998)[19]。在 Moin 的文章中还列举了湍流直接数值模拟的其他成果，限于篇幅，我们不能详细介绍，有兴趣的读者可参阅原文。

湍流直接数值模拟确实是研究不规则湍流的十分有力的工具，从直接数值模拟的结果中，我们也可以观察到不同尺度的流动结

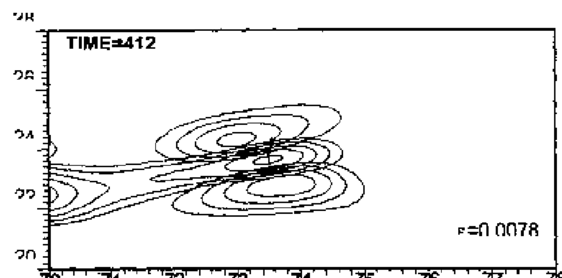


图 6 湍动能耗散率（实线）和强脉冲对（虚线）

构，证实湍流是有结构的多尺度不规则流动。

但是，在高雷诺数流动中，湍流的多尺度结构具有很大的带宽。简单的估计公式是

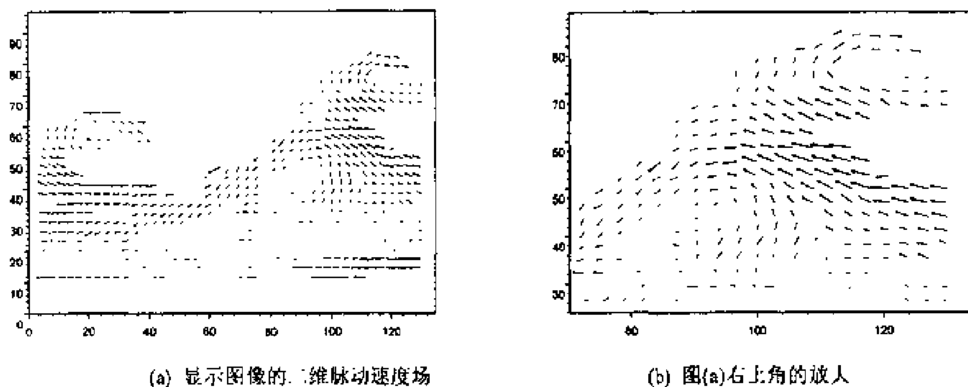
$$L/l \sim Re^{3/4} \tag{3}$$

公式中 l 是最小的湍流耗散尺度，L 是需要模拟的最大尺度。按照(3)式估计，直接数值模拟雷诺数在 10^4 量级的湍流，需要一维分辨率 $l/L \sim 0.001$，三维的网格数约为 10^9，这是目前最大计算机的限度。广泛的工程和自然界中雷诺数高达 10^7 以上的湍流是常见的。对于高雷诺数湍流，目前的计算机还无能为力。根据(3)式估计，雷诺数提高 1 个量级，三维湍流直接数值模拟的网格数约需增加 3 个量级。所以湍流的多尺度性给研究带来极大的困难。

湍流实验是和直接数值模拟同等重要的认识湍流本质的重要工具。既然湍流是有结构的多尺度运动，场的测量，而不是点的测量，是湍流研究所追求的目标。流动显示是一种定性的观察大尺度湍流结构的很好方法，事实上，近代湍流拟序结构最早是从流动显示中发现的，如混合层的 Brown-Roshko 涡[13]。粒子图像测速法（PIV）是定量测量湍流速度场的方法(Andain，1991)[20]，它能够获得湍流脉动场的信息。

流动显示是一种经济而又易于实现的实验方法，高质量的流动显示采用激光诱导荧光的方法（LIF），它可以提供清晰的图像，如第 1 节图 2 提供的圆管湍流结构。但是，对于流动显示图像的解释应当十分小心。通常在显示图像上出现卷起的染色图形时，人们往往把它理解为一个大涡。事实上，染色液的浓度场和脉动速度场之间的关系十分复杂，人们只是凭经验和感觉来判断涡结构，直觉的判断可能有误导。我们认为应当发展定量的显示方法，这是克服流动显示图像误判的唯一方法。

我们用两种定量的流动显示方法，对圆管湍流纵截面的流动同时显示和测量。第一种方法用细微粒子（直径约 1μm）为示踪剂，用 PIV 技术确定粒子速度。其中一幅典型显示图像的定量脉动速度场的结果示于图 7(a)和(b)，从图 7(a)的显示图像中，人们往往能够判断，卷起的示踪剂反映湍涡。从 7(b)的放大图上我们可以看到，在卷起的头部下方还存在一个反向的湍涡。如果只观察显示图像，我们会忽略下方的湍涡。第二种方法是 LIF 显示，用类似 PIV 的 ICV 方法(Tokumaru 和 Dimotakis 1995)[21]，由显示的浓度场推算速度场。图 8(a)是一幅典型显示图像，图 8(b)是用 ICV 方法计算的对应脉动速度场。



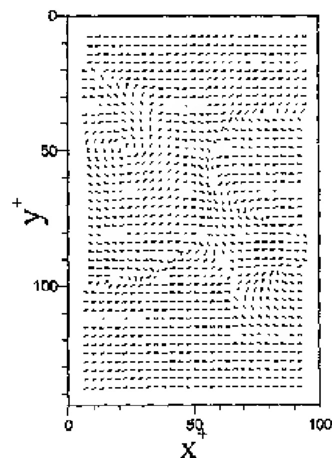
(a) 显示图像的二维脉动速度场　　(b) 图(a)右上角的放大

图 7　粒子图像显示和定量测量

图 8(a)中示踪液有 2 个卷起的螺旋点 A 和 B，一般认为它们都是展向湍涡；然而，速度场定量分析的结果发现(图 8(b))，只有 A 是一个展向湍涡，B 处没有展向湍涡的迹象。以上



(a) LIF 显示的图像



(b) 显示图像的脉动速度场

图 8 LIF 显示图像和相应的脉动速度场

实例说明，流动显示能够给出流场的直观图像，如果没有定量的测量为依据，单凭直觉会引起误导。20 世纪 90 年代发展起来的粒子图像测速技术可以和流动显示配合，获得既直观又可靠的湍流场信息。

湍流实验面临的困难也是由湍流的多尺度和有结构性质造成的。为了获得湍流脉动场的演化，我们需要脉动场的时间序列，既要达到空间的分辨率，又要有足够高的采样频率，这在目前还做不到。除了光电器件昂贵以外，高速、高分辨的摄像系统还满足不了湍流研究的要求。

总之，湍流直接数值模拟和湍流脉动场的测量是认识湍流多尺度有结构性质的非常有效的工具。由于技术的原因，目前它们只能研究低雷诺数湍流，随着高新技术的发展，愈来愈复杂和精细的湍流现象将被揭示。就直接数值模拟和实验两种方法比较，直接数值模拟在获得信息量及精度、后处理、以及费用来说，它优于物理实验；但是，目前直接数值模拟只能计算简单几何边界的流动。我们的经验是，对于较低雷诺数的简单湍流，直接数值模拟可以取代物理实验；中等雷诺数以上的复杂边界湍流，物理实验是研究湍流的主要手段。

3 什么是‘最好的’湍流模式

湍流模式是封闭湍流统计方程的方法，是目前预测工程和自然界湍流的唯一实用方法。只要预测湍流，就离不开湍流模式。从最早的 Boussinesq 涡黏模式开始到近代的亚格子应力模式，著名的和不著名的模式可能超过 100 种。在 RANS 模式中，有不同层次的模式：代数涡黏模式、k-ε 涡黏模式（包括线性和非线性）、代数应力模式和雷诺应力输运模式（或称二阶矩模式）。湍流专家常常遇到工程师们提出的难题：‘请你推荐我最好的模式来解决我们的具体问题’。回答这一问题既难，又很容易。容易的回答是：‘最好的湍流模型是 Navier-Stokes 方程，它不含任何湍流的假定’(Bradshaw，1999)[22]。但是，上面我们已经介绍过，用 Navier-Stokes 方程来模拟湍流，需要有超级巨型的计算机。根据计算机专家的估计，每 10 年计算机的运算速度提高 30 倍(Foster，1995)[23]。湍流直接数值模拟的计算量和流动雷诺数的 3 次方成正比。如果直接数值模拟的雷诺数增加 10 倍，计算量增加 1000 倍；按照 1995 年 Foster 的估计推算，大约需要 20 年以后才可能具备计算条件。目前直接数值模拟湍流的雷诺数是 10^3~10^4，属于低雷诺数湍流，20 年后，能直接数值模拟湍流的雷诺数最多属于中等雷诺数，

和实际需要还差得很远。‘最好的模式’不是现实的模式。难以回答‘什么是最好的湍流模式’的原因是：不存在对一切复杂湍流普适的模式。流动的工程预测是实际问题，不同问题的精度要求、计算时间、投入费用等可以相差很远。不同的工程问题应当采用不同层次的模式。Pope(1999)[24]估计目前工程应用中绝大部分采用涡黏模式，尤以 k-ε 模式居多；少数采用雷诺应力输运模式；采用大涡数值模拟的微乎其微。

面向新世纪，湍流模式的目标是预测工程实际中的复杂湍流。所谓复杂湍流是指：流动边界的几何形状复杂，例如：真实航天器的绕流；流动中物理化学过程复杂，例如：含颗粒的湍流、有传热传质的湍流、燃烧或其他有化学反应的湍流等等。每个工程领域，有自己具体的复杂流动问题，发展实用的湍流模式应当深入到具体的工程领域中去。

我们一再强调：湍流是有结构的多尺度不规则运动，凡是能够充分反映湍流结构和多尺度特性的模式，应当认为是好的模式，这是改进湍流模式的方向。大涡模拟被认为在 20 年后能够大量应用于工程实际，因为它能够分辨大尺度结构。除了有待于计算机的改进外，亚格子模式是大涡数值模拟的关键，例如：近壁亚格子模式，亚格子标量输运模式等等。对于统计模式，它包含所有尺度的脉动，因此不可能具有普适性，但是可以针对工程中存在的流动类型建立相应的模式，流型的分类应以湍流的结构来区分。对于简单的附体湍流，我们已经有很好的模式，即使是代数涡黏模式也已经够用。但是对于更复杂的流动，怎样把湍流的结构信息包括到模式中去是值得研究的方向。Reynolds 等(1995)[25]提出基于结构的湍流模式的思想，他们提出结构维数张量和结构‘涡度’张量，作为快速畸变均匀湍流的主要结构参数。虽然 Reynolds 提出模式只在快速畸变均匀湍流中考察成功，但是他们改良统计模式的方向是对的。分区模式（zonal model）的思想很早就提出来了(Ferziger 等，1988)[26]，根据什么准则分区有待研究，无疑它们和湍流的结构有关。还有一些湍流专家，例如 Spalart（1997）[27]，提出可以把大涡数值模拟和 RANS 组合，这种分区组合很容易过渡到全场大涡数值模拟。

总之，湍流统计模式在新世纪初仍然是预测复杂湍流的主要工具，我们不必期望普适的湍流模式，而期望湍流模式能够正确包含湍流多尺度结构的信息。

4　湍流呼唤理论

20 世纪，科学家对湍流的不规则性进行了深入的理论探讨，以 Kolmogorov 为代表的莫斯科学派对湍流统计理论有杰出贡献[2]，但是经典统计理论并没有考虑不规则运动中存在结构。现在我们有丰富的湍流直接数值模拟和实验的数据库，相对来说理论上却十分贫乏，也许，近代人过于依赖技术而忽视思维。多尺度有结构的湍流运动，提出了不少理论问题。关于湍流异常标度率的研究开始触及湍流结构，一些理论家企图把近代的混沌、分形、重整化理论等引入湍流 (参见 Frisch，1995)，不过仅仅是开端，至今还只讨论均匀湍流。最近几年来，关于湍流场中标量输运问题的研究，对于不规则运动的结构的产生又提出新的问题(Shraiman and Siggia，2000[29] 和 Warhaft，2000[30])：被动标量输运的控制方程是线性的，即使速度场不存在间歇性，为什么标量脉动仍然会产生很大的间歇因子？

连续系统的多尺度不规则运动中结构是怎样产生的？我们需要理论。

参 考 文 献

1　Tennekes H，Lumley JL. A First Course in Turbulence. MIT Press，1972

2　Monin AS，Yaglom AM. Statistical Fluid Mechanics：Mechanics of Turbulence (English translation)，Vol. I and II. MIT Press，1975

3 Hinze O. Turbulence. MacGrill, 1976

4 Taylor GI. Diffussion by continuous movements. *Proc London Math Soc*, 1921, 20: 196

5 Prandtl L. Bericht uber Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, *ZAMM*, 1925, 5: 136

6 Karman T Von. Mechanische Anlichkeit und Turbulenz 1930Nachr. Ges. Wiss. Gottingen Math-Phys. K1. 51-76

7 Richardson LF. Weather prediction by numerical process. Cambridge University Press, 1922

8 Kolmogorov AN. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. Dokl Akad Nauk SSSR, 1941, 30: 9~13 (Reprinted in *Proc Royal Soc Lond A*, 1991, 434: 913)

9 Townsend AA. On the fine-scale structure of turbulence. *Proc Roy Soc London*, 1951, A208: 534

10 Corrsin S, Kostler AL. Free-stream boundaries of turbulent flows. NACA Report 1244, 1955

11 Lumley JL. The structure of inhomogeneous turbulent flows. In: Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation. Moskow: Publishing House 'NAUK', 1965. 166

12 Chou PY and Chou RL Fifty years turbulence research in China. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1995, 27: 1

13 Brown FNM and Roshko A. On density effects and large structure in turbulent mixing layer. *JFM*, 1974, 64: 775

14 崔桂香，张兆顺. 圆管湍流的近壁结构. 空气动力学报. 2000, 18: 10

15 She ZS and Jackson E and Orszag SA. Intermittent vortex structures in homogeneous isotropic turbulence. *Nature*, 1990, 344: 226~228

16 Bushnell DM and McGinley CB. Turbulence control in wall flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1989, 21: 1

17 Kim J and Moin P and Moser R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *JFM*, 1987, 177: 133

18 Xu C and Zhang Z. Origin of high kurtosis in viscous sublayer. *Physics of Fluids*, 1996, 8: 1938~1942

18 Moin P et al. Direct numerical simulation: A tool in turbulence research. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1998, 30: 539

20 Andain RJ. Particle-imaging techniques for experimental fluid mechanics. *Annual Review Fluid Mechanics*, 1991, 23: 261~304

21 Tokumaru PT, Dimotakis PE. Image correlation velocimetry. *Exp Fluids*, 1995, 19: 1~15

22 Bradshaw P. The best turbulence models for engineers. In: Modeling Complex Turbulent Flows. Kluwer Academic Publishers, 1999

23 Foster I. Designing and building parallel programs. Addison-Wesley, 1995

24 Pope SB. A perspective to turbulence modeling. In: Modeling Complex Turbulent Flows. Kluwer Academic Publishers, 1999

25 Reynolds WC and Kassinos SC. Development of structure-based turbulence modeling. In: Modeling Complex Turbulent Flows. Kluwer Academic Publishers, 1999

26 Ferziger J et al. Zonal modelling of turbulent flows—philosophy and accomplishments Near-Wall Turbulence. Zaric Memorial Conference, 1988. 800

27 Spalart PR et al. Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach. In: Advances in DNS/LES, Greyden Press, 1997.137

28 Frisch U. Turublence. Cambridge University Press, 1995

29 Shraiman BI and Siggia ED. Scalar turbulence. *Nature*, 2000, 304: 639

30 Warhaft Z. Passive scalars in turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2000, 32: 203

我国风工程研究现状与展望

贺德馨

（中国空气动力研究与发展中心，绵阳 621000）

摘要　介绍了我国风工程的现状，提出了在大气边界层内风特性，风对建筑物的作用，风对桥梁的作用，车辆空气动力特性，风力机空气动力特性，风引起的污染扩散和质量迁移等研究中尚待解决的主要问题。

关键词　风工程

引　言

风工程（Wind Engineering）是研究大气边界层内的风与人类在地球表面的活动及所创造的物体之间的相互作用，是空气动力学与气象学、气候学、结构动力学、建筑工程、桥梁工程、能源工程、车辆工程和环保工程等相互渗透和相互促进而形成的一门边缘学科。它研究的内容主要是：(1) 大气边界层内风特性的研究；(2) 风对建筑物和构筑物作用的研究；(3) 风引起的污染扩散和质量迁移的研究；(4) 非航空(天)器空气动力特性的研究。

风工程研究的内容和国民经济的发展以及人民生活的质量密切相关，因此，引起广泛的重视和得到迅速的发展。

风工程研究方法有风洞试验、数值计算和现场测试三种，它们互相补充，互相促进，其中风洞试验是一种主要的研究方法。

我国风工程研究始于 50 年代，从 70 年代开始风工程作为一门学科在各个研究领域中得到了全面发展，下面对我国风工程研究中的几个主要方面作一些介绍。

1　大气边界层内风特性的研究

大气边界层内风特性的研究是风工程研究的基础。大气边界层是指受地球表面磨擦力影响的大气层，大气边界层的高度随气象条件、地形和地面粗糙度的不同而有差异，大致是在离地面 400~1000m 的范围。

大气边界层内的风是一种随机的湍流流动，长期以来，人们对它进行了大量的研究工作，期望能用一个理论模型来准确描述，但未能实现。目前仅对 100m 高度以下的地表层的风特性比较了解，将风特性分为平均风特性和脉动风特性来进行研究。

1.1　平均风特性

平均风特性包括平均风速、平均风向、风速廓线和风频曲线。风速廓线可以用对数律或指数律表示，对于高耸建筑物通常用指数律表示。当用指数律表示时，风速廓线指数与地面粗糙度有关。我国规范中将地面粗糙度分为三类，国际 ISO 规范中分为四类，欧州和日本规范中分为五类。因此，如何对地面粗糙度进行分类，合理选取风速廓线指数值尚有待进一步研究。另外，在工程结构设计时，如何确定设计最大风速，即根据重现期内年平均最大风速的分布规律用概率分布函数求得最大风速。目前，各个规范规定的重现期不尽相同，如何根据不同的工程结构，选取不同的重现期和合理确定设计最大风速，并考虑其风向概率将直接影响工程结构的安全性和经济性，为此必须要有长年的气象记录。

1.2 脉动风特性

脉动风特性包括脉动风速、脉动系数、风向变化，湍流强度，湍流积分尺度，脉动风功率谱和空间相关系数等。脉动风特性对工程结构的风荷载和风响应有重要的影响，是大气边界层内风特性研究的重点。目前主要困难是缺少对大气湍流运动的实测数据，因此，在工程结构设计中选用风参数时不尽合理，一般偏于保守。另外，以风谱而言，目前国际上通用的是 Davenport 谱、Harris 谱和 Kaimal 谱，它们是属于中性大气稳定度下的功率谱，其谱峰及峰值频率不尽相同。北京大学在虎门桥址现场对台风的风谱测量结果表明，与通用的风谱比较，低频成分明显偏高。

2　风对建筑结构作用的研究

随着经济、社会的进步和发展，各种高耸和大跨度柔性建筑结构相继出现。为了保证建筑结构的可靠性和经济性，改善居住者的舒适性以及对建筑结构周围的风环境特性进行评估，提出了许多与空气动力相关的研究问题。

2.1 建筑结构的风荷载

风荷载是建筑结构设计时要考虑的重要荷载，风荷载包括静荷载和动荷载。在现行建筑结构荷载规范中，风荷载是用基本风压乘以风压高度变化系数，风荷载体型系数和风振系数来确定的，由于建筑结构的形式多样和建筑结构群的大量涌现，规范中的条文很难完全符合实际的情况，中国规范的风荷载过于保守，因此，主要依靠风洞试验来解决，特别是近年来高频动态底座天平技术的应用较好地解决了动荷载的测量问题。目前主要的问题是如何进一步合理修订建筑结构风荷载规范，其中包括基本风压的确定、地面粗糙度分类的调整、高柔建筑物抗风设计的补充和当量静荷载的确定方法等。

2.2 建筑结构的风响应

风响应是高耸建筑结构抗风设计中的重要内容，从安全性和舒适性考虑，要对其结构构件的内力，结构层特别是顶层的位移和加速度进行一定的限制。建筑结构风响应包括顺风向响应和横风向响应。研究建筑结构风响应的方法主要是风洞试验和理论分析。理论分析时采用频域法或时域法。时域法比频域法分析的结果更接近实际。目前对建筑结构顺风向响应的分析比较成熟。

与顺风向响应比较，建筑结构的横风向响应分析比较复杂。对于高耸建筑结构，由于结构尾流旋涡脱落干扰引起的横风向响应比顺风向响应要大得多，目前还没有完全从理论上解决好横风向响应的问题。另外，对有些建筑结构除了考虑结构在风荷载作用下产生的强迫振动外，还要考虑结构在空气动力阻尼作用下产生的自激振动，当空气动力阻尼力为负值时，将产生不稳定的横风向弛振（包括弯曲弛振和扭转弛振）。

目前，我国建筑结构规范中对建筑结构风响应的规定还有待进一步的修订和补充，如对顶层加速度槛值的确定，如何计入扭转的影响等。

2.3 建筑结构的风环境

随着城市建筑结构高度的增加和建筑结构群的涌现，建筑结构的风环境问题越来越突出，不仅关系到建筑结构的安全性，还关系到行人的舒适性和城市环境的保护。近年来，对城市风环境的研究越来越重视，通过风洞试验或数值计算评估建筑结构群的风环境质量，合理规划城市建设布局和相邻建筑结构的位置。

2.4 台风影响的研究

台风是在热带海洋上产生的巨大的大气旋涡，全球每年平均生成台风 80～100 次，其中约 1/10 在我国东南沿海登陆。台风给人民生命财产造成严重损失，其中建筑结构破坏是一个重要的方面。近年来，开始研究台风对建筑结构的影响，研究的内容除了台风作用下的风荷载和风响应问题外，还研究台风登陆时，飞行碎物的运动规律及其对建筑结构的影响等。

3 风对桥梁作用的研究

随着交通运输事业的发展，大跨度桥梁（斜拉桥和悬桥）已成为当今桥梁建设中的主流。自八十年代以来，我国大跨度桥梁建设也得到了迅速发展。其中斜拉桥杨浦大桥主跨达 602m，悬索桥江阴长江大桥主跨度达 1385m，已跨入世界先进行列。自 1940 年美国 Tacoma 悬桥风毁事件以后，桥梁抗风设计一直是桥梁工程中最关注的问题。

3.1 桥梁断面的气动参数

桥梁断面的气动力（力矩）系数、气动导数和气动导纳是桥梁抗风设计中的重要气动参数。气动力（力矩）主要用于桥梁静稳定性分析，通过节段模型风洞试验的方法可以准确地进行测量。

气动导数主要用于桥梁颤振分析，通过节段模型风洞试验的方法进行测量，气动导数的测量精度对确定桥梁颤振临界风速有重要的影响，特别是当桥梁颤振是多振型、多变量耦合的形态时，更是如此。在风洞中用节段模型测量气动导数时、要求在耦合振动试验中，模型以纯单一模态运动，但实际上很难做到，因此，如何从风洞试验技术和数据处理方法这两个方面来提高气动导数的测量精度是目前研究工作的重点。另外，通过不同桥梁断面形状在不同风速和不同湍流度下的系列试验建立一个气动导数的计算公式，亦是一个研究内容。

气动导纳主要用于考虑抖振力的非定常效应，在研究大跨度桥梁抖振响应时有很重要的作用。目前，对流线形的桥梁断面可采用平板或翼型气动导纳的 Sears 函数来考虑抖振力的非定常效应，但是，对于复杂的桥梁断面形状，这种方法会产生误差，因此，对气动导纳的研究十分关注。中国空气动力研究与发展中心分别用脉动压力积分得到的非定常气动力（间接法）和高频动态底座天平测到的非定常气动力（直接法）计算了翼型和桥梁断面形状的气动过度（时域）导纳（频域）函数。研究结果表明：利用 Sears 函数进行抖振响应计算时偏保守；非定常气动力分量比湍流分量具有更高的相关性；湍流分量与非定常气动力分量之间存在着不同的气动导纳。气动导纳的研究工作还有待于进一步深入，特别是在湍流场中如何准确建立钝体的非线性、非定常气动力数学模型。

3.2 桥梁的稳定性

桥梁稳定性的研究包括静稳定性和动稳定性两个方面。扭转发散是桥梁最典型的一种静稳定性问题，颤振和抖振是桥梁最主要的一种动稳定性问题。

用线性理论方法研究桥梁扭转发散时，认为桥梁扭转发散临界风速远高于桥梁颤振临界风速；但是随着桥梁跨度超出 1000m 以后，非线性效应逐渐增大，日本东京大学和同济大学在全桥模型风洞试验中都在颤振发生前观察到扭转发散现象。

颤振是桥梁结构在气动力、弹性和惯性力的耦合作用下产生的一种发散的振动，导致桥梁倒塌。因此，桥梁抗风设计时必须对桥梁颤振进行分析，确定临界颤振风速和振动特性。颤振分析时，可以采用 Scanlan 的颤振理论，首先用节段模型风洞试验测量气动导数，引入运动方程，进行三维颤振分析，然后进行全桥模型风洞试验，对临界颤振风速和振动特性进

行验证。除此之外，还可采用同济大学提出的状态空间法。

抖振是桥梁结构在风湍流的作用下产生的一种强迫振动，虽然抖振是一种限幅振动，但由于发生抖振的风速低，频度大，会导致结构局部疲劳，影响行人和车辆行驶的安全性，因此，桥梁抗风设计时也要对桥梁进行抖振响应分析。早期用加拿大 Davenport 的抖振统计分析方法，这种方法没有考虑自激力的作用和仅考虑顺风向速度脉动对抖振力的贡献。Scanlan 在抖振分析中引入了非定常自激力和准定常抖振力，但他所考虑的自激力是桥梁断面在谐振下得到的，而抖振是随机振动，因此，这两种频域抖振响应分析方法对抖振力的考虑都不够充分。近年来，随着对抖振机理认识的深入，提出了一些新的抖振响应分析方法，在频域抖振响应分析中考虑了任意运动的自激力，以及考虑在大变形下桥梁结构非线性的时域抖振响应分析方法，提高抖振响应分析的可信度。同济大学对桥梁抖振响应分析方法进行了简化，给出了实用的计算公式。

桥梁抗风设计时，不仅要对全桥状态进行桥梁动稳定性分析，还要对施工状态下的动稳定性进行分析，施工状态下的桥梁颤振临界风速会低于全桥颤振临界风速。

3.3 桥梁拉索振动

桥梁拉索振动的形式有涡激振动、尾流驰振，参数共振和斜索雨振等，其中研究的重点是斜索雨振。

下雨时，大跨度斜拉桥的斜索在一定的风速和风向范围内会引成一条稳定的上水路，发生大幅度的振动，称为雨振。这种振动会引起相邻斜索的碰撞，使其保护层破损；还会使斜索末端紧固件产生疲劳损伤，导致减振器损坏，危及桥梁的安全。我国上海南浦大桥、杨浦大桥和武汉长江二桥建成后都相继观察到斜索雨振现象。国内外对斜索雨振的机理进行了很多研究，除了用驰振理论解释外，还有用二次流理论和能量输入理论来解释雨振现象。中国空气动力研究与发展中心对斜索雨振进行了风洞试验，通过测量雨振时斜索上的脉动压力分布来研究影响雨振的因素，并将雨振脉动压力积分得到的非定常气动力模型引入斜索雨振时的振幅计算。有关斜索雨振的机理还有待进一步研究。

4 车辆空气动力特性的研究

交通运输是国民经济的命脉，是制约其发展速度的重要因素。在交通运输中铁路和公路占主要的地位。随着我国公路、铁路建设的不断发展，汽车和列车的速度不断提高，目前我国高速公路上的汽车行驶速度可达 120~160km/h，铁路上的客运列车营运速度已达 200km/h，正在研制的高速列车的营运速度将达 300km/h。车辆速度提高后，产生一系列和空气动力相关的问题需要进行研究。

4.1 汽车空气动力特性研究

随着汽车行驶速度的增加，气动阻力占总阻力的比例越来越大，一般轿车占 60%以上，因此，汽车空气动力特性研究的主要目的是通过汽车气动外形设计降低气动阻力。目前通过车体(包括头部、乘坐舱、后部和底部等)和部件(包括后视镜、流水槽、刮水器等)外形的优化设计，可以将典型轿车的气动阻力系数降低到 0.30 左右，典型载重货车的气动阻力系数降低到 0.65 左右。除了降低气动阻力外，为了保证汽车行驶时的稳定性，对汽车在高速行驶时由于升力引起的纵倾角和在侧风行驶时由于侧向力引起的侧滑角和横摆角要有一定的控制。因此，汽车的升力特性和侧力特性也是重要的研究内容。汽车气动外形设计是汽车造型设计的重要组成部分，当然除了考虑汽车有好的空气动力特性外，汽车造型设计还要考虑其艺术

性、经济性、舒适性和安全性，可以说，汽车造型设计是科学和艺术，社会和经济的综合。

汽车绕流场研究分汽车外流场研究和汽车内流场研究。汽车的外流场是非常复杂的三维流动，特别是汽车尾部的分离、旋涡运动对汽车空气动力特性有重要影响，因此，要对汽车周围的空间流场进行研究。另外，为了控制尘土和泥水对汽车表面的污染，亦需要对汽车表面流场进行研究。汽车内流场的品质除了对附加阻力有影响外，还直接关系到汽车发动机和制动器冷却系统的冷却效率，因此，要通过内流场的研究准确选择冷却系统进气口和出气口的位置和布置管路，以减少动量损失和提高散热效率。另外，为了保证车箱内的舒适性，也要进行内流场的研究。

汽车气动噪声是非定常的空气压力波脉动与传播的结果。汽车气动噪声主要来源于气流分离，直接和汽车外形有关，特别是汽车头部的外形和汽车表面的附件。汽车气动噪声频率范围很宽，可分为低频、中频和高频三种。侧窗开启时产生低频噪声、强度很弱；气流流过车体缝隙时会产生啸叫的高频噪声。另外，当汽车头部和汽车附件的气流产生分离和旋涡运动时也会产生噪声。

4.2 列车空气动力特性研究

当列车时速达到 300km/h，有 80%的牵引力是用来克服列车气动阻力，因此，列车空气动力特性研究的主要目的也是通过列车气动外形设计降低气动阻力。我国铁路已进行了三次提速，每次提速都对列车气动外形进行了改进。目前通过车体（包括头部机车、客车车厢和尾部机车）外形和编组以及部件（包括转向架、风档、裙边、受电弓）外形等的综合优化设计，可以将典型高速列车头车的气动阻力系数降低到 0.22 左右。除了降低气动阻力外，为了保证列车行驶时的稳定性，对列车在横风作用下横侧特性的研究也十分重要，以防止在强横风作用下列车脱轨或颠覆。

列车风是指列车高速行驶时，使周围静止空气产生的复杂流动。列车风对线路附近的建筑物和人体将产生风荷载，严重时将危及安全，因此，目前国际上都制定了确定站台安全距离和作业安全距离的风速标准。我国铁路提速后，必须对沿线设施，特别是站台的列车风效应重新进行评估。

当列车通过隧道时，由于受隧道壁面的限制，使前方的静止空气受到压缩，列车头部压力急骤增加，被列车排挤的空气，一部分沿隧道向前流动，另一部分则通过列车与隧道壁间的环状空间向后方流动。受压空气以压缩波形式向前传播，并继续压缩和加速空气的波前运动，在隧道内形成复杂的波系，使列车气动阻力增加，并产生大的压力波动，影响行车安全和乘客的舒适性。影响隧道内压力波特性的主要因素是列车行驶速度与阻塞比（列车横截面积与隧道横截面之比）。另外，当压缩波向前传播时，在隧道出口处形成一个脉冲微气压波向外传播，对周围环境产生噪声和振动。目前对列车隧道效应的研究手段主要是实车测试和数值计算。

当两列高速列车在线路上交会行驶时，对周围空气产生强烈的扰动，尤其在车头、车尾交会瞬间，压力发生剧变，这种瞬间的压力冲击现象导致车窗玻璃破碎，车内乘客不适，严重时影响列车的稳定性。影响列车交会时压力波动的因素有交会列车的相对速度、路轨间的线间距和列车气动外形。目前研究的重点是对线间距和列车外形进行综合的优化设计。当列车在隧道内交会时，隧道内的压力波动更为严重，除了与列车行驶速度和阻塞比有关外，还与交会列车进入隧道的时间差有关。

列车气动噪声主要来源于气流分离，因此直接和列车外形有关，特别是列车头部和受电

弓产生气动噪声尤为严重，是研究的重点。

5 风力机空气动力特性的研究

能源是现代社会和经济发展的基础，近 20 多年来，我国能源工业取得了较快发展，形成了以煤炭为主，多能互补的能源生产、供应体系，基本满足了国民经济持续、快速、健康发展的需要。但是，当前我国能源工业还面临人均能耗水平低，环境污染严重，能源利用率低以及新能源和可再生能源比例小等问题。因此，改善能源结构，利用新能源和可再生能源，减轻环境污染，提高人民生活质量，已成了我国能源工业关注的一个热点。1997 年，在“中国能源政策”中明确指出：“对于可再生资源，如水力发电、风力发电、太阳能等，应加大科研开发和使用的力度。”

风能是目前最有开发利用前景和技术最成熟的一种新能源和可再生能源。我国风能资源丰富，全国理论可开发的风能储量（10m 高度层）为 32.26 亿 kW，实际可开发的风能储量为 2.53 亿 kW，风能利用有很大的潜力。

风能利用的主要方式是风力发电，1990 年，我国著名科学家钱学森就提出要在中国发展标准化的 500kW 大型风力发电机组，大规模开发利用风能的意见。10 年来，我国风能利用有了长足的进步。至 2000 年止我国已自行研制 600kW 风力发电机组，风力发电装机容量已达 34.43 万 kW，风力发电作为一个产业在我国电力工业中逐步占有一席之地。

5.1 风力机空气动力特性

风力发电机组是一项高技术产品，风力发电机组的空气动力设计是其中最关键的技术，其主要内容是风轮叶片气动外形设计、性能计算和载荷计算。目前主要采用修正的动量-叶素理论，该理论是基于绕旋转风轮叶片的流动是二维定常的假设，但是，实际上绕旋转风轮叶片的流动是十分复杂的三维非定常流动。近年来，围绕风力机叶片三维非定常流动问题开展了试验研究和理论计算，在风轮叶片气动设计和计算中引入三维效应和非定常气动力模型。

风力机叶片性能和风力机叶片翼型直接相关，风力机叶片翼型和飞行器翼面翼型有差异，风力机叶片翼型相对厚度大，后缘是钝体的；风力机叶片在低雷诺数和大迎角状态下运行；另外，为了增加功率输出，风力机叶片翼型除了要有高的升力系数和升阻比外，还要有平稳的静态失速特性和表面粗糙度对翼型气动性能影响小的特性。因此，如何根据上述特点发展风力机叶片翼型系列，并建立翼型静态和动态气动性能数据库是风力机空气动力特性研究中的一个重要内容。

在建设风电场时，风力机的布置将直接影响功率输出和疲劳寿命，特别是在地形比较复杂的地区。因此，风力机尾流特性研究一直是风电场规划方法研究中的一个主要的方面，目前已发展了计算软件可以直接用于风电场的辅助设计。

风力机气动噪声主要来自风轮叶片，由于噪声源的多样性和复杂性，目前，还没有完善的计算风力机噪声级的理论方法，主要用半经验计算和实际测量的方法来进行评估。降低风力机气动力噪声的主要措施是优化风力机的几何外形设计，特别是叶片尖部的形状。

5.2 风力机结构动力特性

风力机是一个弹性体结构，在气动力、惯性力和弹性力耦合使用下会出现气动弹性不稳定性，特别是随着兆瓦级风力发电机组的投入运行，风轮叶片的直径塔架的高度越来越大，这个问题变得愈来愈重要。目前主要是通过理论计算的方法对塔架耦合系统进行风力机结构动力响应计算和气动弹性稳定性分析。

在风力机结构动力响应计算中可用有限元方法建立风力机动力学模型，对风轮系统进行变结构模态分析，提高计算的可靠性。在风力机气动弹性稳定性分析中可采用谐波平衡法研究风力机系统的耦合运动，根据非线性周期时变系统的稳定性理论对风力机系统进行稳定性分析，给出不稳定边界和阻尼特性。研究表明，风力机结构特性对风力机系统气动弹性稳定性有重要的影响，各分系统频率彼此愈接近，系统稳定性就愈差，因此，必须合理地分配。如何建立非定常气动力模型和考虑风湍流的影响是目前研究的重点。

6 风引起的污染扩散和质量迁移的研究

随着人口的增长和生产力的发展，生态建设和环境建设的问题越来越突出。在生态建设中，荒漠化防治是一项重点项目。近年来，我国荒漠化呈快速发展趋势，每年荒漠化净扩展面积已超过 1000 万亩。去年，沙尘暴多次席卷内蒙古、山西、河北和京津等北方地区是土地荒漠化的警报，急待治理。在环境建设中，大气污染防治是一项重点项目。近年来，我国大气环境的形势十分严峻，空气质量超过国家三级标准，属于严重污染型的城市占 40%左右。城市总悬浮颗粒物超标比较普遍，酸雨的覆盖面积已占国土面积的 30%以上。污染造成经济损失和影响人体健康。城市大气污染严重的主要原因是煤烟污染和汽车尾气污染，地面扬尘、自然降尘以及工业污染源也是重要的原因。

无论是土地荒漠化，还是大气污染，都与风引起的污染扩散和质量迁移相关，因此，在生态建设和环境建设中风工程将起到重要的作用。

另外，道路积雪、路基浸蚀、农田风蚀、人工降雨和飞机播种等问题也都与风引起的质量迁移相关。

6.1 污染扩散研究

在风工程中，污染扩散研究的主要内容是大气污染。大气污染扩散问题除了在环境风洞中进行模拟试验研究外，目前，一般都采用高斯烟流扩散模式来预测大气污染在大气边界层中的输运扩散规律，评价大气环境的质量。高斯模式的假设是烟流扩散符合正态分布，但是，由于气象参数的变化和复杂地形的影响，实际的烟流扩散不完全符合正态分布，从而影响浓度的计算。因此，近年来发展了一些新的数值模式，如北京大学大气环境模式（PUMA）。它包括流场模式和浓度模式，用于模拟复杂地形所形成的各种大气环流，根据观察到的气象资料可以计算速度场、温度场和湍流场（湍流动能）并得到湍流扩散系数；在此基础上，根据已知的污染源资料可以计算在这些环流中污染物浓度的空间分布和时间演变。

由于大气污染扩散是自然界中的一种湍流现象，不仅涉及到湍流扩散，而且还涉及到大气同下垫面之间的相互作用，非常复杂。因此，污染扩散湍流模型的研究和非均匀下垫面与大气边界层之间的相互作用对污染扩散影响的研究仍需进一步深入进行。

近年来，除了大气污染扩散研究外，对室内污染物扩散规律的研究和矿井、隧道排污的研究等气体污染扩散问题也引起了重视。

6.2 质量迁移研究

在风工程中，质量迁移研究的主要内容是固态粒子在大气中的运动。多年来，我国在风洞中对堆料装卸和运输中引起的粉尘污染问题、防护林防风沙效应问题、铁路基石侵蚀问题、风雪流防护问题等进行了模拟试验，提供了很多有益的科学数据。近年来，开始用数值模拟的方法进行质量迁移研究。

在质量迁移研究中，对风沙运动特别是沙尘暴的研究尤其令人关注。通过对沙尘暴的跟

踪采集和分析以及有关气象资料数据可以研究沙尘暴的起源，迁移和沉降的规律。由于沙尘暴是一种远距离的迁移，因此不仅涉及到湍流扩散，还同对流、干沉降、湿沉降和大气化学反应等现象有关，非常复杂，还有待在观测分析的基础上进行深入的细化分析研究，以对沙尘暴进行准确的预测。

7 风工程的研究方法

风工程的研究内容通常是针对工程项目的，因此如何进行工程模拟（包括物理模拟和数学模拟）是风工程研究中的一个非常重要的问题。目前物理模拟的方法主要是风洞试验，数值模拟的方法主要是数值计算。除了工程模拟方法外，在风工程研究中还经常采用现场测试的方法。

7.1 风洞试验

风洞试验时，要使风洞模拟的大气边界层流动与实际大气中的流动情况完全相似，则必须满足几何相似、运动相似、动力相似、热力相似以及边界条件相似等，显然是不可能的，因此，只能针对具体的研究对象做到部分地或近似地模拟大气边界层。在风洞中进行建筑结构风荷载和风响应试验时，要求模拟速度层，即满足平均风速廓线和湍流结构特性相似。研究表明：在大气边界层底层强湍流场中，湍流结构特性的模拟比雷诺数模拟更具重要性。在风洞中模拟速度边界层的主要方法是采用旋涡发生器的人工形成法和在长试验段中调节地面粗糙高度的自然生成法两种。目前的主要难点是地形对近地层风特性影响的模拟和风切变（风速和风向）同时沿高度变化的模拟。

在风洞中进行污染扩散试验时，则除了要求模拟速度边界层外，还要求模拟温度边界层，满足平均温度廓线和温度层结特性相似。在风洞中模拟温度边界层的主要方法也有人工形成法和自然生成法两种。自然生成法是将加热（或冷却）的气流与被冷却（或加热）的风洞底板产生热交换来生成。人工形成法是将气流通过一个可沿高度调节气流温度的温度分层加热器来形成。在风洞中模拟温度边界层要比模拟速度边界层复杂，主要原因是在极低风速下才能形成比较稳定的温度层结，要求风洞试验段的风速在 5m/s 以下，极低风速对风洞流场将产生影响，因此，要进行综合优化设计。

风洞试验另一个有待探讨的问题是洞壁干扰的影响、地面效应的影响和雷诺数的影响，即风洞试验的数据如何用于对工程的评估。

7.2 数值计算

近十年来，随着计算流体动力学（CFD）的发展，除了航空和航天领域中得到广泛应用外，在风工程领域中亦得到了普遍的应用，并形成了一个分支学科，称之为计算风工程（CWE）。在风工程领域中研究的问题通常是钝体的低速不可压流动，钝体绕流是一种复杂的非定常流动，在流场中有驻点流、转捩、分离、旋涡和尾流，给数学模拟带来一定的困难。

首先是湍流模型，传统的 k-ε 湍流模型在处理外形绕流问题时，常常对驻点及附近区域流场的湍流动能预测过高；另一方面，在物体前缘，除靠近物体表面的薄层外，流场的涡量却很低，因此，在计算风工程研究中湍流模型一直是最关注的课题。

其次是在求解三维不可压 N-S 方程时，为了应用各种可压缩流的数值计算方法，一般采用人工压缩性方法。但是，在计算粘性流动时收敛困难，稳定性差，特别是网格数增加后问题更突出，因此，在计算风工程研究中，提高人工压缩性方法求解定常不可压流问题的收敛性，亦是一个重要的研究内容，目前主要采用预处理法和多重网格法。

最后针对风工程研究的对象要解决动态非定常流场的数值计算方法，目前采用离散涡方法是一种技术途径，但是需要提高精度。

7.3 现场测试

现场测试一种直接的研究方法，例如：测量局部地区的风谱，在建筑结构表面用传感器测量风荷载和风响应；在高速行驶列车表面用传感器测量列车交会时的压力波；通过环境污染的大量监测和数据处理，总结经验或半经验的污染物迁移和扩散的模式。现场测试较真实地对工程模拟的结果进行验证，但是要花费大量的人力、物力和时间。特别是由于现场测试时，气象条件和地形条件等难以控制和改变，因此，用这种方法进行规律性的研究是很困难的。

风工程的研究内容除了上面提及的外，还有很多方面，如体育器械空气动力特性研究、船舶空气动力特性研究等，本文不再赘述。风工程不仅对国民经济建设起到重要的作用，而且对国防建设也有重要的影响。风工程研究的内容很多，有广阔的发展前景。风工程研究既要解决实际的工程问题，又要注重风工程学科的发展。风工程研究要走风洞试验、数值计算和现场测试相结合的道路。风工程是一门综合的技术科学，要进行多学科之间的联合。

参 考 文 献

1 Simiu E. Scanlan RH. Wind effects on structure. New York: Wiley，1996

2 项海帆，林志兴．桥梁抗风设计规范的研究课题．第八届全国结构风效应学术会议论文集，1997，10

3 颜大椿．风工程中的风洞模拟和现场观测技术．第六届工业与环境流体力学会议论文集，1999，8

4 桑建国，林官明，张伯寅.大气中传输扩散计算中的数值方法．第五届全国风工程及工业空气动力学学术会议论文集，1998，9

5 周瑜平，王懋勋．我国车辆空气动力学试验研究综述．第五届全国风工程及工业空气动力学学术会议论文集，1998，9

6 门楷，丘懋德，宗相道．高层建筑结构抗风设计的若干问题．第八届全国结构风效应学术会议论文集，1997，10

7 王开春，朱国林，金钢．高速列车气动力数值计算研究．第十届全国计算流体力学会议论文集，2000，9

8 贺德馨．风能利用与西部开发．中国科协 2000 年学术年会论文集，2000，9

9 李家春．环境与力学．21 世纪中国力学研讨会论文集，1994，9

自然环境中的流动与输运[1)]

李家春

（中国科学院力学研究所，北京 100080）

摘要 针对 21 世纪的环境问题，讨论了典型的自然环境中的流动、输运和其他物理、化学和生物过程，分析了研究现状和趋向。通过实例说明用基于过程的动力学方法解决我国西部开发中的实际问题。

关键词 自然环境，流动，输运，辐射，化学反应，生物过程，生态演替

1 21 世纪的环境问题

人类已经跨入 21 世纪。

回顾过去，从 50 年代起，人类开始觉察到了日益严重的环境问题的威胁，并从中吸取了教训。通过 1972 年斯德哥尔摩联合国环境大会（UNCHE）和 1992 年里约热内卢联合国环境与发展大会（UNCED），逐步取得共识：环境问题是全人类的事业，无论发达国家还是发展中国家都应将保护和改善环境作为自己义不容辞的职责，必须坚持可持续发展的道路，采取集约型经济发展的模式，不能走先污染，后治理的老路 (不破敬一郎 1995，李家春，吴承康 1998)[1, 2]。

展望未来，世界人口还在增长，主要是非洲，印度，亚洲等地区。人们对物质文明的需求，因而对能源和资源的消耗也在不断增长，因此，21 世纪在这已有 60 亿人口居住的星球上，人类活动对环境的压力不会减轻，环境恶化的趋势不会缓解。可以肯定，环境问题仍然是对人类的重大挑战 (Reible 1999)[3]。现代社会环境问题的特征是：

(1) 综合性的环境问题频繁发生。50 年前，令人注目的仅局限于污染问题，近一二十年来，涉及的问题要广泛得多，如：

气候异常：指的是平均气温与降水的变迁，如：1980 年冷夏，1984 年酷暑与特大降雪，1989 年暖冬，1984，1986，1987 年干旱和 1988 年连阴雨。影响到全球范围的有厄尔尼诺，温室效应等 (朝仓正 1990)[4]。

自然灾害：指的是因各种因素引起的风速、温度、降水、水位等环境因素突然变化，对人类生活，牲畜，作物生长造成威胁的事件，包括：洪水，台风，龙卷风，风暴潮，火山，地震，滑坡，泥石流，尘暴，风雪流等。

环境污染：指的是因工农业生产和人类生活中排放到大气，水体，土壤中的各种有害物质，如：硫氧化物，氮氧化物，碳氢化合物，氨氮，有机磷，毒物等它们对人类和生物的健康和生长造成危害。还包括发电厂的热污染，核废料的放射性污染和导致臭氧层破坏的氯氟烃。

生态恶化：指的是由于环境因素的变化，造成原来生态系统的平衡失调，生态演替过程的改变，如：过度放牧，过度捕捞，过度采伐，过度开垦造成的土地荒漠化，草场退化，物种减少等现象 (不破敬一郎 1995，孙儒泳 1986)[1, 5]。

上述这些问题不是孤立的，而是互相联系的，比如气候的变化可导致洪涝，干旱灾情；温室效应会导致海平面上升，沿海城市淹没；有机磷，有机氮的污染可以触发藻类大量繁殖，引起赤潮，生态环境的恶化；火山爆发会改变全球和区域气候。

1) 国家科技部攀登计划和国家基金委自然科学基金重点资助项目(批准号：19832060)

(2) 时空多尺度普遍存在。以上所列出的环境问题的时空尺度跨度大：空间尺度从全球尺度，天气尺度，流域尺度，中小尺度到微尺度，时间尺度可以从百年量级到秒的量级。在气候系统中有古气候变化（包括万年以上的地质期，千年左右的历史期，数百年的超长期变化)和现代气候变化(包括：长期、数十年的年代际，中期、数年的年际和短期、月或季的变化) (Biniston 1998，Biggs 1996，李崇银 1995)[6-8]。虽然人们更关心后者，但研究前者亦可对人们了解规律有启示。由于外界的强迫本身是多尺度的，如：太阳轨道参数变化，地球磁场的 22 年周期，太阳黑子活动，地球的公转，自转，月球的运动。另一方面，因大小尺度的相互作用，所以可以出现多尺度现象。然而，凡是不需要分辨的尺度可以用平均量来估计，如：海洋潮汐的余流，Stokes 波的漂流。要考虑不能分辨的小尺度的影响，必须用亚格子模型或参数化方法处理。比如：云物理过程，大气边界层和水圈，地圈，冰雪圈界面过程的参数化以及湍流中的亚格子模型。通过高分辨率的计算和实验先验地检验现有的模式是关键性的 (Zhou 1998，Meneveau 2000)[9]。所以，现在看来，环境力学不仅是如 Batchelor 所说的小尺度的地球流体力学，而是多尺度的流体力学分支 (Turner 2000)[10]。

(3) 人类活动的干扰不容忽视。人类活动的主要影响有：微量气体诸如二氧化碳，甲烷的排放在过去 250 年间有很大增长，致使气温增加；工业排放二氧化硫和海生物的 DMS (硫化氢，二甲基硫醚)形成气溶胶。它可以吸收或散射辐射，并形成凝结核，影响降水与天气。土地利用的变化包括：森林变为耕地，草原变为沙漠，改变了反照率和下垫面的水热特性，从而影响区域的气候。这些人为的干扰往往不易同自然的变迁相区分 (Biggs 1996)[7]。

2 自然环境中的流动与输运

流体力学研究的对象可以分为工业与自然环境中的流动，两者往往有很大的不同。流体力学研究人员较了解前者，对诸如：边界层，混合层，槽流，管流，射流等典型流动已耳熟能详。对于后者，尚需认识，甚至进一步研究。这里，我们列出较重要的范例。另一方面，环境问题也离不开其他物理，化学和生物过程，我们也进行了一些讨论。它们都是研究环境问题的重要基础和基本环节。

2.1 流动过程

这里仅讨论与环境问题紧密有关的特殊流动。

大气边界层 人类和生物大多生活在贴近地表的大气边界层内，所以是环境流体力学研究的重要对象。大气边界层是厚 1~2km 受下垫面影响的下层大气，它的运动是由外层自由大气驱动的。接近于地面 100m 是常通量的近地层。近三四十年来，人们首先得到了 Monin-Obukhov 相似律。相比于近地层速度的对数廓线，它可以考虑大气稳定度的影响。我们在这里列出经过大量现场观测（如：澳大利亚 Wagnara）检验的 Businger-Dyer 公式

$$u=\frac{u_*}{\kappa}\left(\ln\frac{z}{z_0}-\psi_M\right)$$

不稳定情况

$$\psi_M=2\ln((1+\phi_M^{-1})/2)+\ln((1+\phi_M^2))+2\arctan(\phi_M^{-1})+\pi/2$$

$$\phi_M=(1-16\varsigma)^{-0.25}$$

稳定情况

$$\psi_M=-4.7\varsigma$$

其中

$$\varsigma = \frac{z}{L}, \qquad L = \frac{\vartheta(\tau/\rho)^{3/2}}{kg(H/\rho C_p)}$$

L 为 Monin-Obukhov 长度。Rossby 相似律可推广到全边界层。70 年代以后，由于湍流测量技术的进步和湍流模拟的发展，获得了大气边界层湍流的统计行为和相干结构。其中，对流边界层研究得比较充分。对流边界层在近地层以上是混合层(0.1~0.8h)和对流层顶附近的卷夹层(0.8~1.2h)。研究重点是混合层顶的卷夹、能量传输的逆梯度现象，对流涡在湍流模拟和通量计算中的作用，并发现了对流边界层中的上升流与下沉流动的不对称性。稳定边界层的研究相对滞后，原因是内波与湍流的相互作用，稳定边界层的高度受辐射冷却等多种因素影响，低湍流度给测试带来困难 (Li 1992)[11]。由于植被的阻滞作用，在冠层附近，速度廓线有拐点，所以在那里形成剪切层。最近提出的混合层比拟 (Finnigan 2000)[12]，使我们对于植被层内湍流的统计特性和结构的认识都有了新的进展。大气边界层的研究成果已被应用于天气，气候和污染预报。未来的研究应重视云盖边界层，非均匀下垫面边界层及其在全球和区域大气环流模式中的应用 (Garreratt 1996)[13]。

振荡边界层　振荡边界层可以由边界往复运动或水流往复运动产生。在实际问题中，表面波或潮汐运动可以在水底形成这类非定常的边界层，它对于海岸带，河口的物质输运是重要的。振荡边界层的厚度为

$$\delta_s = \sqrt{\nu T}$$

其中，T 为周期，ν 为运动黏度。所以，波浪造成的边界层厚度仅为厘米量级。由于潮汐较长的周期，边界层可以遍及整层水体。层流状态的振荡边界层的速度分布为

$$u(z,t) - u_\infty(t) = A\omega \exp\left[-(1+i)\frac{z}{\delta_s}\right]e^{i\omega t}$$

其状态的转换取决于雷诺数

$$Re_\delta = A\sqrt{\frac{2\omega}{\nu}}$$

其中，A 为振幅。按雷诺数大小，可以分为层流，扰动层流，间隙湍流，完全发展湍流。雷诺数小于 100 时为层流，大于 3500 时为完全发展湍流，其间可以是部分时间是层流，部分时间是湍流 (李家春等 1999)[14]。若考虑自由面变形，可以应用黏性波浪理论。列维奇(1955)[15]给出了无限深的解析解，在小黏性假定下，与无黏性理想流体波动理论的结果不同之处为：波其幅以指数律衰减，衰减系数为

$$d = 2\nu k^2$$

由于自然界有径流，沿岸流的存在，需要研究波流共同作用下的海底边界层，还要考虑岸线，地形，盐度的影响。

浮力对流　在自然环境中，由于温度、组分的不同，可以造成密度差，在重力场中会由此产生浮力对流，除了大气边界层外，海洋中的涌升流，热盐环流，地球内部的岩浆库，地幔对流均属于这类流动 (Turner 2000)[16]。浮力对流最大的特点是其特征速度不是事先给定的，而是由温度差或密度差决定的，其无量纲数是 Grashof 数

$$Gr = \frac{\alpha g \Delta T L}{\nu}$$

其中，α 为体积膨胀系数。对于温度差，密度差不大的低速的环境问题，往往采用 Boussinesq 近似，即除了在浮力项外，认为流体是不可压缩的，从而简化了问题。在烟囱或排水口上，会

因浮力形成羽流，对上升距离，流动逆转以及卷夹周围流体的混合过程，已经进行了一些研究。需要研究伴有相变的浮力对流，在多孔介质中的浮力对流等 (Lumley 1996) [17]。

旋转系统中的流动 研究在旋转的地球上的大尺度、低速流动，必须考虑科氏力的影响。衡量惯性力与科氏力比值的无量纲数为罗斯贝数

$$Ro = \frac{U}{fL}$$

其中，$f = 2\Omega \sin\phi$ 为科氏参数，U，L 为特征长度。由于大气运动流速较大，所以，大气运动在千公里，海洋运动在百公里量级，要计及旋转效应。泰勒柱，地转流，艾克曼效应，海流的西部强化都是旋转效应的体现。旋转效应随纬度而变，如果研究的纬度范围不大，可以采用 f 平面或 β 平面近似。在旋转系统中的旋涡运动的特点是：位势涡度守恒。因此，在热带气旋运动中，会形成 β 效应涡对艾克曼效应非对称结构，导致异常路径发生。在旋转系统中，垂向速度分量远小于水平速度分量，运动是准二维的。由于没有涡的拉伸变形，所以，能量从小尺度向大尺度转移，涡拟能有正向级串现象，所以，地球流体是二维湍流的天然实验室。此外，在临界距离以内，同向涡会合并(Lumley 1996，Hopfinger 1988) [17, 18]。

2.2 输运过程

在自然界中，有许多大小不等的微小颗粒，如：烟雾，尘埃，火山灰，盐粒，云雾，泥沙，花粉，病毒等。若它们的尺度在 1~100nm，在大气和水中组成气溶胶或悬浮液。研究这一分散体系，可以用不同的模型，如：非牛顿流模型（如：高含沙水流，泥浆），单颗粒模型，被动标量模型，多相流模型等。所谓被动标量模型指的是分散质的浓度很小，不会影响分散介质流动行为，所以，可以首先获得流场性质，然后预测被动标量的输运特性，两者之间不互相耦合。我们要研究分散质在分散介质中的扩散，沉降，絮凝等过程。

扩散 在温度变化不大的情况下，预测温度场也可以采用这个模型。层流运动的扩散系数可以由分子动理论导出。在湍流的情况下，Taylor 统计理论的结果表明：短时位移方差与时间平方成正比，而长时间位移方差与 Lagrange 积分时间尺度和时间之积成正比。所以扩散系数与速度方差与 Lagrange 积分时间尺度之积成正比 (Brenner 2000) [19]。对于悬浮液的情况，微小粒子的迁移是由 Brown 运动引起的。根据 Einstein 理论，其类比的扩散系数表达式为

$$D = \frac{kT}{6\pi\nu R}$$

其中，k 是玻兹曼常数，T 是绝对温度，ν 是运动黏度，R 是分散质颗粒半径。

湍流运动的扩散系数是依赖于流动的，所以并非是常数。最近，对于被动标量的研究指出了被动标量场与速度场统计行为的区别：表现在即使速度场是高斯分布的，标量场的 *pdf* 仍是非高斯分布的；网格湍流的被动标量可以在低雷诺数时满足标度律；被动标量比速度场有更大的间歇性；在惯性子区与耗散区均出现各向异性，所以，这是一个有待深入研究的领域 (Warhaft 2000) [20]。此外，应注意到湍流的大尺度相干结构将对物质，能量输运起主导作用。

沉降　分散体系中的分散质在重力场中会发生沉降，并从介质中分离出来。对于固体颗粒，可以用 Stokes 公式计算阻力与沉速。对于气体中的球形液滴或水中的气泡，由于液滴或气泡内的流体被带动，阻滞较小，所以沉速较大。其表达式为

$$U = \frac{2}{3}\frac{\rho - \rho'}{\mu} g a^2 \frac{\mu + \mu' + 2e/3a}{2\mu + 3\mu' + 2e/a}$$

其中，a 为颗粒半径，e 为表面黏度系数，即表面张力与表面速度改变之比，ρ 为密度，μ 为黏度，上标 指内部流体的特性。对于大的液滴或气泡，由于形状变化和雷诺数增大，沉速

可以用如下公式

$$U=\sqrt{\frac{2\rho' gV}{C_f\rho S}}$$

其中，V 为液滴（或气泡）体积，S 为迎风面积，C 为阻力系数。增添表面活性物质，改变表面张力也能改变其沉降特性。上述过程对于泥沙输运，酸雨的干、湿沉降研究十分重要。

凝并 分散质通过布朗运动互相接近到很近的距离，使范德华力起作用时，就会发生凝并现象。但是，由于颗粒表面的电荷排斥力是稳定因素，阻止它们接近到很近的距离。如果不考虑这种稳定因素，则称为快速凝并，可以获得这种由布朗运动引起的凝并过程时间演化规律

$$n=\frac{n_0}{1+t/T},\qquad T=8\pi DRn_0$$

其中，n 为粒子数，R 为凝并半径(等于质点直径)，D 为布朗扩散系数，T 为凝并特征时间。也可以计算剪切流中的凝并过程，称为梯度凝并。凝并发生在大气气溶胶，泥沙输运中。凝并可以极大地影响沉速。类似地，还需要研究溶解，乳化，分裂。在界面上的吸附及其它物质和能量交换过程也应受到重视。

2.3 其他物理、化学、生物过程

辐射 太阳辐射是地球上万物生长的能量来源，是大气、海洋运动的主要驱动力。在地球大气层顶部的太阳辐射通量称为太阳常数

$$I_0=1.97\text{cal}/(\text{cm}^2\cdot\text{min})=1374\text{W/m}^2$$

这是最近卫星的测量数据，它也随太阳活动和日地距离而有微小变化。太阳辐射通过大气层后，到达地面由直接辐射和散射辐射组成，前者可以表达为

$$I=\frac{I_0}{\rho^2}\sin h=\frac{I_0}{\rho^2}\cos Z=$$

$$\frac{I_0}{\rho^2}(\sin\phi\sin\delta+\cos\phi\cos\delta\cos\omega)$$

其中，ρ 是相对日地距离，h 是太阳高度，ϕ 是纬度，δ 是赤纬，ω 是时角。经过大气层后，由上式和透明系数（或浑浊度）及云量可以计算直接辐射 S。此外，大气中含气体分子，气溶胶和小水滴。气体分子直径小于电磁波长，发生 Rayleigh 散射，气溶胶直径与波长相当，发生米氏散射，散射系数依赖于波长，而且对于入射方向呈方向非均匀分布。于是可以得到地面的总辐射 Q 为直接辐射 S 和散射辐射 q 之和

$$Q=S+q$$

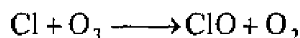
地面接受的辐射会发生反射，反射系数 α 依赖于下垫面的颜色，湿度，粗糙度。另一方面，因地表温度较低，会发生长波辐射 U，并从大气层部分地返回，称为逆辐射 G，两者之差为有效辐射 E。于是，由地表的辐射平衡可以得到净辐射 R 的表达式为

$$R=(1-\alpha)Q-E$$

这是地面加热与发生感热、潜热交换的能量来源。(Berge 1990)[21]在水质模型中，考虑浮游生物生长，也需要计及辐射效应 (Hamilton 1997)[22]。

化学反应 在自然环境流动中必须考虑的典型化学反应举例如下(不破敬一郎 1995)[1]：

臭氧层反应 在对流层中氟里昂呈均匀分布，到平流层因扩散和光分解，氟里昂急剧减少。紫外线使氟里昂释放的氯原子通过如下反应破坏臭氧



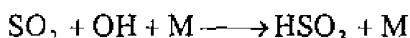
$$Cl + O_3 \longrightarrow ClO + O_2$$



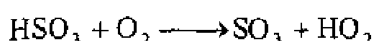
$$ClO + O \longrightarrow Cl + O_2$$

由于一氧化氯可以与平流层中的氧原子继续生成氯原子，并与臭氧反应，所以上述反应可以连锁式地发生，使一个氯原子长期存在，乃至破坏数万个臭氧分子。平流层中化学反应十分复杂，如：氢，氢氧自由基，甲烷，氮氧化物也直接，间接地参与反应。要解释南极上空的臭氧空洞，可能要考虑平流层中硫酸盐气溶胶表面的非均相反应。

酸雨反应机理　我们已经知道，大气中的硫氧化物，氮氧化物等是产生酸雨的主要因素，它们生成酸性物质的反应为



$$SO_2 + OH + M \longrightarrow HSO_3 + M$$



$$HSO_3 + O_2 \longrightarrow SO_3 + HO_2$$

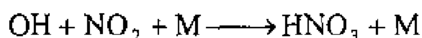


$$SO_3 + H_2O \longrightarrow H_2SO_4$$



$$H_2O + NO \longrightarrow HO + NO_2$$

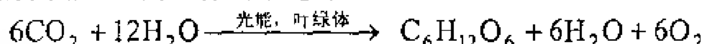
其中，M 为第三种物质。由于最后一个反应又生成了氢氧自由基，可以使反应连锁式地进行下去。至于硝酸形成的反应为



$$OH + NO_2 + M \longrightarrow HNO_3 + M$$

其反应速率要比硫酸形成的速率高一个数量级，所以，氮氧化物的平均寿命为 1d，比硫氧化物的寿命 10d 短得多。由于化学反应需要时间，所以仅在污染物远距离输送时，才需要考虑化学反应与干、湿沉降 (Lei 1998)[23]。

生物过程　对于绿色植物，主要有水分，矿物质和有机物的代谢。水分通过根系吸收，叶面气孔蒸发。有机物的代谢通过光合作用来进行



$$6CO_2 + 12H_2O \xrightarrow{\text{光能，叶绿体}} C_6H_{12}O_6 + 6H_2O + 6O_2$$

光合作用将无机物转变为有机物，并将光能转变为化学能以糖的形式储藏在植物体内。请注意生物对于外界环境的适应与调节能力，比如：在缺水时，叶面气孔会自动关闭，以减少蒸发，这可以在参数化的过程中加以体现 (Rosenberg 1974)[24]。在研究湖泊，海洋水质模型时，由于氮、磷污染，可以导致水体的富营养化。在模型中，需要考虑的因素很多，除了流体动力学过程外，需研究的生物化学过程有：浮游动物的生长，浮游植物代谢，营养盐循环，溶解氧、总磷，总氮平衡。对于长期气候模型来说，二氧化碳的如上的生物地球化学循环也是不可忽略的 (Hamilton 1997)[22]。

生态演替　众所周知，一切生物都会发生从低级到高级，简单到复杂的变化。当资源足够利用时，物种不断进化，生态系统趋于成熟。一般，自然进化需要数万至数十万年漫长的时间。但是，在有外界或人工干扰的生态系统，由于风暴，火灾和过度砍伐，放牧，捕捞，改变了生态系统的结构，导致了短期（几年或几十年）的物种更迭称为演替，这是从事环境科学研究的人员必须关心的。

在研究物理，化学，生物过程是要注意区分平衡和速率过程。对于前者，可以由流体的状态确定其组分；对于后者，要确定速率常数，以源汇项的形式出现在连续性方程及动量、能量方程中。综上所述，环境问题除了与力学、物理、化学学科有关外，必然涉及地球科学中的大气、海洋、水文、地质、地理领域；涉及生物科学中的生物化学，植物生理，生态领域；涉及工程科学的水利工程，海岸工程，能源工程等领域，所以是多学科交叉的。

3　环境力学的研究目标与途径

力学工作者的目标不是进行常规的天气，海浪，污染，灾害预报和防治技术，而是研究其中的宏观定性行为尚不清楚，尚有争议的和目前认为定量预报不够精确，其原因不明的那类问题。因此，应采用区别与传统的环境问题的研究方法。要着重研究环境问题发生、发展和演化的动力学过程，获得定性和定量的认识，将机理研究，规律分析与防治措施有机地结合起来，从而使我们的决策更加科学，更加优化。基于过程(process-based)的研究方法是环境力学的主要途径。从本质上来看，环境问题是由携带着动量、能量、物质的流体运动和导致的迁移造成的，所以上节研究的最基本的流动、输运过程及其有关的物理、化学、生物过程，尤其是它们之间的耦合，都应当是环境流体力学工作者需要认真研究的对象。

我国是发展中国家，改革开放以来，经济的高速发展带来了诸多的环境问题。除了与发达国家当年情况有许多共同之处外，我国西部干旱地区的环境问题具有中国的特色。解决这些难题可以为我国的西部开发作出贡献，也可以推进环境力学研究的进展。我们仅以此为例说明环境力学的研究途径：

实例 1　三北防护林的种植。50 年代，为了保护新建的包兰铁路不受腾格里沙漠的侵害，中国科学院沙漠所在中卫地区用草方格技术成功地种植了宽 500m 的油蒿，柠条，沙拐枣等耐旱植物，形成防护林带。30 年后，发现这些树木不能继续生存。我们用强迫恢复法，湍流模式模拟了植被层的动量，水分，能量交换，不同树种的需水量，揭示了出现干沙层，结皮层，导致供水不足，生态演替的机理，因此，选择节水树种，控制间距，破坏结皮层可以延长防护林的生长年代 (Berge 1990，李家春 1999a，b，谢正桐 1998)[21，25~27]。

实例 2　黄土高原侵蚀。我们运用考虑降水，入渗的坡面流模型。入渗采用修正的 Green-Ampton 模型，坡面流采用运动波模型。根据黄土高原三个地区的降水，土壤特性，预测了径流与侵蚀特性，符合实际观测。改善了二维模型，获得的水流分叉与降水大厅实验一致，为准确计算土壤侵蚀奠定了基础 (Parsons 1992)[28]。

4　结束语

可以预见，由于人口和物质需求的继续增长，21 世纪的环境问题不会缓解。流体力学工作者应该针对全球和我国的环境问题，研究自然环境中的流动、输运和其他物理、化学、生物过程。基于过程的研究途径可以使研究的定性和定量的预测都有所改进，并为控制与防治环境恶化提出相应的措施。为了使我国的山川更加秀美，需要更多的流体力学工作者从事环境流动的研究，并与相关学科的研究人员紧密合作，为改善人类的生存环境、开发我国西部地区经济，发展环境科学作出贡献。

参　考　文　献

1　不破敬　郎. 地球环境手册. 中国环境科学出版社，1995

2　李家春，吴承康. 环境力学与可持续发展. 力学进展，1998，18(4)：433~441

3　Reible DD Fundamentals of Environmental Engineering，Lewis Publisher，1999

4　朝仓正. 气候异常与环境破坏. 气象出版社，1990

5　孙儒泳，林特涙. 近代的生态学. 科学出版社，1986

6　Beniston M From Turbulence to Climate. *Springer-Verlag*，1998

7　Biggs GR. The Oceans and Climate. Cambrige University Press，1996

8　李崇银. 气候动力学引论. 气象出版社，1995

9　Zhou Y. Advances in the fundamental aspects of turbulence：energy transfer，interracting scales and selfpreservation in isotropic decay. *Appl Mech Rev*，1998，51(4)：267~301

10 Meneveau C, Katz J. Scale-invariant and turbulent models for large eddy simulation. *Ann Rev Fluid Mech*, 2000, 32: 1~32

11 Li JC. Turbulence in atmosphere and ocean, in "Some new Trends in TPFM", Peking University Press, Beijing, 1992. 427~433

12 Finnigan J. Turbulence in plant canopy. *Ann Rev Fluid Mech*, 2000, 32: 519~570

13 Garreratt JR et al. The atmosheric boundary layer-sdvsnces in knowledge and applications, in "Boundary Layer Meteorology, 25 Anniversary Volume", Rds by Garratt JR, Kluwer Academic Publishers, Nerherland, 1996. 9~37

14 李家春，周济福，谢正桐(c). 振荡边界层及其应用研究. 力学进展，1999，29 (4): 451~460

15 列维奇. 物理化学流体力学. 上海科技出版社，1959

16 Turner JS. Development of geophysical fluid dynamics: the experiment of laboratory experiment. *Appl Mech Rev*, 2000, 53(3): 11~22

17 Lumley JL et al. Research Trends in Fluid Dynamics. AIP, 1996

18 Hopfinger EJ. Turbulence and vortices in rotating fluids, in "Theoretical and Applied Mechanics", Eds by Germain P, Elsevier Science Publisher, Netherland, 1988. 117~138

19 Brenner MP, Stone HA. Modern classical physics through the work of GI Taylor. *Physics Today*, 2000, 5: 30~35

20 Warhaft Z. Passive scalar in turbulence. *Ann Rev Fluid Mech*, 2000, 32: 203~240

21 Ten Berge H M F. Heat and water transfer in bare topsoil and the lower atmosphere, Pudoc, Wageningen, Netherland, 1990

22 Hamilton DP, Schladov SG. Prediction of water quality in lakes and reservoirs. *Ecological modeling*, 1997, 96: 91~123

23 Lei XE et al. Physical, Chemical, Biological Processes and Mathematical Model on Air Pollution, China Meteorological Press, 1998

24 Rosenberg NJ. Microclimate: Biological Environment, John Wiley & Sons, 1974

25 李家春等(a). 干旱地区陆面过程耦合模式及其应用. 应用数学与力学，1999，20 (1): 1~10

26 李家春，谢正桐(b). 植被层湍流的大涡模拟. 力学学报，1999，31(4): 406~414

27 谢正桐，李家春，姚德良. 考虑植被影响的陆气耦合模式. 力学学报，1998，18(3): 267~276

28 Parsons AJ, Abrahams AD. Overland Flows, UCL Press, 1992

29 周济福，刘青泉，李家春. 河口混合过程研究. 中国科学，A辑，1999，29(9): 834~843

特征张量、并矢张量和方向平均 [1)]

黄永念

(北京大学力学与工程科学系，湍流研究国家重点实验室，北京 100871)

摘要　90年代初，我们曾在求解常系数线性常微分方程组的显式解时引进了一个特征张量的概念。最近我们又发现这个特征张量实际上是一个并矢张量，而将一般张量用并矢张量表示后，其张量分析和运算可以大大简化。由此我们发现理性力学中很多标量和向量不变量都是不独立的。我们还可以给出湍流雷诺应力非线性代数模式的最一般表示。

关键词　特征张量，并矢张量，不变量，本构关系

引　言

张量分析在力学研究中起着十分重要的作用，因为力学中很多重要的物理量都是用张量来表示的。例如，理性力学的本构关系就是联系应力张量和应变张量或应变率张量的一种关系式。张量有很多分量，它们在坐标变换下是要变化的。张量也有很多在坐标变换下并不变化的不变量[1]。这些不变量反映了张量所代表的物理量的一些本质的特性。因此，讨论张量的不变量之间的关系就是了解张量物理量的特性的一个方面。另外在张量运算过程中，如果张量的表示得法，不仅分析计算可以大大简化，而且数值计算的工作量也可以大大减少。本文就张量的表示形式进行讨论，以给出一些简单的表示方式。

1　任意二阶张量的并矢张量表示

任意一个给定的二阶张量 B_{ij} 可以分解为对称张量和反对称张量两部分

$$B_{ij}=P_{ij}+W_{ij} \tag{1}$$

其中对称张量 P_{ij} 的主轴方向的单位向量(即特征向量)为 l_i,m_i,n_i。它们对应的特征值分别为 e_1,e_2,e_3。我们假定这些特征值各不相等。反对称张量 W_{ij} 则可以用一个向量 ω_i 表示为

$$W_{ij}=-\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_k \tag{2}$$

其中向量 ω_k 在对称张量的主轴方向可分解为

$$\omega_k=\omega_1^* l_k+\omega_2^* m_k+\omega_3^* n_k \tag{3}$$

我们可以直接验证

$$\varepsilon_{ijk}l_k=m_i n_j-m_j n_i,\qquad \varepsilon_{ijk}m_k=n_i l_j-n_j l_i,\qquad \varepsilon_{ijk}n_k=l_i m_j-l_j m_i \tag{4}$$

因此

$$W_{ij}=-\frac{1}{2}\omega_1^*(m_i n_j-m_j n_i)-\frac{1}{2}\omega_2^*(n_i l_j-n_j l_i)-\frac{1}{2}\omega_3^*(l_i m_j-l_j m_i) \tag{5}$$

另外我们利用对称张量的表达式

---

1) 九五攀登预选项目“非线性科学”和“流体与空气动力学关键基础问题研究”基金资助项目

$$P_{ij} = e_1 l_i l_j + e_2 m_i m_j + e_3 n_i n_j \tag{6}$$

可以给出张量 B_{ij} 的并矢表达式

$$B_{ij} = e_1 l_i l_j + e_2 m_i m_j + e_3 n_i n_j - \frac{1}{2}\omega_1^*(m_i n_j - m_j n_i) - \frac{1}{2}\omega_2^*(n_i l_j - n_j l_i) - \frac{1}{2}\omega_3^*(l_i m_j - l_j m_i) \tag{7}$$

由于向量 l_i, m_i, n_i 的正交性，这种并矢张量的形式在张量计算中使用非常方便。

在实际情况中，有时需要将一个二阶张量 A_{ij} 用另一个已知的二阶张量 B_{ij} 来表示，例如理性力学中的本构关系。此时我们可以选择已知的二阶张量的对称张量的主轴方向作为坐标向量，它们是给定的一组单位正交向量 l_i, m_i, n_i； 则一个二阶张量 A_{ij} 可表示为

$$\begin{aligned} A_{ij} = {} & A_{11} l_i l_j + A_{12} l_i m_j + A_{13} l_i n_j + A_{21} l_j m_i + A_{22} m_i m_j + \\ & A_{23} m_i n_j + A_{31} l_j n_i + A_{32} m_j n_i + A_{33} n_i n_j \end{aligned} \tag{8}$$

这里有九个基本张量。它们同样可以用另外一组给定的对称张量 P_{ij} 和反对称张量 W_{ij} 构成的下述九个张量来表示

$$\delta_{ij}, P_{ij}, W_{ij}, P_{ij}^2, W_{ij}^2, P_{im}W_{mj}, W_{im}P_{mj}, P_{im}^2 W_{mj}, W_{im}P_{mj}^2$$

证明是将一个任意二阶张量 A_{ij} 分解为对称张量和反对称张量两部分

$$\begin{aligned} A_{ij} = {} & A_{11} l_i l_j + A_{22} m_i m_j + A_{33} n_i n_j + \frac{1}{2}(A_{12} + A_{21})(l_i m_j + l_j m_i) + \\ & \frac{1}{2}(A_{23} + A_{32})(m_i n_j + m_j n_i) + \frac{1}{2}(A_{31} + A_{13})(n_i l_j + n_j l_i) + \\ & \frac{1}{2}(A_{12} - A_{21})(l_i m_j - l_j m_i) + \frac{1}{2}(A_{23} - A_{32})(m_i n_j - m_j n_i) + \\ & \frac{1}{2}(A_{31} - A_{13})(n_i l_j - n_j l_i) \end{aligned} \tag{9}$$

其中九个对称并矢张量可以用上述九个张量来表示，因为我们有

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j \\ P_{ij} &= e_1 l_i l_j + e_2 m_i m_j + e_3 n_i n_j \\ P_{ij}^2 &= e_1^2 l_i l_j + e_2^2 m_i m_j + e_3^2 n_i n_j \end{aligned} \tag{10}$$

或

$$\begin{aligned} l_i l_j &= c_1[P_{ij}^2 - (e_2 + e_3)P_{ij} + e_2 e_3 \delta_{ij}] \\ m_i m_j &= c_2[P_{ij}^2 - (e_3 + e_1)P_{ij} + e_3 e_1 \delta_{ij}] \\ n_i n_j &= c_3[P_{ij}^2 - (e_1 + e_2)P_{ij} + e_1 e_2 \delta_{ij}] \end{aligned} \tag{11}$$

这里 $c_k = \left[\prod_{\substack{s=1 \\ s\neq k}}^{3}(e_k - e_s)\right]^{-1}$ ，以及

$$\begin{aligned} P_{im}W_{mj} + W_{im}P_{mj} = {} & -\frac{1}{2}(e_2 + e_3)\omega_1^*(m_i n_j - m_j n_i) - \frac{1}{2}(e_3 + e_1)\omega_2^*(n_i l_j - n_j l_i) - \\ & \frac{1}{2}(e_1 + e_2)\omega_3^*(l_i m_j - l_j m_i) \end{aligned} \tag{12}$$

$$P_{im}^2W_{mj}+W_{im}P_{mj}^2=-\frac{1}{2}(e_2^2+e_3^2)\omega_1^*(m_in_j-m_jn_i)-\frac{1}{2}(e_3^2+e_1^2)\omega_2^*(n_il_j-n_jl_i)-\frac{1}{2}(e_1^2+e_2^2)\omega_3^*(l_im_j-l_jm_i) \tag{13}$$

或

$$\omega_1^*(m_in_j-m_jn_i)=2c_1[P_{im}^2W_{mj}+W_{im}P_{mj}^2-(e_2+e_3)(P_{im}W_{mj}+W_{im}P_{mj})+(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1-e_1^2)W_{ij}]$$

$$\omega_2^*(n_il_j-n_jl_i)=2c_2[P_{im}^2W_{mj}+W_{im}P_{mj}^2-(e_3+e_1)(P_{im}W_{mj}+W_{im}P_{mj})+(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1-e_2^2)W_{ij}]$$

$$\omega_3^*(l_im_j-l_jm_i)=2c_3[P_{im}^2W_{mj}+W_{im}P_{mj}^2-(e_1+e_2)(P_{im}W_{mj}+W_{im}P_{mj})+(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1-e_3^2)W_{ij}]$$

再加上

$$W_{ij}^2=-\frac{1}{4}[(\omega_2^{*2}+\omega_3^{*2})l_il_j+(\omega_3^{*2}+\omega_1^{*2})m_im_j+(\omega_1^{*2}+\omega_2^{*2})n_in_j-\omega_1^*\omega_2^*(l_im_j+l_jm_i)-\omega_2^*\omega_3^*(m_in_j+m_jn_i)-\omega_3^*\omega_1^*(n_il_j+n_jl_i)]$$

$$P_{im}W_{mj}-W_{im}P_{mj}=\frac{1}{2}[(e_2-e_1)\omega_3^*(l_im_j+l_jm_i)+(e_3-e_2)\omega_1^*(m_in_j+m_jn_i)+(e_1-e_3)\omega_2^*(n_il_j+n_jl_i)]$$

$$P_{im}^2W_{mj}-W_{im}P_{mj}^2=\frac{1}{2}[(e_2^2-e_1^2)\omega_3^*(l_im_j+l_jm_i)+(e_3^2-e_2^2)\omega_1^*(m_in_j+m_jn_i)+(e_1^2-e_3^2)\omega_2^*(n_il_j+n_jl_i)]$$

并矢张量$l_im_j+l_jm_i, m_in_j+m_jn_i, n_il_j+n_jl_i$也可以反解出来。

所以，最一般的非线性本构关系为

$$H_{ij}=H_1\delta_{ij}+H_2P_{ij}+H_3W_{ij}+H_4P_{ij}^2+H_5P_{im}W_{mj}+H_6W_{im}P_{mj}+H_7W_{ij}^2+H_8P_{im}^2W_{mj}+H_9W_{im}P_{mj}^2 \tag{14}$$

现在将这个一般关系应用到湍流雷诺应力的模式表示中。由于雷诺应力是一个对称张量，故最一般的非线性代数模式应该是

$$\tau_{ij}=a_1\delta_{ij}+a_2P_{ij}+a_3P_{ij}^2+a_4(P_{im}W_{mj}+P_{jm}W_{mi})+a_5W_{ij}^2+a_6(P_{im}^2W_{mj}+P_{jm}^2W_{mi}) \tag{15}$$

这里τ_{ij}是雷诺应力，$A_{ij}=\partial U_i/\partial x_j$是平均速度梯度张量。符松等人[2]用不同的方法也给出了类似的结果。这个结果大大简化了 T-H Shih 和 Lumley JL[3]给出的一般表达式。

2 任意二阶张量的标量不变量

文献[4，5]给出对称张量P和反对称张量W有七个标量不变量

$$\mathrm{tr}P, \mathrm{tr}P^2, \mathrm{tr}P^3, \mathrm{tr}W^2, \mathrm{tr}PW^2, \mathrm{tr}P^2W^2, \mathrm{tr}P^2W^2PW$$

我们在文献[6，7]给出的独立的标量不变量只有六个，它们是

$$J_1 = e_1 + e_2 + e_3$$

$$J_2 = e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1$$

$$J_3 = e_1 e_2 e_3$$

$$J_4 = \frac{1}{2}(\omega_1^{*2} + \omega_2^{*2} + \omega_3^{*2})$$

$$J_5 = \frac{1}{2}(e_1\omega_1^{*2} + \omega_2^{*2} + \omega_3^{*2})$$

$$J_6 = \frac{1}{2}(e_1^2\omega_1^{*2} + e_2^2\omega_2^{*2} + e_3^2\omega_3^{*2})$$

通过直接计算可得它们之间的关系为

$$\mathrm{tr}P = J_1$$

$$\mathrm{tr}P^2 = J_1^2 - 2J_2$$

$$\mathrm{tr}P^3 = J_1^3 - 3J_1J_2 + 3J_3$$

$$\mathrm{tr}W^2 = -J_4$$

$$\mathrm{tr}PW^2 = \frac{1}{2}J_5 - \frac{1}{2}J_1J_4$$

$$\mathrm{tr}P^2W^2 = \frac{1}{2}(2J_2 - J_1^2)J_4 + \frac{1}{2}J_6$$

$$\mathrm{tr}P^2W^2PW = \frac{1}{8}(e_2 - e_1)(e_3 - e_2)(e_1 - e_3)\omega_1^*\omega_2^*\omega_3^*$$

最近我们发现最本质的标量不变量应该是$e_1, e_2, e_3, \omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*$。所有其他标量不变量都可以用它们的多项式函数表示出来。现在关键是要求出ω_i^*的数值。从特征张量的性质可知特征张量乘上任意向量就是特征向量。故我们有

$$\xi_i = H_{ij}^{(1)}\omega_j = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)l_i\omega_1^*$$

$$\eta_i = H_{ij}^{(2)}\omega_j = (e_2 - e_3)(e_2 - e_1)m_i\omega_2^*$$

$$\varsigma_i = H_{ij}^{(3)}\omega_j = (e_3 - e_1)(e_3 - e_2)n_i\omega_3^*$$

选择主轴方向的单位向量l_i, m_i的方向使得$\omega_1^* > 0, \omega_2^* < 0$，这样根据右手法则单位向量$n_i$的方向唯一确定了。此时$\omega_3^*$的符号可以有两种选择。通过计算我们有

$$\omega_1^* = \omega_i l_i = 2[J_4 e_2 e_3 - J_5(e_2 + e_3) + J_6]/\xi$$

$$\omega_2^* = \omega_i m_i = 2[J_4 e_3 e_1 - J_5(e_3 + e_1) + J_6]/\eta$$

$$\omega_3^* = \omega_i n_i = \pm 2[J_4 e_1 e_2 - J_5(e_1 + e_2) + J_6]/\varsigma$$

其中

$$\xi^2 = \xi_i\xi_i = 2(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)[J_4 e_2 e_3 - J_5(e_2 + e_3) + J_6]$$

$$\eta^2 = \eta_i\eta_i = 2(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)[J_4 e_3 e_1 - J_5(e_3 + e_1) + J_6]$$

$$\varsigma^2 = \varsigma_i\varsigma_i = 2(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)[J_4 e_1 e_2 - J_5(e_1 + e_2) + J_6]$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}P^2W^2PW = \mp\frac{1}{4}[&4J_2J_3J_4^2J_5 + 6J_3J_4J_5J_6 + 2J_1J_2J_4J_5J_6 + 2J_1J_2J_5^3 + \\
&4J_1J_5J_6^2 - 2(J_3^2J_4^3 + J_1J_3J_4^2J_6 + J_1J_3J_4J_5^2 + \\
&J_2^2J_4J_5^2 + J_2J_4J_6^2 + J_1^2J_5^2J_6 + J_2J_5^2J_6 + J_3J_5^3 + J_6^3)]^{1/2}
\end{aligned}
$$

方括号前的符号由ω_3^*的符号来定。ω_3^*的符号为正时方括号前的符号为负，反之为正。

文献[4，5]给出了若干张量不变量，可以证明其中部分张量不变量是多余的，因为它们不独立。对于文献[4，5]给出的标量不变量也是有很多是不独立的。我们在文献[6，7]中已进行过讨论。

事实上，我们引进的并矢张量的形式在文献[5]中也已给出过，那里把单位正交向量构成的并矢张量记为

$$
\begin{aligned}
&E_1 = l_il_j, & &E_2 = m_im_j, & &E_3 = n_in_j, \\
&E_4 = m_in_j + n_im_j, & &E_5 = n_il_j + l_in_j, & &E_6 = l_im_j + m_il_j, \\
&\Omega_1 = m_in_j - n_im_j, & &\Omega_2 = n_il_j - l_in_j, & &\Omega_3 = l_im_j - m_il_j
\end{aligned}
$$

但是那里没有明确指出单位正交向量的选取方法。

3 基本张量和方向平均

在实际物理问题中，有时需要用到各向同性的方向平均的处理。例如，在内部带有方向性粒子的复杂的多相流动中，在复合材料中，在断裂损伤的问题中都可能遇到。通过方向平均的处理后得到的是各向同性的张量，问题就可以进一步简化了。我们在文献[8]中已经给出了三维情况中的方向平均的计算公式。本文再进一步给出二维情况的计算公式。它可以用于在某一平面上作方向平均的处理。

在实际问题中遇到的最基本的各向同性张量是：

(1) 二维情况

$$
\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, i = 1,2, \\ 0 & i \neq j, j = 1,2, \end{cases}
$$

$$
\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & i = 1, j = 2 \\ 0 & i = j \\ -1 & i = 2, j = 1 \end{cases}
$$

以及恒等式

$$
\begin{aligned}
&\delta_{ij} = l_il_j + m_im_j, & &\varepsilon_{ij} = l_im_j - l_jm_i, \\
&l_i = \varepsilon_{ij}m_j, & &m_i = l_j\varepsilon_{ji} \\
&\varepsilon_{ij}\varepsilon_{pq} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}
\end{aligned}
$$

(2) 二维情况

$$
\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, i = 1,2,3, \\ 0 & i \neq j, i = 1,2,3, \end{cases}
$$

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & i\neq j\neq k \text{ 和顺排列},\\ 0 & i=j,\text{或 } j=k,\text{或 } k=i,\\ -1 & i\neq j\neq k \text{ 和逆排列}\end{cases}$$

在有些物理问题中，需要对物理量 A 作各向同性处理。此时需要用到对坐标轴取方向平均，而方向平均的定义是：

(1) 二维情况

$$\overline{A}^{I_2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}A\mathrm{d}\theta$$

(2) 三维情况

轴对称时

$$\overline{A}^{I_3}=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}A\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

或非轴对称时

$$\overline{A}^{I_3}=\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\lambda\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\chi\int_0^{\pi}A\sin\psi\mathrm{d}\psi$$

这里λ,χ,ψ是动坐标系的欧拉角(见参考文献[8])。

不难证明对单位坐标向量的乘积的平均公式为：

(1) 二维情况

$$\overline{l_il_j}^{I_2}=\frac{1}{2}\delta_{ij},\qquad \overline{l_im_j}^{I_2}=\frac{1}{2}\varepsilon_{ij},$$

$$\overline{m_im_j}^{I_2}=\frac{1}{2}\delta_{ij},\qquad \overline{m_il_j}^{I_2}=\frac{1}{2}\varepsilon_{ji}$$

一般公式为

$$\overline{l_{i_1}l_{i_2}..l_{i_{2\alpha}}}^{I_2}=\frac{1}{(2\alpha)!!}\delta_{i_1i_2\ldots i_{2\alpha}}$$

$$\overline{l_{i_1}l_{i_2}..l_{i_{2\alpha}}m_{j_1}m_{j_2}...m_{j_{2\beta}}}^{I_2}=\sum_{k=0}^{\beta}\frac{(-1)^k(2\alpha+2\beta-2k-1)!!(2k-1)!!}{(2\alpha-1)!!(2\beta-1)!!(2\alpha+2\beta)!!}H^{(k)}_{i_1\ldots i_{2\alpha}j_1\ldots j_{2\beta}}$$

其中$H^{(k)}_{i_1\ldots i_{2\alpha}j_1\ldots j_{2\beta}}$是每项包含$2k$个交叉下标的所有可能的项的总和。其总项数为

$$N_{2\alpha,2\beta,2k}=(2\alpha-2k-1)!!(2\beta-2k-1)!!(2k)!C_{2\alpha}^{2k}C_{2\beta}^{2k}$$

(2) 三维情况

$$\overline{l_il_j}^{I_3}=\frac{1}{3}\delta_{ij},\qquad \overline{l_im_jn_k}^{I_3}=\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk},$$

$$\overline{l_im_j}^{I_3}=\overline{m_in_j}^{I_3}=\overline{n_il_j}^{I_3}=0$$

一般公式为

$$\overline{l_{i_1}l_{i_2}..l_{i_{2\alpha}}}^{I_3}=\frac{1}{(2\alpha+1)!!}\delta_{i_1i_2\ldots i_{2\alpha}}$$

$$\overline{l_{i_1} l_{i_1} \ldots l_{i_{2\alpha}} m_{j_1} m_{j_2} \ldots m_{j_{2\beta}}}^{l_3} = \sum_{k=0}^{\beta} \frac{(-1)^k (2\alpha+2\beta-2k)!!(2k-1)!!}{(2\alpha)!!(2\beta)!!(2\alpha+2\beta+1)!!} H^{(k)}_{i_1 \ldots i_{2\alpha} j_1 \ldots j_{2\beta}}$$

由此看出，用正交坐标向量来表示张量物理量时，其分析和运算都会带来很大的好处。例如，在流体力学中，速度分量可以用球坐标系或柱坐标系表示为

$$u_i = u_R e_{R_i} + u_\theta e_{\theta_i} + u_\phi e_{\phi_i} = u_r e_{r_i} + u_\phi e_{\phi_i} + u_z e_{z_i}$$

其中

$$\cos\theta = \frac{x_i}{R} l_i, \qquad z = R\cos\theta = x_i l_i, \qquad r^2 = R^2 \sin^2\theta = (\delta_{ij} - l_i l_j) x_i x_j$$

$$e_{R_i} = \frac{x_i}{R}, \qquad e_{\theta_i} = -\frac{1}{\sin\theta}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{R^2}\right) l_j, \qquad e_{\phi_i} = -\frac{1}{\sin\theta} \varepsilon_{ijk} \frac{x_j}{R} l_k$$

$$e_{r_i} = (\delta_{ij} - l_i l_j) \frac{x_j}{r}, \qquad e_{\phi_i} = \varepsilon_{ijk} l_j \frac{x_k}{r}, \qquad e_{z_i} = l_i$$

我们可以将解用这些坐标分量和坐标向量来表示，再取方向平均就方便了。

参 考 文 献

1 Gurevich GB. Foundations of the theory of algebraic invariants P Noordhoff Ltd Groningen, The Netherlands, 1964

2 Fu Song and Wang Chen. Modelling of turbulent flows in rotating systems with second moment closures. Progress in Nature Science, 1998, 8(1): 35~43

3 T-H Shih and Lumley JL. Remarks on turbulent constitutive relations. Math Comput Model, 1993, 18: 9~16

4 爱林根（美）著. 程昌钧, 俞焕然译. 连续统力学. 北京：科学出版社, 1991

5 郑泉水. 张量函数的表示理论——水构方程统一不变性研究. 力学进展, 1996, 26(1): 114~137; 26(2): 237~282

6 黄永念、罗雄平. 关于张量函数表示理论的标量不变量的讨论. 力学学报, 1999, 31(4): 504~509

7 Huang Yongnian, Luo Xiongping and Emily Ching SC. A discussion about scale invariants for tensor functions. *Acta Mechanica Sinica*, 2000, 16(1): 35~40

8 Huang Yongnian and Luo Xiongping On oriantation averages for vortex models of turbulence. *Physics of Fluids*, 1999, 14(8): 2381~2386

Kelvin-Helmholtz 不稳定性大变形发展阶段的数值模拟

丁志杰　张慧生
（复旦大学力学与工程科学系，上海 200433）

摘要　用离散涡方法给出了在不同 Atwood 数，Froude 数和 Bond 数下 Kelvin-Helmholtz 不稳定性大变形发展阶段的数值模拟结果。

关键词　Kelvin-Helmholtz 不稳定性，大变形，数值模拟，离散涡方法

1　方程及数值解法

设两种不可压缩不可混合流体的界面为一无限水平平面 xoz，y 轴正向垂直向上，所研究的基本流动为

$$\boldsymbol{U}=\begin{cases}U_1\boldsymbol{i} & (y<0)\\ U_2\boldsymbol{i} & (y>0)\end{cases},\qquad \rho=\begin{cases}\rho_1 & (y<0)\\ \rho_2 & (y>0)\end{cases}\tag{1}$$

其中 ρ，$\boldsymbol{U}$ 分别为流体的密度和速度。本文只研究 $\rho_1>\rho_2$，即密度较大流体在下面时，$U_1\neq U_2$ 情形二维界面的 Kelvin-Helmholtz 不稳定性。此时，仅当两种流体的速度差充分大，使条件

$$D=\rho_1^2\rho_2^2(U_1-U_2)^4-4(\rho_1+\rho_2)^2(\rho_1-\rho_2)g\gamma\geq 0\tag{2}$$

得以满足时，扰动才有可能增长，这里 γ 为界面的张力，g 为重力加速度。

以下假定界面只受周期扰动，设扰动波长为 λ。规定长度单位 l_0，时间单位 t_0 和质量单位 m_0 分别为

$$l_0=\lambda/\pi,\qquad t_0=(l_0/g)^{1/2},\qquad m_0=(\rho_1+\rho_2)l_0^3/2$$

引进无量纲变量

$$\tilde{x}=x/l_0,\quad \tilde{y}=y/l_0,\quad \tilde{t}=t/t_0,\quad \tilde{u}=ut_0/l_0,\quad \tilde{\rho}=\rho\Big/\left(\frac{1}{2}(\rho_1+\rho_2)\right),\quad \tilde{p}=pl_0t_0^2/m_0$$

则流动在 $\tilde{x}$ 方向满足周期为 π 的边界条件。易见，对受周期扰动的界面稳定性问题，独立变化的无量纲参数只有三个，它们分别是 Atwood 比 α，无量纲界面张力 β（Bond 数的倒数）和 Froude 数 F

$$\alpha=(\rho_1-\rho_2)/(\rho_1+\rho_2),\quad \beta=2\pi^2\gamma/(\rho_1+\rho_2)\lambda^2g,\quad F=(U_2-U_1)/(l_0g)^{1/2}=\tilde{U}_2-\tilde{U}_1$$

以下只研究无量纲化后的问题，当不会产生混淆时，略去无量纲记号“~”。

为方便起见，设坐标系在水平方向以速度 $(U_1+U_2)/2$ 作匀速运动，用复变量 $z=x+\mathrm{i}y$ 表示空间变量，并设界面方程为 $z=\zeta(a,t)=\xi(a,t)+\mathrm{i}\eta(a,t)$，这里 a 为界面的 Lagrange 坐标。若用涡片表示界面，且记界面上位于 $\zeta(0,t)$ 与 $\zeta(a,t)$ 间的累计涡量为 $\Gamma(a,t)$，则描述界面运动的无量纲方程是

$$\frac{\partial\zeta^*}{\partial t}=\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)_p+\frac{1}{2}f(a,t)\frac{\partial\Gamma}{\partial a}\Big/\frac{\partial\zeta}{\partial a}\tag{3}$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}+\frac{\alpha}{\pi}⨍_0^\pi\frac{\partial\Gamma(a',t)}{\partial t}\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial\zeta(a',t)}{\partial a'}\left[\cot(\zeta(a,t)-\zeta(a',t))-\cot(\zeta(0,t)-\zeta(a',t))\right]\right\}\mathrm{d}a'= \tag{4}$$
$$H(a,t)-H(0,t)$$

这里 $-1\le f(a,t)\le 1$ 是任一连续函数，$f=-1,1,0$ 分别对应于界面标记点速度取为上、下流体速度和两流体平均速度这三种情况。记号"⨍"表示 Cauchy 主值积分，"*"表示共轭复数。$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)_p$ 和 $H(a,t)$ 的定义是

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)_p=\frac{1}{2\pi i}⨍_0^\pi\frac{\partial\Gamma(a',t)}{\partial a'}\cot[\zeta(a,t)-\zeta(a',t)]\mathrm{d}a'$$

$$H(a,t)=\alpha\left[\frac{1}{\pi}⨍_0^\pi\frac{\partial\Gamma(a',t)}{\partial a'}\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial\zeta(a',t)}{\partial t}\cot[\zeta(a,t)-\zeta(a',t)]\right\}\mathrm{d}a'-\left|\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)_p\right|^2-2\eta\right]+$$
$$\left[\frac{1}{2}f-\frac{1}{4}\alpha\right]\left[\frac{\partial\Gamma}{\partial a}\Big/\left|\frac{\partial\zeta}{\partial a}\right|\right]^2+\beta\kappa$$

其中 κ 为无量纲化后界面的曲率

$$\kappa=\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}\frac{\partial^2\eta}{\partial a^2}-\frac{\partial^2\xi}{\partial a^2}\frac{\partial\eta}{\partial a}\right)\Big/\left|\frac{\partial\zeta}{\partial a}\right|^3$$

数值计算包括关于时间的推进，奇异积分的计算和积分方程的求解三部分。本文用一阶显格式实现关于时间的推进。因对任一充分光滑的函数 $G(a,t)$，成立

$$⨍_0^\pi G(a',t)\cot[\zeta(a,t)-\zeta(a',t)]\mathrm{d}a'=$$
$$⨍_0^\pi\left[G(a',t)-G(a,t)\frac{\partial\zeta(a',t)}{\partial a'}\Big/\frac{\partial\zeta(a,t)}{\partial a}\right]\cot[\zeta(a,t)-\zeta(a',t)]\mathrm{d}a'$$

上式右端被积函数当 $a'=a$ 时的值可取为 $\left(G\frac{\partial^2\zeta}{\partial a^2}-\frac{\partial G}{\partial a}\frac{\partial\zeta}{\partial a}\right)\Big/\left(\frac{\partial\zeta}{\partial a}\right)^2$，故(3)，(4)式中的各奇异积分可化为光滑函数的常义积分计算。本文所用数值积分公式为对充分光滑的周期被积函数有很高精度的梯形公式。式中出现的关于 a 的各阶导数均用具有二阶精度的中心差商来代替。这样积分方程(4)就化为关于 $\partial\Gamma/\partial t$ 在网格点上值的线性代数方程组。由于积分核的特殊性质，用 G-S 迭代法解此方程组比直接法更快。

本文采用下面两点措施以避免计算中出现数值混乱：

(1) 计算中按下法动态地选取速度权因子 $f(a,t)$

$$f(a,t)=\begin{cases}\pm 1 & 当\ a=\pm 1\\ -\kappa(a,t)\Big/\max\limits_{0\le a\le\pi}|\kappa(a,t)| & 当\ a\ne\pm 1\end{cases}$$

(2) 当界面上标记点分布不均匀时，用三次周期样条插值办法在相邻两标记点之间等间距地添加 7 个新的标记点，然后再在这数目众多的标记中，按分布尽量均匀的原则挑选数目与原来相等的标记点，作为下步计算的出发点。由于对充分光滑的周期函数，三次周期样条

插值具有四阶精度，经一阶和二阶差商后仍分别具有三阶和二阶精度。故原格式关于 a 的二阶精度性质仍被保留。

此外，通常用边界积分方法进行一次计算时，计算点的个数始终都是一样的。为了模拟界面发展后期的大变形，必须用较多的计算点进行计算。由于最大稳定时间步长正比于网格宽度的立方，而每步计算量正比于计算点数的平方，故总计算量正比于计算点数的五次方，这使得界面大变形阶段数值模拟的计算量变得非常大。但在界面的小中变形阶段，只要用较少的计算点就足以精确描述界面，故这样就造成很大的浪费。针对这一点，本文采取随界面变形增大逐一增加计算点的办法，且利用界面的大中变形阶段，最大稳定时间步长仅正比于最大网格宽度的平方或更低次幂的特性，可使界面大变形数值模拟的计算量大大减小。

2 Kelvin-Helmholtz 不稳定性的数值模拟结果

对方程(3)，(4)进行一阶变分，可得对应于基本解 $\zeta(a,t)=a$，$\Gamma(a,t)=-Fa$ 的周期为 π 的小扰动 $\hat{\zeta}$，$\hat{\Gamma}$ 所满足的线化方程。把线化方程的小幅值的正规模态解的初值与基本解的迭加，作为求解控制方程(3)，(4)时的初始条件。只数值模拟 $\alpha>0, D>0$（对应于 $\rho_1>\rho_2$，指数增长不稳定性）情形的界面不稳定性(下式中的 $\sigma=[(1-\alpha^2)F^2-2\alpha-4\beta]^{1/2}, \mu=\alpha F$)。本数值模拟中的初始条件取为

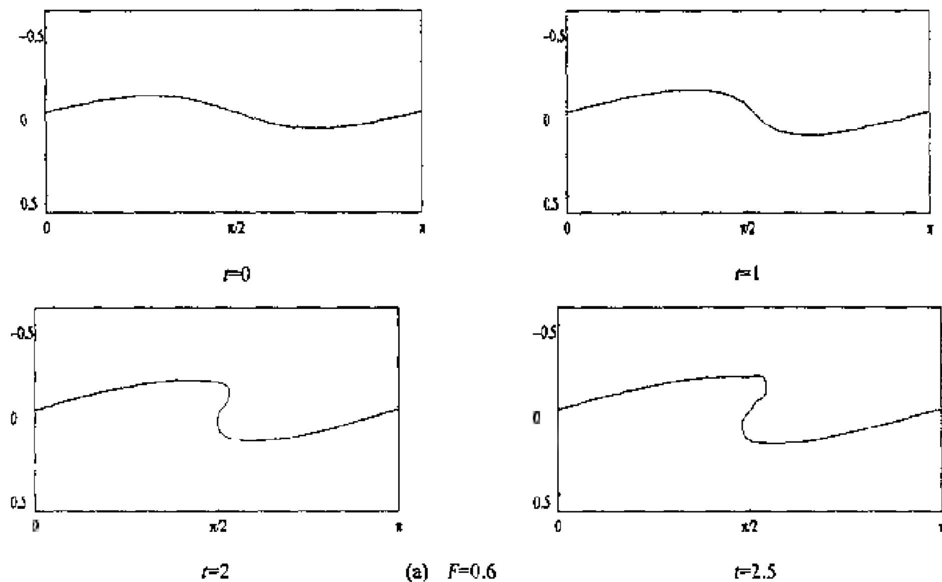
$$\xi(a,0)=a+\varepsilon F(\sigma\sin 2a-\mu\cos 2a)/\sigma_1, \qquad \eta(a,0)=\varepsilon\sin 2a$$

$$\Gamma(a,0)=\varepsilon[\mu(F^2+\sigma_1)\cos 2a+\sigma(\sigma_1-F^2)\sin 2a]/\sigma_1-Fa$$

其中 $\sigma_1=\sigma^2+\mu^2$，$\varepsilon>0$ 为充分小的正数（本数值模拟中取 $\varepsilon=0.1$）。

对于 $\alpha>0$，$D>0$ 下的各种情形，当初始小扰动取为线化稳定性分析中波幅增长最快的模态时，对应的界面只有波幅的增长，而无卷曲发生。下面主要研究界面同时发生卷曲和波幅增长的情况。

对 $\alpha=0.1$，$\beta=0.01$ 情形，图 1(a)，(b)，(c)分别给出了 $F=0.6, 0.8, 1.0$ 时界面的发展情况。从图 1 可以看到，对固定的 α 和 β，随着 F 的增大，波浪的幅度和卷曲程度都会增大。



(a) $F=0.6$

图 1 $\alpha=0.1$，$\beta=0.01$ 时界面的发展情况

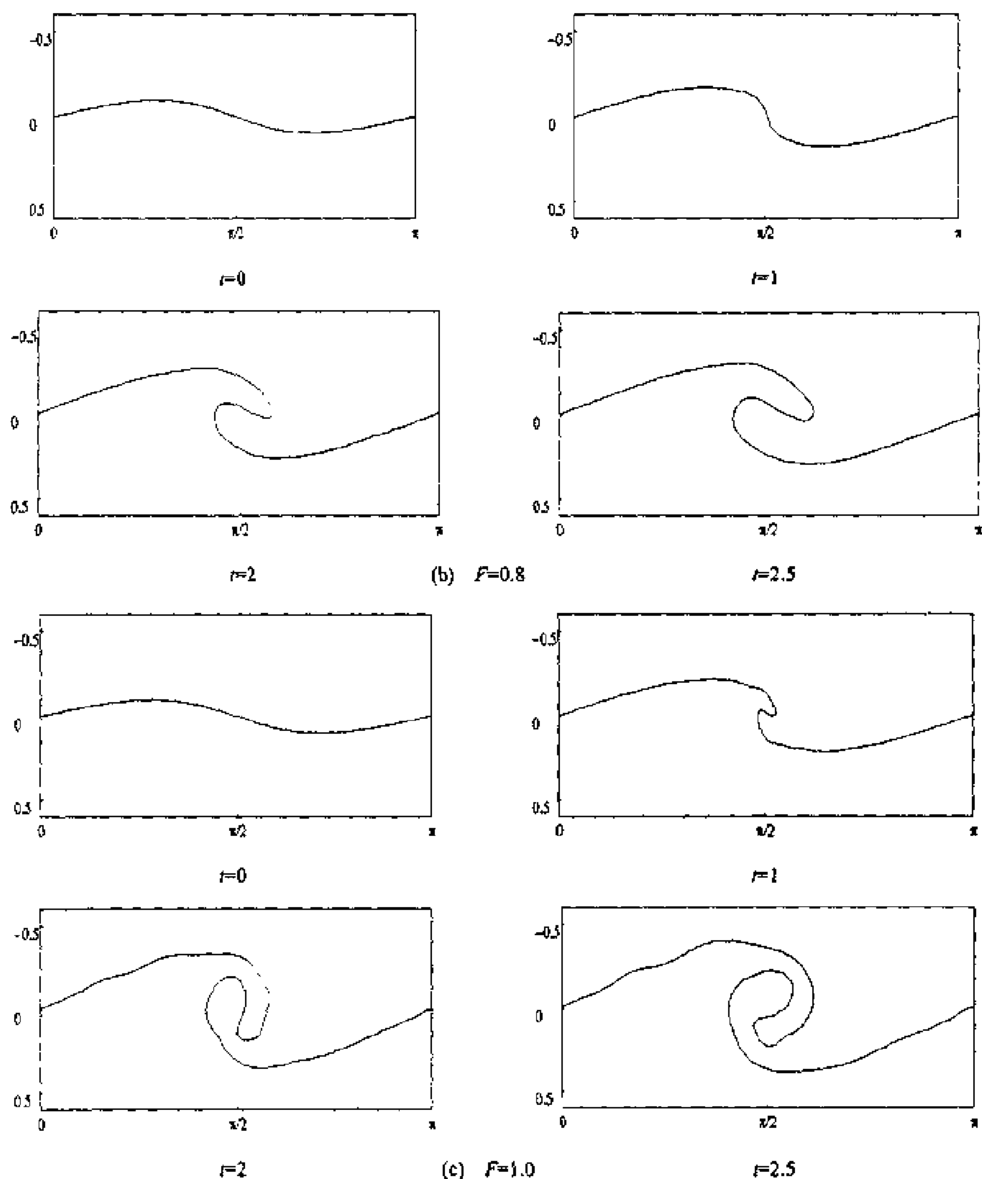
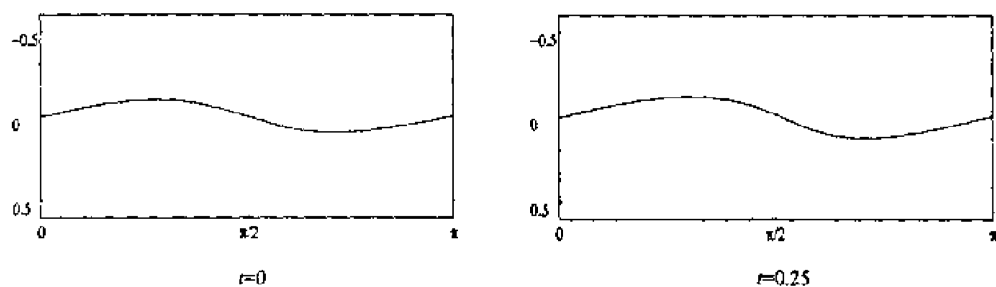


图 1 $\alpha=0.1$， $\beta=0.01$ 时界面的发展情况

对于 $\beta=0.01$， $F=0.8$ 情形，图 1(b)和图 2 分别给出了 $\alpha=0.1, 0.2$ 时界面的发展情况。从图中可以看到，对固定的 β 和 F，随着 α 的增大，波浪的幅度和卷曲程度都会减小。事实上，图 2 情形的界面已不发生卷曲。



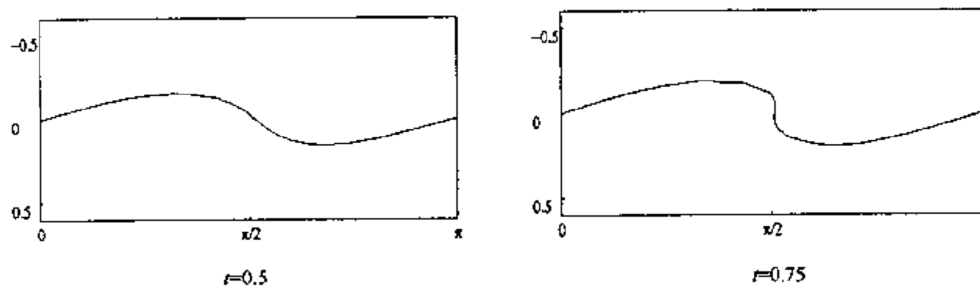


图2　$\beta=0.01$，$F=0.8$、$\alpha=0.2$ 时界面的发展情况

对 $\alpha=0.1$，$F=0.8$ 情形，图 1(b)和图 3(a)，(b)分别给出了 $\beta=0.01, 0.02, 0.05$ 时界面的发展情况。可以看到，对固定的 α 和 F，随着 β 的增大，波浪的卷曲程度会减小。事实上图 3(b)情形的界面根本就不出现向下卷曲的现象。波浪的幅度随 β 的变化不明显。

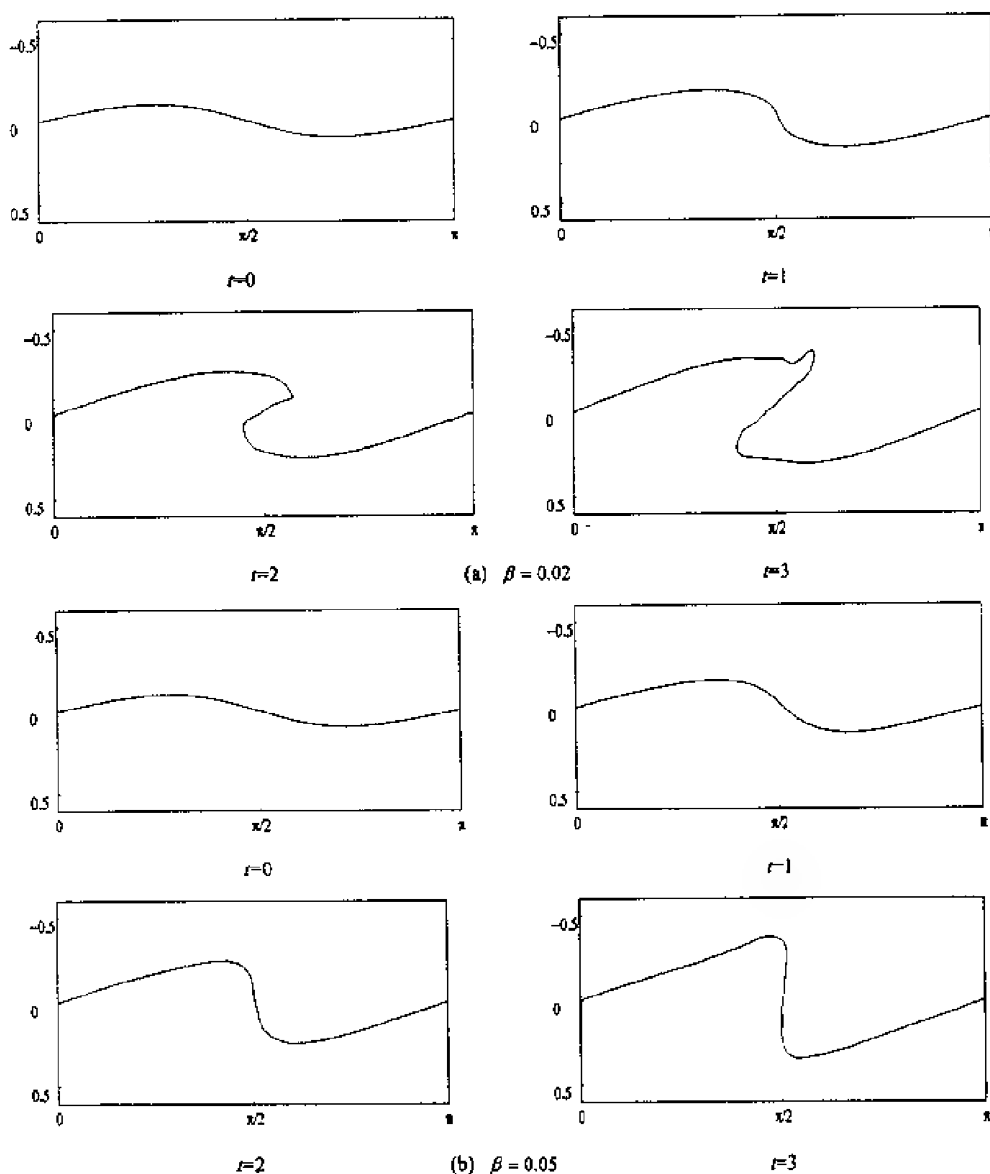


图3　$\alpha=0.1$，$F=0.8$ 时界面的发展情况

3 结论和讨论

由线化分析的结果知道，界面变形的幅度随着α和β的增大而减小，随F的增大而增大。从以上数值模拟结果可以看到，在界面大变形阶段，界面变形的幅度随F的增大而增大，随α的增大而减小，这些都与线化分析结果一致。至于大变形阶段界面变形的幅度随β的变化不明显，是因为在实际流动问题中无量纲界面张力β的值都比较小的缘故。大变形阶段波浪的卷曲完全是非线性现象，它无法从线化分析中得到预测。波浪的卷曲程度的大小，可能与其幅度增长的快慢有一定联系，例如在一定的条件下，随着F的增大，波幅增长速度加快，其卷曲程度也加大，随着α和β的增大，其幅度的增长速度减慢，其卷曲程度也减小。但这两者也不等价，有时甚至是相互制约的：例如当初始小扰动取为波幅增长最快的模态时，任何情况下都不会发生卷曲；又例如对β值的很小变化，波浪幅值的变化不明显，但其卷曲程度的变化却非常明显。

不同速度比下平面射流拟序结构发展过程的大涡模拟[1)]

刘　奕　郭印诚　张会强　王希麟　林文漪

（清华大学工程力学系，北京 100084）

摘要　采用大涡模拟方法对不同速度比下的平面湍射流流动进行了数值模拟，给出了平面射流中湍流拟序结构的瞬态发展演变过程，揭示了速度比对射流中拟序结构发展演化过程的影响，为进一步研究射流拟序结构及其在湍流流动中的作用提供了基础。

关键字　平面射流，大涡模拟，拟序结构

引　言

射流现象是工业设备中广泛存在的现象，也是大多数动力燃烧设备所采用的流动形式。对射流流动特性的研究是深入认识其它复杂流动现象的物理本质的基础。近年来的研究表明，射流拟序结构对流场的混合、燃烧、化学反应以及能量的输运过程等都起着重要作用。平面射流作为射流的一种基本形式，既具有射流所具有的全部特性，又由于其结构简单，更易于排除其他干扰因素的影响从机理上进行分析研究，因此对平面射流的研究一直是湍流研究的热点之一。

本文采用大涡模拟方法对不同速度比下的平面湍射流流动进行了数值模拟，给出了湍流拟序结构的瞬态发展演变过程，揭示了速度比对射流中拟序结构发展演化过程的影响，为进一步研究射流拟序结构及其在湍流流动中的作用提供了基础。

1　数值模拟的对象

模拟的对象是由两个半无限大平板之间喷出的空气形成的平面射流，在射流两侧加以一定速度的伴流。射流出口宽度 $2b_0$=2.0×10^{-2}m，出流速度为 U_0=10.0 m/s。计算域尺寸为 $XL \times YL = 40b_0 \times 34b_0$，均匀网格数目 $JM(y)\times IM(x)=249\times 259$。

2　数值模拟方法

2.1　控制方程

滤波后的不可压黏性流体流动的无量纲控制方程组为

连续性方程

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j}=0 \tag{1}$$

动量方程

$$\overline{\rho}\left[\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}+\overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{y}}\right]=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{x}}+\frac{\partial\overline{u}^*}{\partial\overline{y}}\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{y}}+\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{x}}\right)+2\frac{\partial\overline{u}^*}{\partial\overline{x}}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}+\overline{\mu}^*\left(\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{y}^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{x}^2}\right) \tag{2}$$

1) 北京市自然科学基金(编号 3982008)和清华大学博士论文基金资助项目

$$\overline{\rho}\left[\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{t}}+\overline{u}\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{x}}+\overline{v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}}\right]=-\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{y}}+\frac{\partial \overline{\mu}^{*}}{\partial \overline{x}}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}+\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{x}}\right)+2\frac{\partial \overline{\mu}^{*}}{\partial \overline{y}}\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}}+\overline{\mu}^{*}\left(\frac{\partial^{2} \overline{v}}{\partial \overline{y}^{2}}+\frac{\partial^{2} \overline{v}}{\partial \overline{x}^{2}}\right) \tag{3}$$

其中 $\overline{\mu}^{*}=\overline{\mu}_{T}+\overline{\mu}/Re$，$\mu$ 为分子黏性，μ_T 为亚格子湍流黏性，雷诺数 $Re=\rho_0 u_0 b_0/\mu_0$，采用射流出口半宽、射流出口速度及初始时刻射流出口中心线处流体的物性参数作为无量纲化的基本参量。本文还同时求解了标志物浓度输运方程，以实现数值流场显示。

标志物浓度方程

$$\overline{\rho}\left[\frac{\partial C}{\partial \overline{t}}+\overline{u}\frac{\partial C}{\partial \overline{x}}+\overline{v}\frac{\partial C}{\partial \overline{y}}\right]=\frac{\overline{\mu}^{*}}{Sc}\left(\frac{\partial^{2} C}{\partial \overline{x}^{2}}+\frac{\partial^{2} C}{\partial \overline{y}^{2}}\right)+\frac{1}{Sc}\left[\frac{\partial \overline{\mu}^{*}}{\partial \overline{x}}\frac{\partial C}{\partial \overline{x}}+\frac{\partial \overline{\mu}^{*}}{\partial \overline{y}}\frac{\partial C}{\partial \overline{y}}\right] \tag{4}$$

2.2 亚格子模式

本文采用标准 Smagorinsky 亚格子模式[1]模拟亚格子湍流黏性

$$\overline{\mu}_T \doteq \overline{\rho}(C_s\overline{\Delta})^2\left|\overline{S}\right|=\overline{\rho}(C_s\overline{\Delta})^2\sqrt{2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}} \tag{5}$$

其中，$\overline{S}$ 表示滤波后的湍流黏性应变变化率张量，C_s 为模式常数，模拟中取 $C_s=0.025$，Δ 为网格特征尺度，$\Delta=\sqrt{\Delta x\cdot\Delta y}$。

2.3 计算方法及差分格式

采用 Chorin 提出的分步投影方法[2]，求解控制动量方程。时间项采用 $O(\Delta t^2)$ 的三点 Adams Bashforth 显式格式离散，对流项采用 $O(\Delta^2)$ 空间三点二阶精度的迎风格式扩散项的离散，扩散项采用 $O(\Delta^2)$ 的空间三点二阶精度的中心差分格式，压力方程采用 $O(\Delta^2)$ 的空间三点中心差分格式离散[3, 4]。

2.4 初始和边界条件：

采用无黏解作为模拟的初始条件，入流界面上流向速度采用台阶型分布。出流界面上采用 Sommerfeld 辐射开边界条件[5]，$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+U_{con}\frac{\partial \Phi}{\partial y}=0$，其中 Φ 代表速度矢量 V 和标志物浓度 C。U_{con} 为出流界面上流向速度沿横向坐标的面积加权平均值。入流、出流界面上压力采用 von Neumann 边界条件，在横向边界上采用 Gresho 提出的自由卷吸边界条件[6, 7]

$$\sigma_{ij}\cdot n_j=0 \tag{6}$$

$$\sigma_{ij}=-P\delta_{ij}+\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{7}$$

其中，σ_{ij} 是应力张量，n_j 是垂直于边界的单位向量，δ_{ij} 是克罗尼克 δ，p=0。这一边界条件能保证横向边界上的自由卷吸。

3 计算结果与分析

图 1~图 3 给出了不同速度比下流场的瞬态标志物浓度分布。图中清楚的示出了在不同的射流发展阶段射流拟序结构的瞬态发展演变情况以及速度比变化对流场中拟序结构发展演变过程的影响。

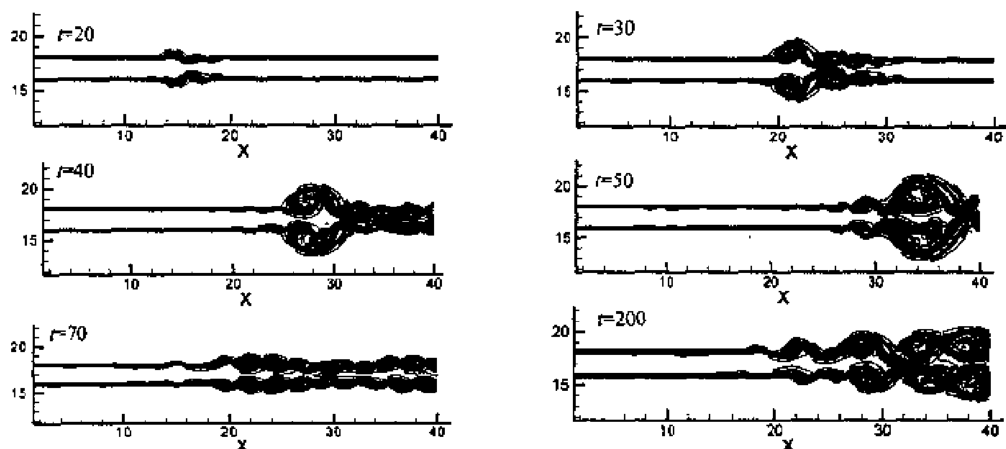


图 1　射流伴流速度比为 2:1 时不同时刻的标志物浓度分布

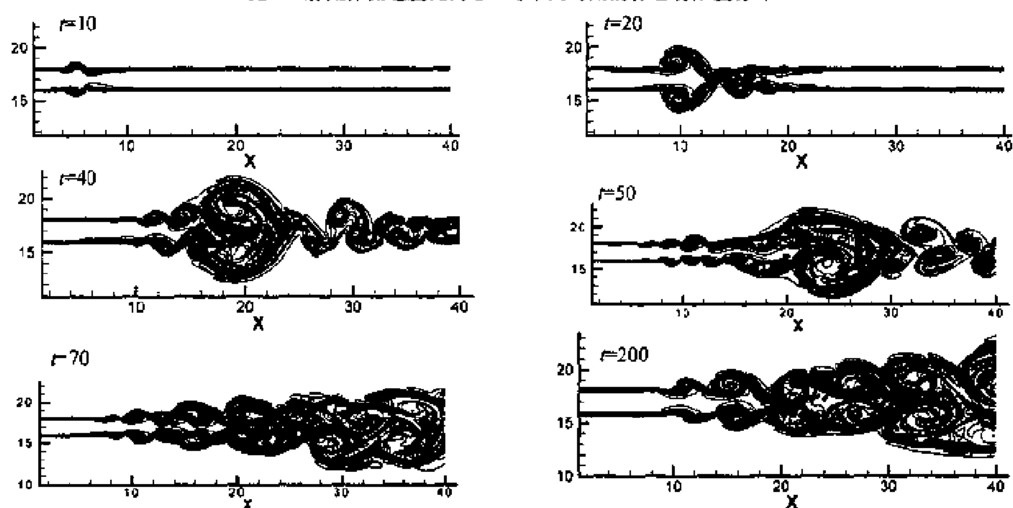


图 2　射流伴流速度比为 5:1 时不同时刻的标志物浓度分布

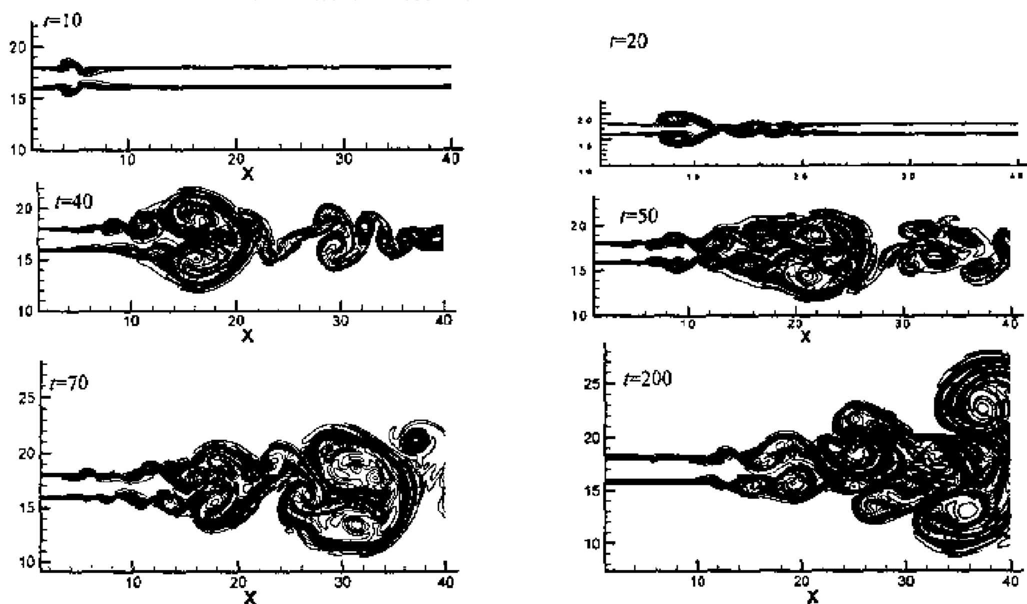


图 3　射流伴流速度比为 10:1 时不同时刻的标志物浓度分布

由图可以看出，在小速比的情况下（射流速度:伴流速度=2:1）射流拟序结构的发展初期明显表现为两个互不相干的自由剪切层，两个剪切层都经历了各自的剪切层的典型发展过程，由初期的开尔文-亥姆霍兹不稳定性引起的涡核-涡瓣结构，接至涡的非线性失稳导致涡的尺度增大，发生涡的配对与合并从而使剪切层厚度增加，之后小尺度涡明显增加，湍流度增强。拟序结构发展的后期，随着剪切层厚度的增加，两侧剪切层开始互相吸引并在某些位置发生涡的合并，但总体上仍然保持各自剪切层的基本形态。

随着速度比的增大，平面射流的两层剪切层之间的相互作用增强，不再能够保持各自的形态而是在射流发展初期就开始相互卷吸相互作用，并呈现卡门涡街的特征。射流涡街主要集中在射流初始段后部及过渡段，而过渡段以后的射流下游，由于拟序结构开始以偶极子或三极子型的相互作用进行剧烈的重组，使平面射流涡街特征开始退化，在射流下游，拟序结构的空间分布呈现出混沌状态。

进一步增大速度比的结果是射流拟序结构的演变更加迅速，卡门涡街结构存在的时间缩短，有序性变差并迅速发展为丰富的涡结构。

此外，比较三种不同射流伴流速度比可以看出，速度比越大涡开始卷起的位置越靠近射流出口，射流核心区明显缩短，射流张角增大，流场湍流度增强，流场中的涡结构更为丰富，同时拟序结构空间分布的混沌程度增强。

5 结 论

本文采用大涡模拟方法对不同速度比下的平面湍射流流动进行了数值模拟，给出了不同速度比下平面湍射流流动中拟序结构的瞬态发展演变过程。指出速度比的增大使射流核心区明显缩短，射流张角增大，流场湍流度增强，流场中的涡结构更为丰富，明显的强化了拟序结构的空间混沌性。本文的结果为进一步研究射流拟序结构及其在湍流流动中的作用提供了基础。

参 考 文 献

1 Smagorinsky J. General circulation experiments with primitive equations. *Mon Weather Rev*, 1963, 91(3): 99~164

2 Chorin AJ. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation*, 1968, 22: 745~762

3 帕坦卡 SV. 张政译. 传热与流体流动的数值计算. 北京：科学出版社，1992

4 刘导治. 计算流体力学基础. 北京：北京航空航天大学出版社，1989

5 Orlanski I. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *Journal of Computational Physics*, 1976, 21: 251~269

6 Gresho PM. Some current CFD issues relevant to the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1991, 87: 201

7 Gresho PM. Incompressible fluid dynamics: Some fundamental formulations issues. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1991, 23: 413

剪切湍流的数值模拟及可压缩效应

傅德薰　马延文*　李新亮　王　强

（LNM，*LHD，中国科学院力学研究所，北京 100080）

摘要　针对湍流的直接数值模拟，在波数空间分析了数值解的行为特征。给出了差分格式精度、网格尺度与可能模拟的雷诺数之间的关系。在此基础上，利用三维可压缩 N-S 方程的线化扰动方程的数值解，分析了可压缩效应对流动失稳初始发展阶段的影响；利用所得到的可压时间发展平面混合流和可压槽道湍流的直接模拟数据库，从湍动能方程出发，分析了可压缩效应对湍能的输运和耗散特征的影响。指出，可压缩效应所产生的膨胀-耗散项与总耗散量相比是个小量；而扰动压力梯度对局部湍动能的平衡和输运特征有较大影响，但对湍动能的生成和耗散影响不大；压力-膨胀项的变化导致流场中噪声的产生。

关键词　直接数值模拟，时间发展平面混合流，槽道湍流，可压缩效应

1　数值解的行为分析及湍流的数值模拟

可压缩湍流存在于很多实际流动中。该类流动是三维非定常非稳定性多尺度流动。采用数值模拟方法研究湍流，要求计算方法具有小耗散和小色散误差的特征，且具有捕捉多尺度物理结构的能力。因为数值解中稍大的耗散误差将减小流场中小尺度物理结构应有的动能，从而破坏湍流流动中的重要物理机制；过大的色散误差将导致流场中非物理拟序结构的产生。为解决该问题，在湍流的直接数值模拟中多采用具有小耗散和小色散误差的高精度高分辨率的计算方法。

首先从模型方程出发，针对高精度差分格式，分析了数值解的行为特征。在波数空间分析了不同差分格式模拟多尺度复杂流场的能力；分析了在给定的计算资源的条件下，差分格式精度、网格尺度与可能模拟的雷诺数之间的关系。作者采用所构造的高精度高分辨率差分方法[1]，求解三维非定常 N-S 方程，给出了可压缩时间发展平面混合流和平板槽道湍流的直接数值模拟结果。计算方法的基本思想是以五阶精度的迎风紧致格式离散 N-S 方程中的对流项；以六阶精度的对称紧致格式逼近黏性项；三步 R-K 方法逼近时间导数项。计算结果中给出了平面混合流从失稳-转捩-发展到湍流的整过程[2]。在对流马赫数 $M_c=1.2$ 时，在流场中的拟序结构破碎为小尺度涡结构的过程中，发现了非定常非稳定激波。

2　线性理论分析

利用三维可压缩 N-S 方程线化扰动方程的数值解[2]，针对时间发展的平面混合流，分析了可压缩效应对流动失稳初始发展阶段的影响。在图 1 中给出了雷诺数 Re=600（这里，雷诺数的定义为 $Re=\rho_\infty u_\infty \delta\omega_0/\mu$，其中 $\delta\omega_0$ 为混合层的初始动量厚度，下标 ∞ 表示来流流动参数）时，二维黏性扰动波的增长率 α_i 随频率 ω 的变化曲线。可以看出，随着对流马赫数 M_c 的增大（压缩性增强），最不稳定扰动波的增长率及不稳定频率减小。在超声速对流马赫数时，扰动最不稳定的 α_i 约仅为低马赫数时扰动波的 1/10；在图2 中给出了对流马赫数 $M_c=0.01\sim1.2$ 时，三维扰动波 α_i 随波角 θ 的变化。这里，波角定义为 $\theta=\mathrm{arctg}(\beta/\alpha_r)$，$\alpha_r$ 和 β 分别为流向和展向的波数。从这里可以看出，随着对流马赫数 M_c 的增大，以 $M_c=0.6$ 分界，中心第一模态主导扰动波由二维转至三维，在对流马赫数 M_c 为亚声速时，增长率明显

大于超声速的增长率。$M_c=0.8$，1.0，和 1.2，曲线上的最大值是模态由二维转至三维的变换位置。从以上线性理论分析可以看出，可压缩效应导致平面混合流失稳初始发展阶段的最不稳定波由二维的 K-H 波转为三维扰动波，且使得最不稳定扰动的增长率减小，也就是说可压缩效应抑制了初始扰动的发展（相对于低 M_c 的流动）。采用直接数值模拟方法，从随机初始扰动出发，验证了以上结果。

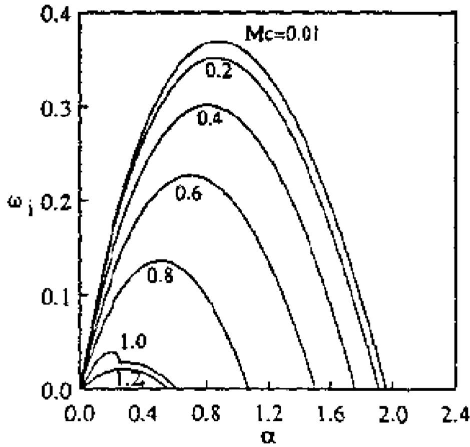


图 1　二维扰动增长率

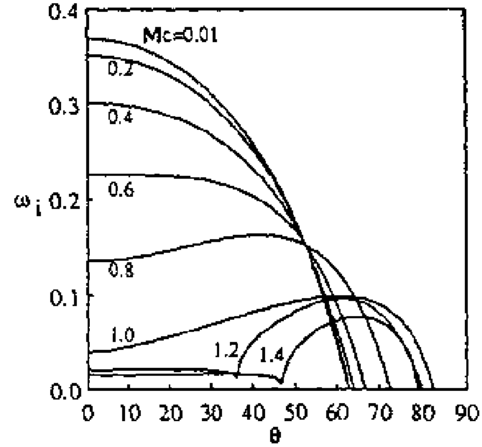


图 2　三维扰动增长率

3　可压缩效应对湍能的影响

利用所得到的时间发展平面混合流在 $M_c=0.2, 0.8$ 和 1.2，对应的雷诺数为 Re=100，200，200 的直接模拟的数据和平面槽道湍流直接数值模拟的数据，从湍动能方程出发，分析了可压缩效应对湍能的输运和耗散特征的影响。

选用以下定义

$$f=\bar{f}+\tilde{f},\qquad f=p,\rho$$
$$g=\tilde{g}+g'',\qquad g=u,v,w,\omega$$

这里 $\bar{f}$ 为雷诺平均，$\tilde{f}$ 为 Favre 平均，定义为 $\tilde{f}=\overline{\rho f}/\bar{\rho}$，取 x 和 z（对应为流向和展向）的平均。u,v,w,ω 和 P,ρ 对应为速度，涡向量、压力和密度。

可压缩流体湍动能方程有以下形式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}\tilde{k})+\frac{\partial}{\partial x_l}(\overline{\rho}\tilde{k}\tilde{u}_l)=P_{kk}+T_{kk}+\Pi_{kk}+D_{kk}+\varepsilon_{kk}$$

其中　$\tilde{k}=\frac{1}{2}\overline{\rho u_i''u_i''}/\bar{\rho}$　为湍动能，

$$P_{kk}=-\overline{\rho u_i''u_l''}\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_l}\tag{1}$$

$$T_{kk}=-\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{1}{2}\overline{\rho u_i''u_i''u''_l}\right)\tag{2}$$

$$\Pi_{kk}=-\overline{u_i''\frac{\partial p}{\partial x_i}}\tag{3}$$

$$D_{kk} = \frac{\partial}{\partial x_l}(\overline{u_i''\tau_{il}}) \tag{4}$$

$$\varepsilon_{kk} = -\overline{\tau_{il}\frac{\partial u_i''}{\partial x_l}} \tag{5}$$

这里(1)是湍流产生项，代表湍流应力的平均变形；(2)是湍流扩散项，也是脉动速度的三重相关项，代表由脉动引起的湍动能的对流变化；(3)是压力作功项，代表湍流脉动压力所作的功；(4)是黏性扩散项，代表黏性应力引起的湍动能的空间输运；(5)是黏性耗散项，代表脉动运动引起的黏性耗散。

压力作功项可分解为以下三项

$$\Pi_{kk} = \Pi_{kk1} + \Pi_{kk2} + \Pi_{kk3}$$

$$\Pi_{kk1} = -\overline{u_i''}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}$$

$$\Pi_{kk2} = \overline{p'\frac{\partial u_i''}{\partial x_i}}$$

$$\Pi_{kk3} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{p'u_i''}$$

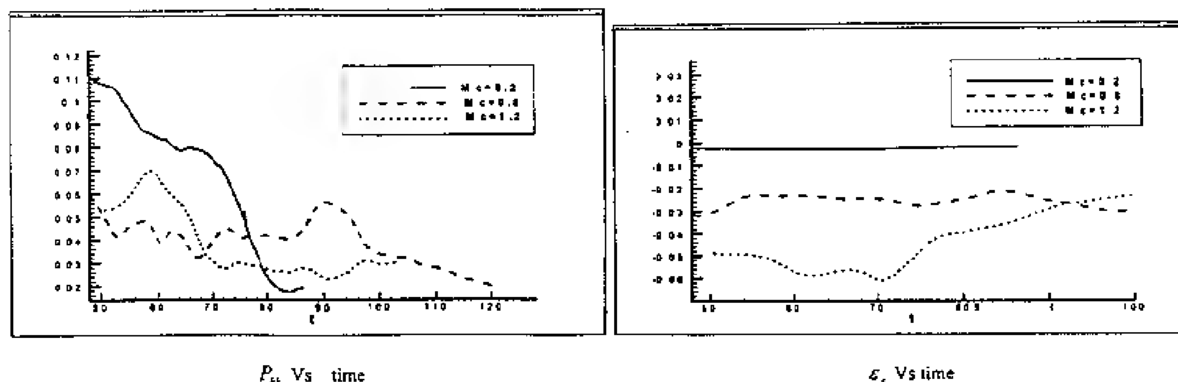
右端的第一项是平均压力所作的功，对于不可压流体该项为零，因为$\overline{u''}=\overline{u'}=0$；第二项是压力-速度相关项，它反映了流场中声强的变化；第三项是压力-膨胀项，该项只有在可压缩流中为非零，因为该情况下速度的散度为非零。

黏性耗散项可分解为膨胀-耗散ε_d和螺旋耗散ε_s两项

$$\varepsilon_d = \frac{4}{3}\frac{\widetilde{\mu}}{Re}\left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_i}\right)^2 \qquad i=1,2,3$$

$$\varepsilon_s = \frac{\widetilde{\mu}}{Re}\omega_i''\omega_i''$$

在图 3 中，针对时间发展平面混合流，给出了不同对流马赫数M_c条件下，流场中积分型湍流生成项P_{kk}随时间t的变化。从图 3 可以看出，随着M_c的上升（可压缩性增强），湍流生成项减小，这表明了可压缩性对湍流发展的抑制作用。在图 4 中给出了$M_c=1.2$，$Re=200$，$t=63.1$，91.83 时湍流生成项P_{kk}，压力-膨胀项Π_{kk2}，膨胀-耗散项ε_d和螺旋耗散项ε_s随y的变化。



P_{kk} Vs time　　　　ε_s Vs time

图 3　P_{kk}，Π_{kk2}，ε_d和ε_s随y的变化

在图 4 中P_{kk}，Π_{kk1}，Π_{kk2}，Π_{kk3}，ε_d和ε_s分别以$v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$表示。从以上分析可以看出，膨胀-耗散项与总耗散项相比是个小量，甚至在流场中存在有激波时也是这样。而扰动压力对局部湍能的平衡和输运特征有较大影响。文中还讨论了在可压缩湍流中膨胀(dilatation)耗散的贡献和膨胀导致的扰动压力功对湍流特征的影响。

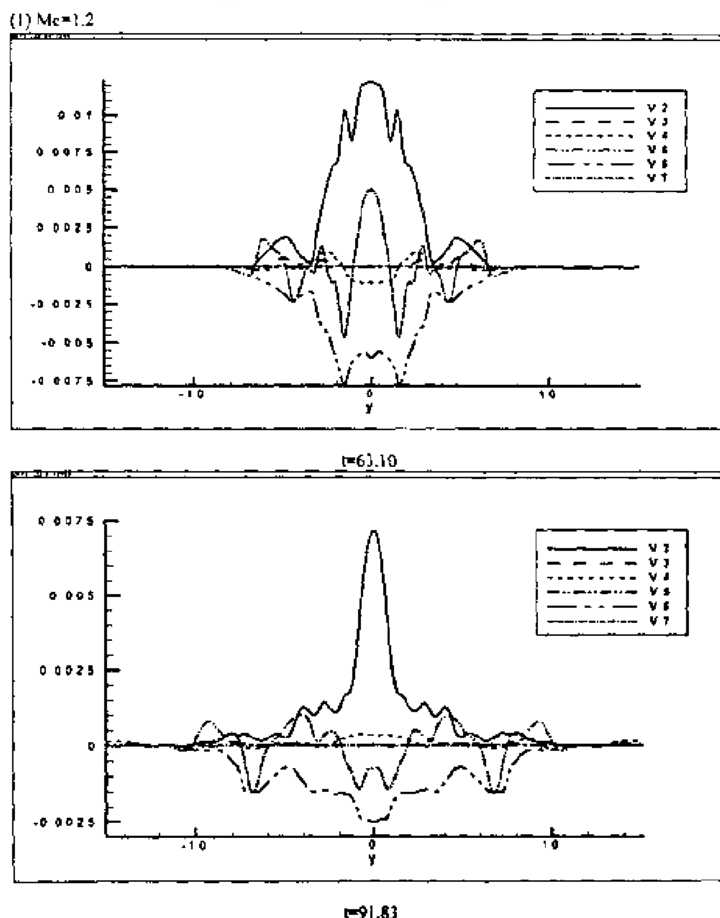


图 4 P_{kk}，Π_{kk2}，ε_d和ε_s随y的变化

利用槽道湍流直接模拟的数据[4]，分析了可压缩效应对壁湍流的影响。在图 5 中给出了可压和不可压槽道湍流在近壁处同一法向位置的平面上所得到的条纹结构。从这里可以看出，二者有明显差别，它表明了可压缩效应对近壁湍流拟序结构的影响。从能量方程出发分析了产生这一差别的原因。指出，近壁处压力-膨胀项将部分湍流脉动动能转换为内能，使得近壁处速度条带结构更加平整。

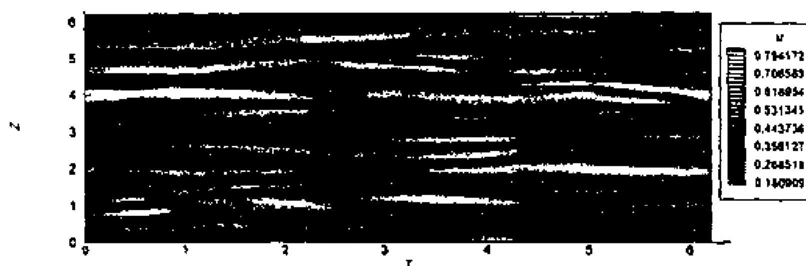


图 5(a)　$Ma = 0.8$ 的可压槽道湍流在$1-|y| = 0.04$处的流向速度分布图

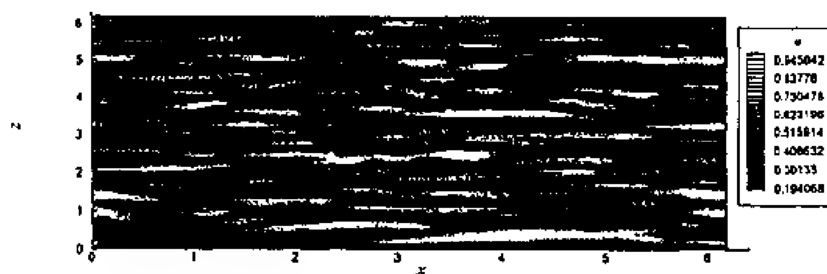


图 5(b)　不可压槽道湍流在 $1-|y|=0.04$ 处的流向速度分布图

参 考 文 献

1　Fu Dexun，Ma Yanwen. A high order accurate difference scheme for complex flow field. *J Comput Phys*，1997，134：1~15

2　傅德薰，马延文，张林波. 可压混合层流动转捩到湍流的直接数值模拟. 中国科学，A 辑，2000，30(2)：161~168

3　王强，傅德薰，马延文. 可压缩平面混合层稳定性数值计算. 空气动力学学报，1999，17(3)：292~298

4　傅德薰，马延文，李新亮. 湍流的直接数值模拟及高精度计算方法. 见：第六届全国湍流与流动稳定性学术会议论文集. 上海：上海大学出版社，2000

热湍流的直接数值模拟[1)]

鄞庆增 王健平
（北京大学湍流研究国家重点实验室，北京 100871）

摘要 采用时间分裂法进行热湍流直接数值模拟，各物理量的导数用有限谱方法计算，相应的 Rayleigh 数为：10^8，10^9，10^{10}。

关键词 热湍流，数值模拟，时间分裂法

热湍流是目前较受关注的研究课题，已有较多的实验结果发表[1, 2]，但直接数值模拟似尚未见报导。考虑一立方体盒子内的热对流湍流。盒子的底面和顶面各保持固定温度，侧壁是绝热的。在 Boussinesq 近似下，控制流动的基本方程组为

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_k}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t}+V_k\frac{\partial V_i}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p^*}{\partial x_i}+\nu\nabla^2 V_i+\alpha Tg\delta_{3i} \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+V_k\frac{\partial T}{\partial x_k}=\kappa\nabla^2 T \tag{3}$$

式中：V_k 为速度分量，T 为温度，p 为压力，ρ 为密度，g 为重力加速度，ν 为运动学黏性系数，κ 为热传导系数，α 为热膨胀系数。ρ_0 为相对于参考温度 T_0（可取为顶面和底面的平均温度）的密度，$p^*=p-\rho_0 gz$，若以特征长度 L，特征速度 $\sqrt{gL}$，特征时间 $\sqrt{L/g}$，特征温度 Δ（底面和顶面的温度差），将以上方程无量纲化，则可得

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_k}=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t}+V_k\frac{\partial V_i}{\partial x_k}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{1}{Re}\nabla^2 V_i+\frac{Ra}{Re^2 Pr}T\delta_{3i} \tag{5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+V_k\frac{\partial T}{\partial x_k}=\frac{1}{Re\cdot Pr}\nabla^2 T \tag{6}$$

式中，$Re=L\sqrt{gL}/\nu$ 为 Reynolds 数，$Ra=\alpha g\Delta L^3/\kappa\nu$ 为 Rayleigh 数，$Pr=\nu/k$ 为 Prandtl 数。

---

1) 国家自然科学基金(批准号 19925208)资助项目

方程中各量均为无量纲。边界条件为

$$x_i = \pm 1: \quad V = 0, \qquad i = 1,2,3$$

$$x_3 = -1: \quad T = \Delta/2; \qquad x_3 = 1: \quad T = -\Delta/2; \qquad x_1, x_2 = \pm 1: \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \tag{7}$$

计算采用时间分裂法[3]。方程（5）分裂成以下两步

$$\frac{V_i^{n+1/2} - V_i^n}{\Delta t} + H_i^{n+1/2} = \frac{1}{2Re}\nabla^2 V_i^n + \frac{Ra}{2Re^2 Pr} T^n \delta_{3i} \tag{8}$$

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^{n+1/2}}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1/2} + \frac{1}{2Re}\nabla^2 V_i^{n+1} + \frac{Ra}{2Re^2 Pr} T^{n+1} \delta_{3i} \tag{9}$$

式中 $H_i = \frac{\partial}{\partial x_k}(V_i V_k)$，方程（6）分裂成以下两步

$$\frac{T^{n+1/2} - T^n}{\Delta t} + G^{n+1/2} = \frac{1}{2RePr}\nabla^2 T^n \tag{10}$$

$$\frac{T^{n+1} - T^{n+1/2}}{\Delta t} = \frac{1}{2RePr}\nabla^2 T^{n+1} \tag{11}$$

式中 $G = \frac{\partial}{\partial x_k}(TV_k)$。对于惯性项，我们令

$$H_i^{n+1/2} = \frac{1}{2}(3H_i^n - H_i^{n-1}) \tag{12}$$

$$G^{n+1/2} = \frac{1}{2}(3G^n - G^{n-1}) \tag{13}$$

以上处理相当于对非线性项按显式 Adams-Bashforth 格式，对黏性项用隐式 Crank-Nicolson 格式。计算在物理空间中进行，但各物理量的导数均用局部谱方法[4]求得。这样可以获得比差分法高的精度。利用 $\nabla \cdot V^{n+1} = 0$，对(9)两边取散度可得

$$\nabla^2 p^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t}\nabla \cdot V^{n+1/2} + \frac{Ra}{2Re^2 Pr}\frac{\partial T}{\partial x_3} \tag{14}$$

计算步骤为：(a) 显式求解(10)得 $T^{n+1/2}$；(b) 隐式求解(11)得 T^{n+1}；(c) 显式求解(8)得 $V^{n+1/2}$；(d) 求解(14)得 $p^{n+1/2}$；(e) 隐式求解(9)得 V^{n+1}；(f) 重复以上各步。

Poisson 方程(14)用展成 Fourier 级数的方程求解

$$p^{n+1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} C_{nmk} \cos n\pi x \cos n\pi y \cos k\pi z \tag{15}$$

为了提高固壁附近的分辨率，采用非均匀网格。作变换 $x_i = \cos \pi\xi_i$，$\xi_i^n = (n-1)/(N-1)$。

令 $N=200$，有将近 8×10^6 个网格点。计算参数取为：$Re=10000$，$Pr=1$，$Ra=10^8$，10^9，10^{10}。

计算了各种情况下的 Nussel 数 Nu 和 Ra 之间的依赖关系，并与实验相对照。计算了固壁附近和中心区的能谱，以及速度结构函数和温度结构函数的标度指数。

参 考 文 献

1 Castaing B et al. Scaling of hard thermal turbulence in Rayleigh-Benard convection. *J Fluid Mech*，1989，204：1~30

2 Glazier JA et al. Evidence against ultrahard thermal turbulence of very high rayleigh numbers. *Nature*，1999，398：307~309

3 Kim J，Moin P. Application of fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations *J of Comput Phy*，1985，59：308~323

4 王建平. 有限谱法与计算流体力学. 第二届海峡两岸计算流体力学研讨会，绵阳，1999

$k-\omega$模型在紊流计算中的应用

杨建明　吴建华

（南京水利科学研究院，南京　210029）

摘要　将 Wilcox 提出的 k-ω 紊流模型与壁面函数相结合，应用于复杂紊流流动的数值模拟。控制方程组采用非正交同位网格有限体积法求解。给出了详细的计算结果，并与实验资料进行了分析比较。结果表明，与 k-ε 紊流模型相比，k-ω 紊流模型有较好的预测效果，得到的回流区长度较为准确，收敛性能也有较大的改善。

关键词　k-ω 紊流模型，紊流流动，数值模拟

引　言

目前 k-ε 紊流模型在工程紊流计算中获得了广泛的应用，对很多问题都可得到较为满意的结果。但对于某些类型的流动，如强旋流、浮力流、分层流及曲壁边界层等，k-ε 模型所得结果则较差。应用 k-ε 模型还经常出现的问题是，在计算回流流动时，所得回流强度较弱，回流区长度往往较实测结果要小。另一个问题是 k-ε 紊流模型方程的“刚度”很大，收敛速度往往较动量方程慢得多，这一点以ε 方程尤甚。由于 k-ε 紊流模型两个方程的模化过程中，k 方程是逐项模化得来的。而在模化ε 方程时，因个别项的模化极其困难，且缺乏相应的实验数据，不得不经过各项的量级分析，略去小项，进而根据紊流能量逐级传递及应当存在源、汇的分析，按照梯度模拟假设和量纲一致的原则来得到ε 方程的模拟。这也说明了实际计算时ε 方程为何表现较差。

1988 年 Wilcox[1]提出一种称为 k-ω 紊流模型的双方程紊流模型，经过十年来的应用（如文献[2，3]）表明这个模型相对于 k-ε 模型要优越一些。原因在于ω 代表了涡旋的脉动，它比紊动能的耗散率ε 更能反映紊流的主要特性。相对于 k-ε 模型来说，k-ω 模型大大提高了对有逆压梯度的流动的预测能力，对于黏性子层的处理也改进很多，整个计算的稳定性和收敛速度都有很大改善。由于 k-ω 模型需直接积分至壁面，因而在壁面附近需采用极其细密的网格，考虑到所用计算机速度与容量有限，本文中仍采用壁面函数处理近壁低 Re 数区域，以节省计算量。

1　控制方程组与数值求解方法

不可压缩流体二维定常紊流流动的基本控制方程组为

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial x_i}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho U_i U_j)}{\partial x_j}=-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu+\mu_t)\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\right] \tag{2}$$

式中 i，$j=1$，2，μ 为动力黏性系数，涡黏性系数μ_t 为

$$\mu_t=\gamma_k\frac{\rho k}{\omega} \tag{3}$$

紊动能 k 和紊动能的“特定”耗散率ω 由以下方程确定

$$\frac{\partial(\rho U_j k)}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left((\mu+\sigma_k\mu_t)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right)+P_k-\beta_k\rho\omega k \tag{4}$$

$$\frac{\partial(\rho U_j \omega)}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left((\mu+\sigma_\omega\mu_t)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right)+(\gamma_\omega\omega/k)P_k-\beta_\omega\rho\omega^2 \tag{5}$$

其中产生项 P_k 为

$$P_k=\mu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

k-ω 模型中 6 个常数的值为

$$\beta_k=9/100,\quad \gamma_k=1,\quad \sigma_k=1.92,\quad \beta_\omega=3/40,\quad \gamma_\omega=5/9,\quad \sigma_\omega=1/2$$

本文采用的壁面函数为

$$U^+=\frac{U_t}{U_\tau}=\frac{1}{\kappa}\ln n^+ +B$$

$$n^+=\rho U_\tau n/\mu$$

$$\omega_P=\frac{k_P^{1/2}}{\beta_k^{1/4}\kappa n_P}$$

其中 U^+为无因次速度，n^+为无因次距离，U_t 为平行于壁面的流速，U_τ 为摩阻流速，n 为节点到壁面的距离。近壁节点上的紊动能 k 仍通过 k 方程计算得到。

本文计算在贴体非正交网格上进行。这种网格的优点是可以很好地适应任何几何形状，也比曲线正交网格易于获得较好的网格密度分布。由于网格是贴体的，对弯曲边界来说，边界条件就比用阶梯状近似易实现得多。而且网格可以适应于不同的流动，例如选择一组网格线顺沿流线的方向以提高计算精度，在变量梯度较大的区域采用较小的空间步长等。

80 年代初 Rhie 和 Chow[4]提出了在同位网格上实现压力速度耦合的方法后，其推广应用非常迅速[5, 6]。本文采用同位网格有限体积法来离散控制方程组，这种方法的主要优点在于复杂计算区域中处理边界比较方便，且变量都位于同一节点，易于编程。

2 计算实例与分析

文献[7]对缩窄圆管中的紊流流动情况作了实验研究，本文以此为基础来作数值模拟并进行对比分析。缩窄圆管的概要示意如图 1。圆管的半径为 R，缩窄段的长度为 $4R$，设收缩最窄处的轴向坐标为 $z=0$，则整个缩窄圆管的形状可由以下关系式给定

$$r(z)=\begin{cases}R\left[1-\frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{\pi z}{2R}\right)\right], & |z|\le 2R\\ R, & |z|>2R\end{cases}$$

由于这是一个轴对称问题，可沿圆管的中心轴取其一半作为计算区域。

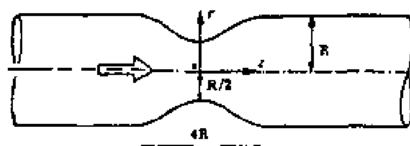


图 1　缩窄圆管示意

圆管进口流速为 $U=U_{\max}(y/R)^{1/6.4}$，Re=15 000。计算分别在三层不同密度的网格上进行，以研究网格密度对计算精度的影响。三层网格的控制体积(control volumes，CVs)数目分别为 90×20，180×40 及 360×80。图 2 给出的是第一层计算网格的部分。在流动变化较为剧烈的管壁附近布置了较多节点，缩窄段的网格分布也要密集一些。可以看到，网格的质量是比较好的，网格线比较光滑，对弯曲边界的描述也很准确。

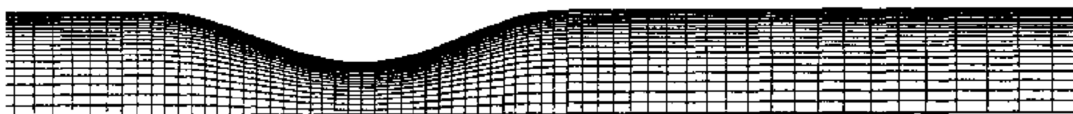


图 2　计算网格(第一层，部分)

图 3 中给出了利用 k-ω 模型分别在不同密度的三层网格上得到的管轴线水平速度分布。在大部分位置上不同网格所得结果相差很小，缩窄段及随后的部分范围内略有些差别，说明在流动变化较为剧烈的地方网格密度对计算结果有一定影响。

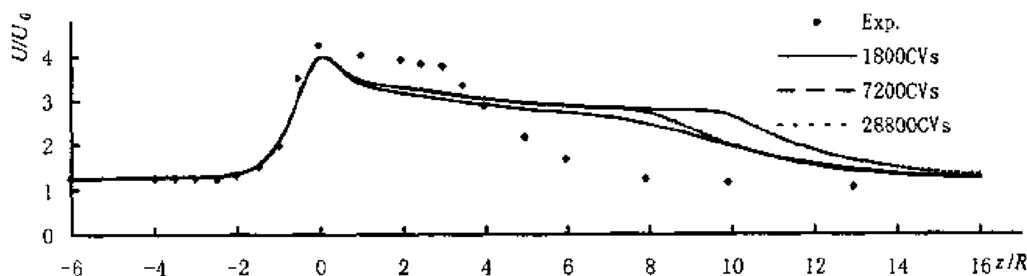


图 3　计算结果的网格无关性

图 4 为管壁上的压力分布。在圆管收缩段，由于流动急剧加速，压力产生了陡峭的坡降。在扩大段的前半部分，压力有较大幅度的跃升。在此之后直至出口，压力的变化较为微弱。预测结果在回流区前与实测结果吻合得较好，过最窄点后的趋势也完全一致，但因回流区的预测强度较弱，压力的恢复较大。可以看出 k-ω 模型所得结果略优于 k-ε 模型。

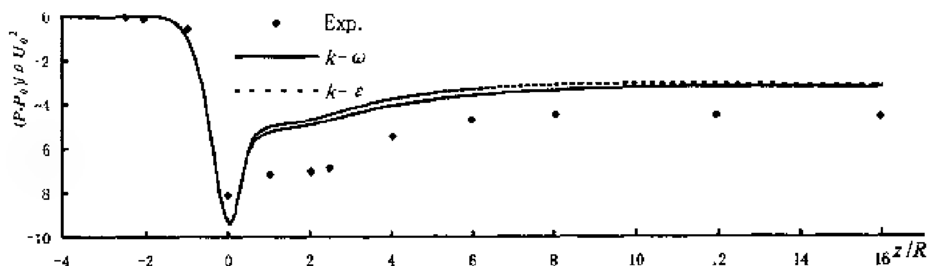


图 4　管壁压力的比较

图 5 为两种模型预测的管轴线水平速度分布。在最窄处以前计算结果与实验资料吻合得较好；过最窄处后，计算所得速度下降比实验结果要大得多，相应地压力有一个比实验结果

更为急剧的跃升；实验资料中管轴水平速度在 $z\approx3.8R$ 后开始下降，但计算所得速度在 $z\approx8R$ 后才开始下降；在缩窄圆管的后段，逐渐恢复为充分发展的圆管流动，计算所得结果则恢复得较为缓慢一些。由于主流区的速度大小受回流区长度及其强度的影响，在没有准确计算出回流区的情况下，这种结果也很正常。由这一预测结果很难说两种模型孰优孰劣。文献[6]采用 Reynolds 应力模型(RSM)对此问题的模拟结果也在图 5 中给了出来，可以认为，本文的数值模拟结果与 RSM 模拟的结果相差较小。要指出的是，文献[6]对固壁边界也是采用壁面函数来处理的。可见除模型本身不太完善外，在这种有逆压梯度的流动中，通常的壁面函数存在较大问题。

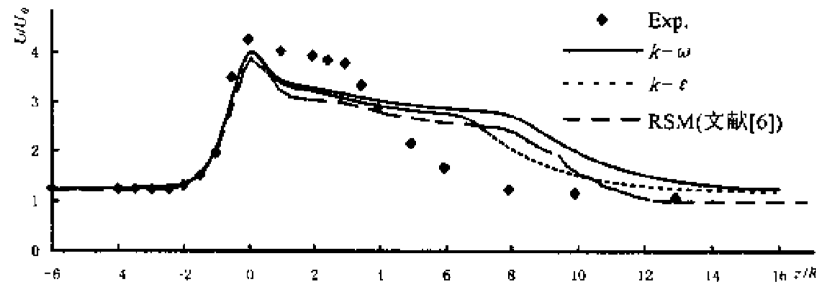


图 5 轴线水平速度的比较

图 6 为两种紊流模型所预测的不同位置上沿径向的水平速度及其与实验数据的对比。可见，k-ω 模型在回流区的计算中有较明显的优越性。它计算得的速度更接近于实验结果，预测得的回流长度也更为准确一些。但在流动的充分发展段 k-ω 模型所得的速度分布比 k-ε 模型要恢复得慢些，这可能跟计算区域取得较短有一定关系。可以看出，两种模型都没有预测到足够的回流强度，回流区的厚度也小于实测结果，开始分离的位置也比较滞后。要想准确地预测这种有逆压梯度的流动，各向同性涡黏性模型可能还是有较大的局限。

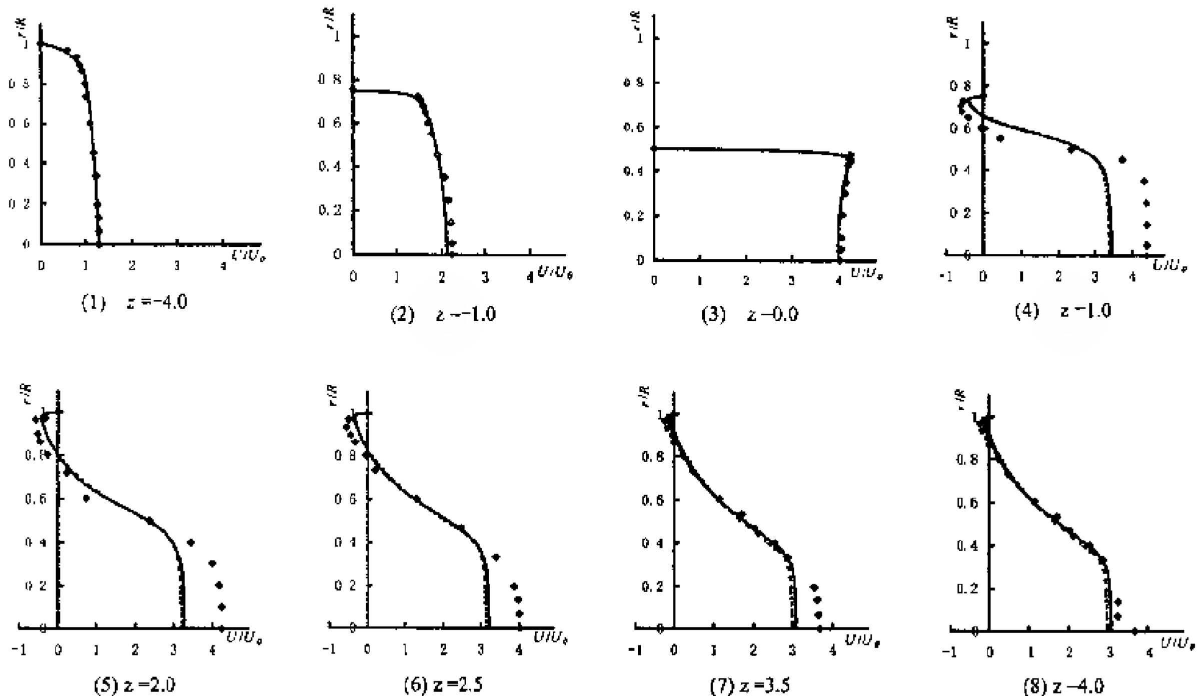
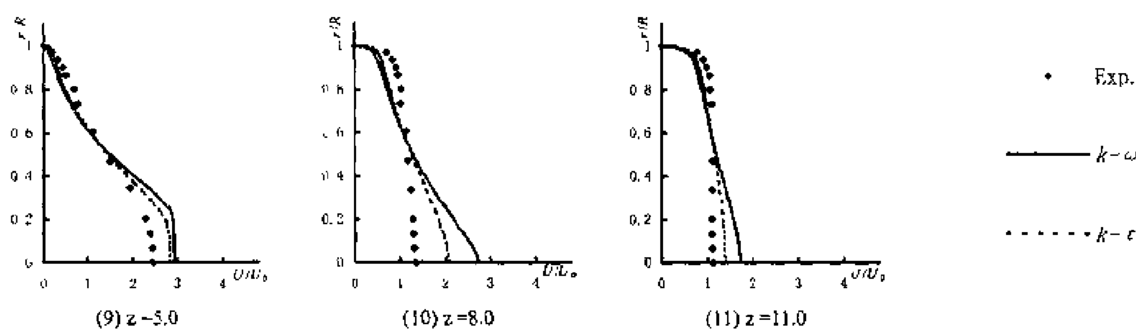


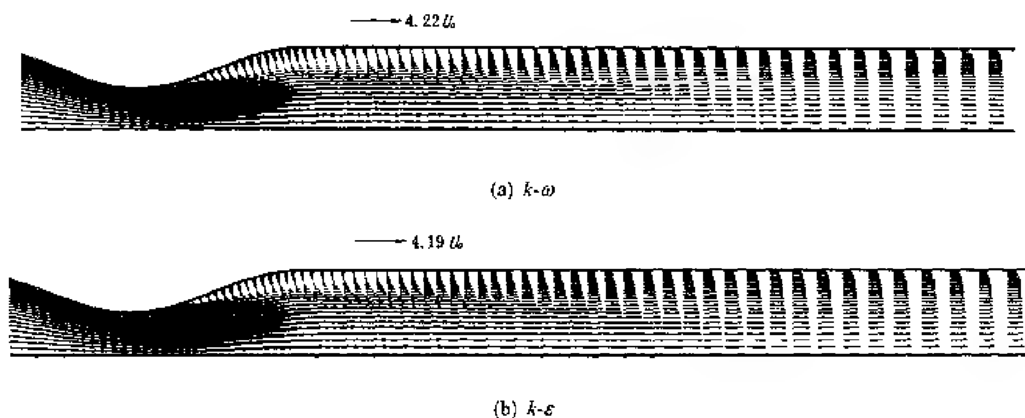
图 6 不同位置水平速度的比较



(9) z=5.0　　(10) z=8.0　　(11) z=11.0

图 6　不同位置水平速度的比较

图 7 为两种模型计算的速度矢量场。从中可以发现在缩窄段有一个强加速区，然后是由于逆压梯度所形成的流动分离区。

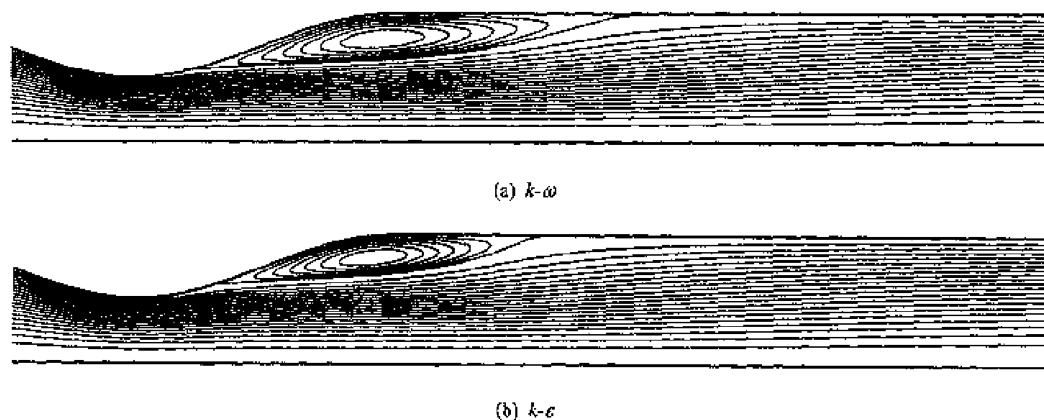


(a) k-ω

(b) k-ε

图 7 速度矢量场比较

图 8 为两种模型计算所得的流线图。k-ε 模型预测的分离点比 k-ω 模型所得结果要滞后得多。实测得的重附着点在 $z = 4R$ 附近，k-ω 模型对这一点预测得比较准确，而 k-ε 模型所得回流区要短得多。由不同位置水平速度的比较可以看出，两种模型对回流区厚度的预测都不是很好。



(a) k-ω

(b) k-ε

图 8 流线图比较

Farhanieh et al.[6]对这个问题的数值模拟也采用了同位网格，RANSE 的封闭采用 RSM 和 k-ε 模型，固壁边界利用壁面函数来处理，还对对流项使用了不同的差分格式。但他们计算

出的管轴线水平速度(图 5)及给出的流线图表明 RSM 与双方程模型的计算结果相差不大，二者所得的速度分布在回流之前及圆管后段重发展区与实测结果吻合很好，而对回流的长度、厚度和相应于回流区圆管段的速度预测均不是很理想。

本文的计算也有类似问题。究其原因，除了模型本身尚有待进一步改进外，可以认为主要是采用了壁面函数的缘故。对于这种有逆压梯度的边界层分离流动，赖以导出壁函数关系的流速对数分布律在分离点和重附着点并不成立。

这一算例还表明采用 k-ω 模型比 k-ε 模型要收敛得快一些。在计算的各项条件，即网格、离散格式及各项方程的松驰因子均相同的情况下，两种模型的收敛速度有较大差别。k-ω 模型几乎只需 k-ε 模型一半的迭代次数就达到了相同的收敛标准。主要因为紊流模型方程的"刚度"比较大，计算时紊流模型方程需要比动量方程和压力校正方程更多的迭代次数才能达到与其它方程一样的收敛标准。而采用 k-ω 模型时因紊流模型的性能有所改善，收敛速度自然也有所提高。

3 结 论

本文将 k-ω 模型与壁面函数相结合，对有逆压梯度的缩窄圆管紊流流动进行了数值模拟，计算结果表明：

(1) 同样条件下，k-ω 模型可得到比 k-ε 模型更好的预测结果，计算出的回流区长度与实测资料更为吻合，分离点的位置比 k-ε 模型更接近实际；

(2) 同样条件下，k-ω 模型的收敛速度比 k-ε 模型快，收敛性能有较大的改善。

参 考 文 献

1 Wilcox DC. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA J*, 1988, 36(11): 1299~1310

2 Zheng X, Liao C, Liu C, Sung C and Huang T. Multigrid computation of incompressible flows using two-equation turbulence models. *J Fluids Engrg*, 1997, 119: 893~905

3 Liu C, Zheng X, Sung C. Preconditioned multigrid methods for unsteady incompressible flows. *J Comput Phys*, 1998, 139: 35~57

4 Rhie CM, Chow WL. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA J*, 1983, 21(11): 1525~1532

5 Peric M, Kessler R, Scheuerer G. Comparison of finite-volume numerical methods with staggered and colocated grids. *Comput Fluids*, 1988, 16(4): 389~403

6 Farhanieh B, Davidson L, Sunden B. Employment of second-moment closure for calculation of turbulent recirculating flows in complex geometries with collocated variable arrangement. *Int J Numer Meth Fluids*, 1993, 16: 525~544

7 Deshpande MD, Giddens DP. Turbulence measurements in a constricted tube. *J Fluid Mech*, 1980, 97: 65~89

湍流能量耗散率方程的模拟 1)

蒋剑波 王利兵 卢志明

(上海大学 上海市应用数学与力学研究所，上海 200072)

摘要 湍流能量耗散率ε方程中各项的模拟在模式理论中一直是很难处理的问题。本文利用单影响函数的两尺度直接相互作用原理研究了该问题并且建立了ε方程的模型方程。之后将所得结果与前人的结果及标准的 K-ε 模式进行了比较。所得结果表明：(1) $C_{\varepsilon2}$ 与湍流普朗特数是无关的，这与 Rubinstein(1996)的结果是一致的；(2) ε 方程中模型系数与标准的 K-ε 模式及 Yoshizawa(1988)模型系数相近，但得出的方法是不同的，因而本文为湍流能量耗散率ε方程的模拟提供了理论基础。

关键词 湍流能量耗散率，直接相互作用原理

引 言

众所周知，模式理论从本质上来说是一种唯象的方法，封闭方程往往是靠敏锐的物理直觉、类比，而非严格的数学证明。尤其是对于湍流能量耗散率ε以及被动标量方差ε_θ方程中各项的模拟更是如此，因此一直存在很大的争议。传统的模式理论从量纲分析的角度出发，分别对湍流扩散项及小涡引起的产生项、黏性破坏项进行了模拟。具体地讲，是对这些项的代数和进行了模拟，而并不是对每一项都进行精确的模拟。

Yoshizawa[1]从 Kraichnan[2]的直接相互作用原理（简称 DIA）出发，将直接相互作用原理与多重尺度法结合，同时根据平均场与脉动场特征尺度的不同引入了两尺度的直接相互作用原理（简记为 TSDIA），从而使得仅停留于理论意义上的 DIA 可以应用到模式理论中来，同时为传统的模式理论提供了理论依据。Yoshizawa[3]利用 TSDIA 研究了湍流能量耗散率ε方程的模拟，其中利用了可解性条件建立了湍流能量耗散率ε方程与湍能k方程的联系，从而得到了ε方程的模拟。然而在 TSDIA 中高阶速度分量是不满足连续性条件的，因此 Yoshizawa[1]引入了两个影响函数。但是这却导致了所得的模型系数与实验值存在较大的偏差。Hamba[4]的研究表明，通过引入一个变换在 TSDIA 中只需一个影响函数即可使得高阶速度分量满足连续性条件。之后 Shimomura[5]运用单个影响函数的 TSDIA 分析了雷诺应力、标量通量的扩散项，得到了优于 Yoshizawa[6]的结果。Rubinstein & Zhou[7]利用湍能耗散率ε与湍能能量k在惯性子区的关系，同时利用准正态分布的假定给出了湍能耗散率ε方程中破坏项的模拟。所得结果表明$C_{\varepsilon2}$与湍流普朗特数是无关的。

本文利用了修正的单影响函数的两尺度直接相互作用原理研究了ε方程中各项的模拟，第一部分给出基本方程，第二部分简要介绍 TSDIA 并给出对其的修正，第三部分利用经过修正的单影响函数的 TSDIA 对ε方程中各项进行了模拟，第四部分进行了讨论。

1 基本方程

假设流体不可压缩。

脉动速度、压力、湍能耗散率方程分别为

1) 国家自然科学基金资助项目 (No. 19872043)

$$\frac{\partial\tilde{u}^{a}}{\partial t}+U^{a}\frac{\partial\tilde{u}^{a}}{\partial x^{a}}+\tilde{u}^{a}\frac{\partial U^{a}}{\partial x^{a}}+\frac{\partial}{\partial x^{a}}(\tilde{u}^{a}\tilde{u}^{a}+R^{aa})=-\frac{\partial\tilde{p}'}{\partial x^{a}}+\nu\frac{\partial^{2}\tilde{u}^{a}}{\partial x^{a}\partial x^{a}} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^{2}\tilde{p}'}{\partial x^{a}\partial x^{a}}=-\frac{\partial}{\partial x^{a}\partial x^{b}}(\tilde{u}^{a}\tilde{u}^{b}+R^{ab})-\frac{\partial U^{b}}{\partial x^{a}}\frac{\partial\tilde{u}^{a}}{\partial x^{a}} \tag{2}$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+U_{k}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_{k}}=-\frac{\partial}{\partial x_{l}}\left(-\overline{\varepsilon_{l}'u_{l}}-\frac{2\nu}{\rho}\overline{\frac{\partial p}{\partial x_{j}}\frac{\partial u_{l}}{\partial x_{i}}}+\nu\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_{l}}\right)-2\nu\frac{\partial U_{i}}{\partial x_{j}}\left(\overline{\frac{\partial u_{l}}{\partial x_{j}}\frac{\partial u_{l}}{\partial x_{i}}}+\overline{\frac{\partial u_{i}}{\partial x_{l}}\frac{\partial u_{j}}{\partial x_{l}}}\right)-$$

$$2\nu\overline{\frac{\partial u_{i}}{\partial x_{j}}}\frac{\partial^{2}U_{i}}{\partial x_{l}\partial x_{j}}-2\nu\overline{\frac{\partial u_{i}}{\partial x_{j}}\frac{\partial u_{i}}{\partial x_{l}}\frac{\partial u_{j}}{\partial x_{l}}}-2\overline{\left(\nu\frac{\partial^{2}u_{i}}{\partial x_{j}\partial x_{j}}\right)^{2}} \tag{3}$$

利用量纲分析可知，方程(3)中只需对湍流耗散项、小涡拉伸项及黏性破坏项，即对(3)中等式右端的第一项、第四项及第五项，进行模拟。

2 单影响函数的两尺度直接相互作用原理（SRTSDIA）

单影响函数的 TSDIA 详细步骤可参见文献[1，5]。本文首先对 TSDIA 在惯性子区形式进行了修正，之后再利用以 Shimomoru[5]提出了新的低波数截断法为基础的单影响函数的 TSDIA 来分析 ε 方程中需要模拟的几项。对于湍流被动标量通量耗散率 ε_{θ} 方程的模拟将是下一步的工作。

假定 $Q(k;t,t')$，$G(k;t,t')$，$Q_{\theta}(k;t,t')$，$G_{\theta}(k;t,t')$ 具有如下形式

$$\begin{aligned}&Q(k;t,t')=\phi(k)\exp[-\omega(k)|t-t'|],\quad G(k;t,t')=H(t-t')\exp[-\omega(k)|t-t'|]\\&Q_{\theta}(k;t,t')=\phi_{\theta}(k)\exp[-\omega(k)|t-t'|],\quad G_{\theta}(k;t,t')=H(t-t')\exp[g\omega_{\theta}(k)|t-t'|]\end{aligned} \tag{4}$$

与 Yoshizawa[1]，Shimomura[5]不同，我们在(4)中时间尺度并没有采用 $\omega(k)$ 近似而是直接取 $\omega_{\theta}(k)$。其中 $H(t)$ 为单位阶梯函数，对速度场而言可得

$$\delta(k)=\delta\varepsilon^{2/3}k^{-11/3}H(k-k_{m})\qquad\qquad \omega(k)=\omega\varepsilon^{1/3}k^{2/3}$$

其中

$$\omega=0.42,\qquad \sigma=0.12$$

下面我们来确定 $\phi_{\theta}(k)$，$\omega_{\theta}(k)$ 的表达式以及 g 的值。

$Q_{\theta}(k;t,t')$ 满足的方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma k^{2}\right)Q_{\theta}(k;t,t')=-k^{2}\int_{p>k}a(k,p,q)dp\left[\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_{1}G(q;t,t_{1})Q(k;t,t_{1})G_{\theta}(k;t,t_{1})-\int_{-\infty}^{t'}\mathrm{d}t_{1}G(k;t,t_{1})Q(k;t,t_{1})Q_{\theta}(k;t,t_{1})\right] \tag{5}$$

其中 $q=|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}|$，$a(k,p,q)=1-y^{2}$，$x,y,z$ 为 $\boldsymbol{k},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ 构成的三角形的内角的余弦。将(4)式代入到(5)式中并令 $t=t'$，施行积分 $\int_{l>k}$ 可得

$$2\int_{l>k}\int_{p}l^{2}a(l,p,q)\left(\frac{\sigma(p)Q(l)}{g\omega_{\theta}(q)+\omega_{\theta}(p)+\omega_{\theta}(l)}-\frac{\sigma(p)Q(q)}{\omega_{\theta}(q)+\omega_{\theta}(p)+g\omega_{\theta}(l)}\right)=$$

$$-2k\int_{l} l^2\theta(l)\mathrm{d}l \approx -2k\int_{l>k} l^2\theta(l)\mathrm{d}l \tag{6}$$

$G_\theta(k;t,t')$ 满足的方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma k^2\right)G_\theta(k;t,t') = -k^2\int_{p>k} a(k,p,q)\mathrm{d}p\left[\int_{t'}^{t}\mathrm{d}t_1 G_\theta(q;t,t_1)G_\theta(k;t,t_1)Q(p;t,t_1)+\delta(t-t')\right] \tag{7}$$

将(4)代入到(7)中，对 t' 从+0 积分到∞，得

$$\omega_\theta(k) = k^2\int_{p>k}\frac{\sigma(p)a(k,p,q)}{g\omega(q)+\omega(p)} = \int_p (a(k,p,q)-c(k,p,q))\frac{\sigma(p)}{g\omega(q)+\omega(p)} \tag{8}$$

于是有

$$\phi_\theta(k) = \theta\chi\delta\varepsilon^{2/3}k^{-11/3},\quad \theta \text{ 为常数} \tag{9}$$

同时可得

$$g = 4.20\iint_\Delta (a(1,p,q)-c(1,p,q))\frac{p^{2/3}}{gq^{2/3}+p^{2/3}}\mathrm{d}p\mathrm{d}q \tag{10}$$

$$\frac{1}{\phi_\theta(k)} = -44.4\int_1^\infty \mathrm{d}l\iint_\Delta (a(1,p,q)-c(1,p,q))l^3\left(\frac{p^{-11/3}l^{-11/3}}{gq^{2/3}+p^{2/3}+l^{2/3}}-\frac{p^{-11/3}q^{-11/3}}{q^{2/3}+p^{2/3}+g^{2/3}}\right)\mathrm{d}p\mathrm{d}q \tag{11}$$

Δ 表示积分区域，Δ 为平面区域 (p,q) 中的一部分，它满足如下条件：$\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{l}$ 构成三角形。其中[6]

$$g = 1.23,\quad \theta = 0.089,\quad \phi_\theta(k) = 0.089\varepsilon_\theta\delta\varepsilon^{2/3}k^{-11/3},\quad \omega_\theta(k) = 1.67\varepsilon^{1/3}k^{2/3} \tag{12}$$

由以上计算可见，我们并没有引入标量的低波数截断 k_θ。而 Yoshizawa[6]及 Shimomura[5]均在计算中引入了 k_θ。正如 Shimorura[5]所述，虽然通过引入 k_θ 得到的某些结果与实验数据吻合得较好，但是 k_θ 的引入是没有理论依据的。事实上，动量低波数截断 k_m 的引入是为了解决 EDIA 中能谱积分的发散问题，从物理角度来看能谱积分的发散是由于 EDIA 没有正确地描述大涡与小涡的相互作用。正是这一错误导致了 EDIA 在计算能谱的惯性子区的形式时得到了错误的结果。因此，引入 k_m 是有物理依据的，而 k_θ 的引入却并非如此。由此看来，在 $Q_\theta(k;t,t')$ 形式的选择上就不应该作 $\omega(k)=\omega_\theta(k)$ 的假定。

3 计算结果

湍流能量输运项为

$$\Pi(k') = \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{k<k'}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\int_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{d}\boldsymbol{q}P_{imn}(\boldsymbol{k})\langle u_m(\boldsymbol{p})u_n(\boldsymbol{q})u_i(-\boldsymbol{k})\rangle \tag{13}$$

因而湍能耗散率为

$$\varepsilon=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\int_{k'}^{2k'}\mathrm{d}k\int_{p,q<k',k=p+q}\mathrm{d}p\mathrm{d}q+\int_{0}^{k'}\mathrm{d}k\int_{p,q\geq k',k=p+q}\mathrm{d}p\mathrm{d}q\right)P_{imn}(k)<u_m(p)u_n(q)u_i(-k)> \tag{14}$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt}-\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\int_{k'}^{2k'}\mathrm{d}k\int_{p,q<k',k=p+q}\mathrm{d}p\mathrm{d}q+\int_{0}^{k'}\mathrm{d}k\int_{p,q\geq k',k=p+q}\mathrm{d}p\mathrm{d}q\right)P_{imn}(k)\frac{D}{Dt}<u_m(p)u_n(q)u_i(-k)>)$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{2}\left[\left(\int_{k'}^{2k'}\mathrm{d}k\int_{p,q<k,k=p+q}\mathrm{d}p\mathrm{d}q+\int_{0}^{k'}\mathrm{d}k\int_{p,q\geq k',k=p+q}\mathrm{d}p\mathrm{d}q\right)P_{imn}(k)\times\left(<\frac{Du_m(p)}{Dt}u_n(q)u_i(-k)>+\right.\right.$$

$$\left.\left.<u_m(p)\frac{Du_n(q)}{Dt}u_i(-k)>+<u_m(p)u_n(q)\frac{Du_i(-k)}{Dt}>\right)\right] \tag{15}$$

在引入两尺度后，将脉动速度、压力满足的方程分别代入到（15）式中，并利用采用惯性区域理论来对上述结果进行简化（即将关联函数与影响函数用其惯性区的形式来代替）。其中 k_m 可由下式确定

$$K=\frac{1}{2}\overline{u_i u_i}\approx 4\pi\int_0^{\infty}\mathrm{d}k k^2 Q(k,t,t)=6\pi\sigma\varepsilon^{2/3}k_m^{-2/3} \tag{16}$$

得

$$k_m=(6\pi\sigma)^{2/3}K^{-2/3}\varepsilon \tag{17}$$

k_m 代表的是惯性子区的低波数端，引入它是为了避免能谱函数积分在低波数端的发散。因此，对 $\omega(k)$ 也应引入低波数截断。然而目前我们仅对 $\phi(k)$ 进行波数截断。这样处理的依据是：对湍流特征时间尺度引入惯性子区的近似造成的偏差并不象 $\phi(k)$ 那样大，即使在含能涡区也是如此，因为随着湍流空间尺度的增大，湍流时间尺度也将随之增大。于是可得

$$\frac{D\varepsilon}{Dt}=\frac{\sigma^2}{\alpha}\varepsilon k_m{}^2\left[\left(I_{11}+\frac{1}{5}I_{12}+I_{13}+\frac{1}{4}I_{21}+I_{23}\right)\frac{1}{\varepsilon^2}-\left(5I_{21}+6I_{23}+\frac{1}{3}I_{33}\right)\frac{1}{k_m}\frac{\partial k_m}{\partial x_i}+\right.$$

$$\left.(5I_{31}+2I_{41}+I_{23}+4I_{43})\frac{1}{k_m}\frac{\partial k_m}{\partial x_i}\right] \tag{18}$$

我们再来看讨论耗散率方程中的黏性破坏项。此时，该项的形式为

$$-\frac{1}{4}\int_0^{k_M}\mathrm{d}k\int_{k=p+q,p,q\geq k_M}^{k_M}\mathrm{d}p\ \mathrm{d}qP_{imn}(k)P_{trs}(k)Q_{mn}(p)Q_{trs}(q)=-C\varepsilon^{3/4}K_M^{2/3} \tag{19}$$

而破坏项又可近似为 $16\pi\nu^2\int_{K_M}^{\infty}k^6Q(k,t,t)\mathrm{d}k$，并且 $E(k)=4\pi k^2Q(k)=\frac{3}{2}C_k\varepsilon^{3/2}K_M^{-2/3}$，所以，可得黏性破坏项具有形式：$-C_{\varepsilon_2}\frac{\varepsilon^2}{k}$，即 C_{ε_2} 的值与湍流普朗特数是无关的。

由(4)~(5)，(15)~(19)可得

$$\frac{D\varepsilon}{Dt}=C_{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon}{k}P-C_{\varepsilon_2}\frac{\varepsilon^2}{k}+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(C_{\varepsilon\varepsilon}\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(C_{k\varepsilon}k\frac{\partial k}{\partial x^\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(C_{\varepsilon3}\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^\alpha}\right) \tag{20}$$

其中 $C_{\varepsilon 1} \approx 1.486$，$C_{\varepsilon 2} \approx 1.887$，$C_{\varepsilon 3} \approx 0.672$，$C_{k\varepsilon} \approx -0.781$，$C_{\varepsilon\varepsilon} \approx 1.846$。

4 讨 论

现在我们将所得结果与前人[3, 7]的结果及标准的 K-ε 模式进行比较。在标准的 K-ε 模式中，小涡拉伸项与黏性破坏项被模拟为：$C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k}$，在（20）式中多出一项交叉扩散项，即 $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(C_{\varepsilon\varepsilon} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(C_{k\varepsilon} k \frac{\partial k}{\partial x^\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(C_{\varepsilon 3} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^\alpha}\right)$，这与文献[3]的结果是一致的，虽然在（20）式中比文献[3]的结果少了两项（这是因为在本文的计算中只引入了单影响函数以及对惯性子区的修正）。文献[3]中利用可解性条件建立了耗散率方程与湍能方程之间的关系，因而可以借助于对 k 的模拟得到耗散率方程的模拟。本文利用单影响函数的 TSDIA 同时利用在惯性子区内湍能扩散项与湍能耗散率相等的物理事实，对耗散率方程进行了模拟。其中对黏性破坏项的模拟结果与文献[7]中的结果一致，即 C_{ε_2} 的值与湍流普朗特数是无关的。

最后需要指出的是（20）式中交叉扩散项的作用。事实上它的重要性与物理意义还不是很清楚，同时本文所得的结果并非优于标准的 K-ε 模式，本文的工作只是尝试着为湍流耗散率方程的模拟提供一定的理论基础。

参 考 文 献

1 Yoshizawa A. Statistical analysis of the deviation of Reynolds stress from its eddy viscosity representation. *Phys Fluids*, 1984, 27: 1337

2 Kraichnan RH. The closure problem of turbulence theory. Institute of Mathematical Sciences. Report HSN-3, New York University, 1961

3 Yoshizawa A. Statistical modeling of a passive-scalar diffusion in turbulent shear flows. *J Fluid mech.*, 1988, 195: 541

4 Hamba et al. Towards modeling inhomogeneous compressible turbulence using a two-scale statistical theory. *Physics of Fluids*, 1997, 9(9): 2749

5 Shimomura Y. A theoretical study of the turbulent diffusion in incompressible shear flows and in passive scalars. *Phys Fluids*, 1998 10(10): 2636

6 Yoshizawa A. Statistical theory for the diffusion of a passive scalar in turbulence shear flows. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1984, 53(4): 1264

7 Rubinstein R, Zhou Y. Analytical theory of the destruction terms in dissipation rate transport equations. *Phys Fluids*, 1996, 8(11): 3172

圆柱绕流的三维数值模拟

王亚玲　刘应中　缪国平
(上海交通大学 船舶和海洋工程学院，上海 200030)

摘要　利用计算流体力学软件 CFX-4，对黏性不可压缩流体的圆柱绕流进行了三维数值模拟，采用有限体积法和 SIMPLE 计算程式，利用不可压缩 Navier-Stokes 方程，模拟雷诺数在亚临界区内的绕流流动，计算流体的水动力特性。为克服数值模拟高雷诺数时的数值不稳定性，计算中采用了 QUICK 迎风格式，其对流项为三阶精度，其余项如扩散项等为二阶精度，圆柱两端边界采用周期性边界条件。计算结果发现高雷诺数时圆柱周围的流动具有明显的三维特性，而且沿柱长方向不同断面的升力和阻力系数并不相同。为与三维数值结果进行比较，还对圆柱绕流进行了二维数值模拟，结果表明三维模拟的升力和阻力系数均小于二维模拟。

关键词　圆柱绕流，雷诺数，三维数值模拟，水动力特性

引　言

对均匀来流绕固定圆柱的二维平面流动，国内外许多学者进行过大量的研究。决定圆柱绕流流态的是雷诺数 Re 的值，当 Re 数很小时，$Re<5$，流动不发生分离。$5<Re<40$，在圆柱体后面出现一对位置固定的旋涡。随着 Re 数增大，$40<Re<150$，旋涡也扩大，然后有一个旋涡开始脱落，接着另一个也脱落，在圆柱体后面又生成新的旋涡，这样逐渐发展成两排周期性摆动的、交错的旋涡，这就是著名的 Karman 涡街，Re 数在 150 以下涡街是层流的，$150<Re<300$，旋涡由层流向湍流转变。$300<Re<3\times10^5$，称为亚临界区，此时柱体表面上的边界层为层流，而柱体后面的涡街已完全转变为湍流，并按一定的频率发放旋涡。$3\times10^5<Re<3\times10^6$，称为过渡区，此时柱体表面上的边界层也已转变为湍流，分离点向后移，阻力显著下降，旋涡的发放不规则，发放频率是宽频带随机的。$Re>3\times10^6$，称为超临界区，此时重新建立起比较规则的准周期性发放的涡街。这些基于圆柱无限长假定的二维平面流场的研究结论，在许多流体力学专著中都有论述[1~5]，但对圆柱绕流的三维数值研究则不多，试验表明，即使均匀来流垂直流过等截面的圆柱体，当 Re 数足够大时，也会呈现三维的流动状态，Korpus 等[6]利用雷诺平均 Navier-Stokes(RANS)方程以及 k-ε 湍流模型分别对固定和运动圆柱进行三维数值模拟，也得到同样的结论。本文利用 N-S 方程，未采用任何湍流模式，对固定圆柱绕流进行了三维数值模拟，利用计算流体力学软件 CFX-4，在亚临界区范围内选取雷诺数为 10^3 和 10^4，模拟了圆柱周围的流场，计算圆柱的升力和阻力系数，并与二维模拟结果进行了比较。

1　数学模型与数值方法

对不可压缩黏性流体，在直角坐标系下，其运动规律可用 Navier-Stokes 方程来描述，连续性方程和动量方程分别为

$$\partial u_j / \partial x_j = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(u_j u_i)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \tag{2}$$

其中，i，j=1，2，3，ρ为流体的密度，ν为流体的运动黏性系数。

圆柱周围的流场利用 CFX-4 计算流体力学软件求得，计算采用有限体积法，为解决动量方程中速度分量和压力耦合问题，采用 SIMPLE 算法。数值计算中，由于交错网格受到限制，一方面是有限体积法中各变量占用不同的控制体，每个控制体可能会有不同的几何形状，使问题复杂化；另一方面，网格信息的存储量特别大，因此，计算中采用非交错网格，并将压力和速度定义在网格的中心上，这样能显著减少对结点变量的存储。流场的数值计算采用贴体网格，它把具有复杂边界的物理区域变换到规则的计算区域，从而在数值计算中能够比较准确地满足边界条件，提高解的精度。数值求解 N-S 方程时，为克服数值模拟在高雷诺数时的数值不稳定性，计算中采用了 QUICK 迎风格式（Leonard 1981[7]，Feritas et al. 1985）其对流项为三阶精度，其余项如扩散项等为二阶精度。

2 数值计算与结果讨论

沿 X 方向的均匀流绕一固定圆柱体流动，U 为均匀来流的流速，D 为圆柱体的直径，H 为柱长方向的计算域长度，取 H=5D。在垂直柱长方向的平面内，选取计算区域的范围为 4D×12D，在构造网格时，将计算区域分解成多块子区域，分别采用 O 型网格和 H 型网格，本文计算采用的平面网格数为 16 000，网格示意图见图 1。沿柱长方向（Z 方向）的网格均匀分布，为节约机时，本文选取 Z 向网格间距为 0.2H，共计 5 个网格。本文的数值计算是在 digital UNIX 系统下进行的，在工作站计算一个算例所需时间约 14h。求解区域的进口边界以 Dirichlet 边界条件给出，出口边界选在距离圆柱中心 10D 处，以 Neuman 边界条件给出，各物理量沿出口法线梯度为零。圆柱两端边界采用周期性边界条件。本文在亚临界区范围内选取雷诺数，分别为 10^3 和 10^4。数值计算中雷诺数为 10^3 时，时间步长取为 0.01s，雷诺数为 10^4 时，时间步长取为 0.1s。

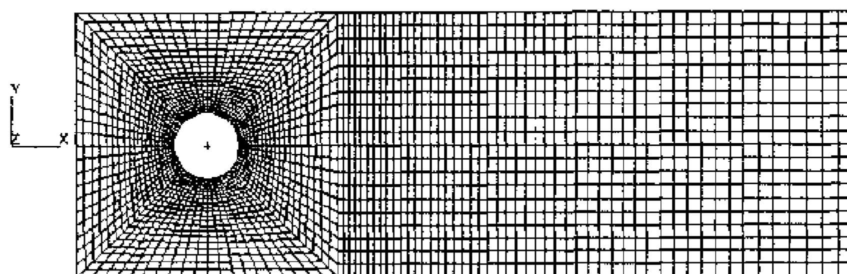


图 1　计算平面网格示意图

图 2 为 $Re=10^3$ 时半个周期内不同时刻的流线平面图，其中质点均匀分布于 $Z=H/2$ 断面。图中选取了三个具有代表性的时刻，其中 T 为涡脱落的周期。图中清晰地表现了流场运动的周期特性。$Re=10^4$ 时质点跟踪迹线随时间变化的周期特性与 $Re=10^3$ 相似，故文中未给出图形。

图 3 为一个周期内不同时刻，均匀分布于 $Z=H/2$ 平面的质点 Z 向速度云图，从图中可看出，位于同一平面的质点，其 Z 向速度的分布随时间变化，虽然 Z 向速度值量级较小，但

其分布具有一定的规律性，且随着雷诺数的增大，Z 向速度也随之增大，见图 3(a)，3(b)，图中给出半个周期内的图形。

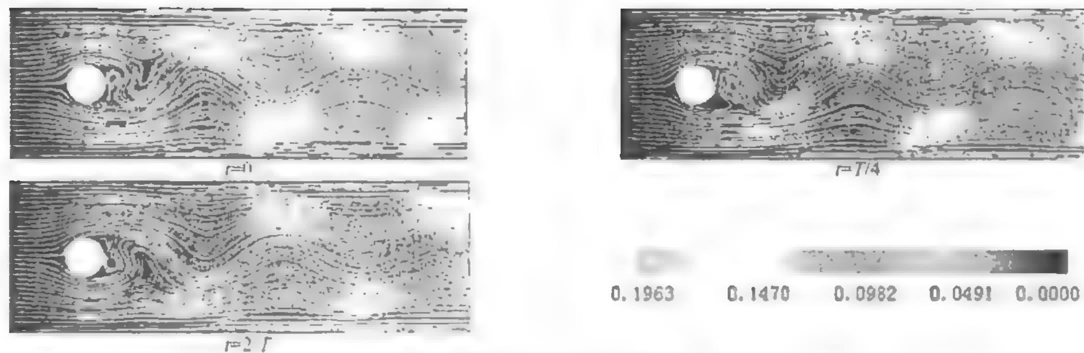
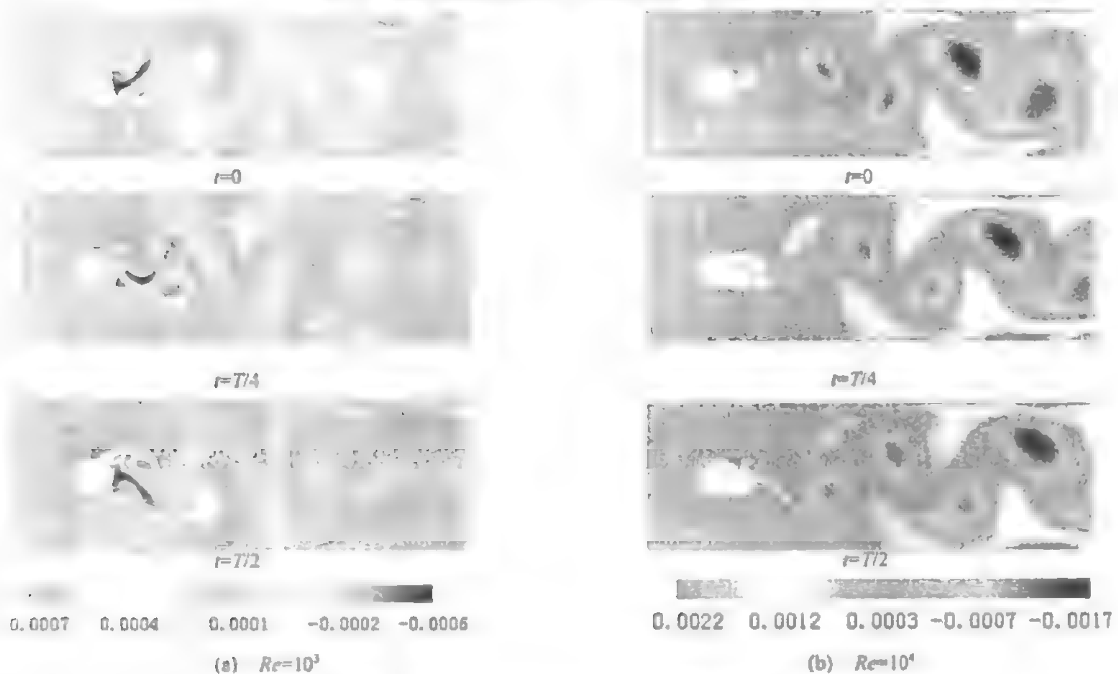


图 2 流线平面图(质点位于 Z=H/2 断面，$Re=10^3$)



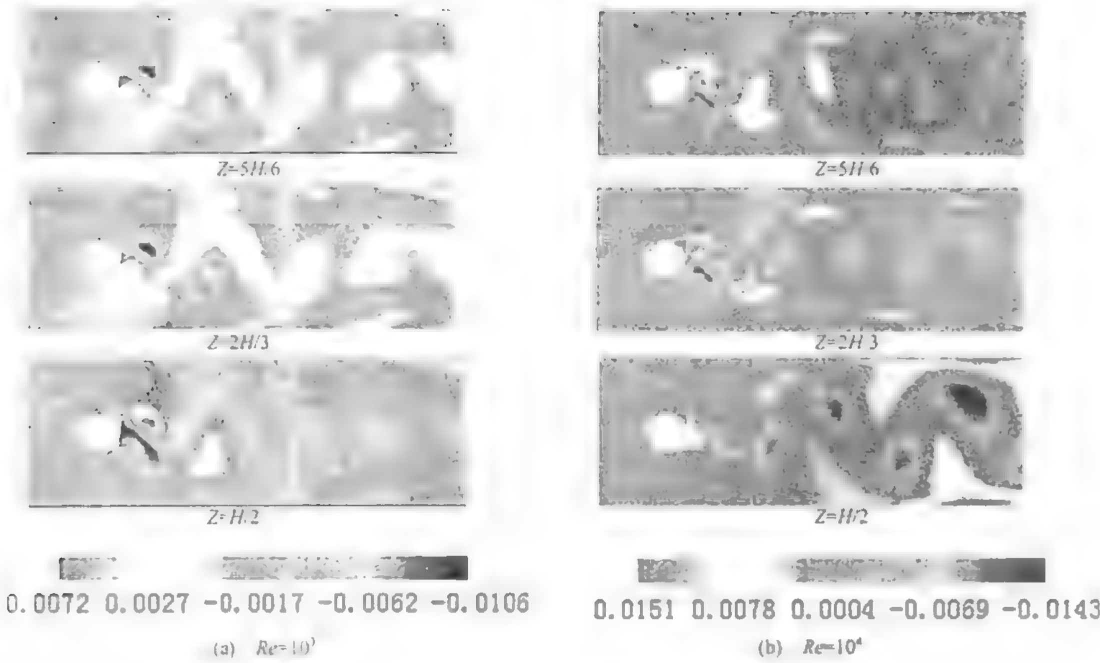
(a) $Re=10^3$ (b) $Re=10^4$

图 3 位于 Z=H/2 断面的质点 Z 向速度云图

图 4 为 $t=T/2$ 时刻沿柱长方向三个断面的质点 Z 向速度云图，由图可见，在同一时刻，位于不同断面处的质点，其 Z 向速度的分布也有差异，且中间对称面处 Z 向速度不为零。

图 5 为 $Re=10^3$ 和 $Re=10^4$ 时圆柱升力系数 C_L 和阻力系数 C_D 随时间的变化曲线图。在本文中，沿柱长平均的升力和阻力系数分别定义为 $C_L=2F_L/\rho U^2 DH$，$C_D=2F_D/\rho U^2 DH$，式中 F_L，F_D 分别为作用于圆柱上总的升力和阻力，沿柱长方向各断面的升力和阻力系数分别定义为 $C_L=2F_L/\rho U^2 D$，$C_D=2F_D/\rho U^2 D$，式中 F_L，F_D 分别为作用于圆柱断面单位宽度周线上的升力和阻力。为了与三维数值结果比较，本文对圆柱绕流进行了二维数值模拟。图 5(a)为两种数值模拟的升力系数和阻力系数曲线，图 5(b)为沿柱长平均的升力系数与各断面的升力系数曲线，图 5(c)为沿柱长平均的阻力系数与各断面的阻力系数曲线，给出 1/2 柱长三个断面的图形。从图中可以看出，雷诺数在亚临界区范围内，圆柱升力系数和阻力系数

出现周期性的单一频率的振动，雷诺数较小时，圆柱绕流的三维特性较弱，三维数值模拟出的升力和阻力系数曲线与二维模拟基本相同，沿柱长平均的升力系数与各断面的升力系数曲线非常接近，沿柱长平均的阻力系数与各断面的阻力系数曲线振动频率基本相同，但振动幅值有变化，且沿柱长方向各断面的阻力系数具有对称性；随着雷诺数的增大，圆柱绕流出现明显的三维特性。图 5(a)显示三维模拟的升力和阻力系数均小于二维模拟，沿柱长平均的升力、阻力系数与各断面的升力、阻力系数曲线振动的频率和幅值均有变化。图 5(b)，5(c)显示圆柱各断面上的升力和阻力系数是连续变化的，并不存在“相干长度”，随着雷诺数的增大，圆柱周围流场不仅出现三维效应，而且沿柱长方向水动力特性的分布规律也发生明显变化：雷诺数较小时，圆柱升力系数和阻力系数幅值在中间断面处最大，向两端逐渐减小，且各断面的振幅比较稳定；雷诺数较大时，圆柱升力系数和阻力系数幅值在两端和中间断面处较大，



(a) $Re=10^3$ (b) $Re=10^4$

图 4 $t=T/2$ 时刻柱长方向各断面质点 Z 向速度云图

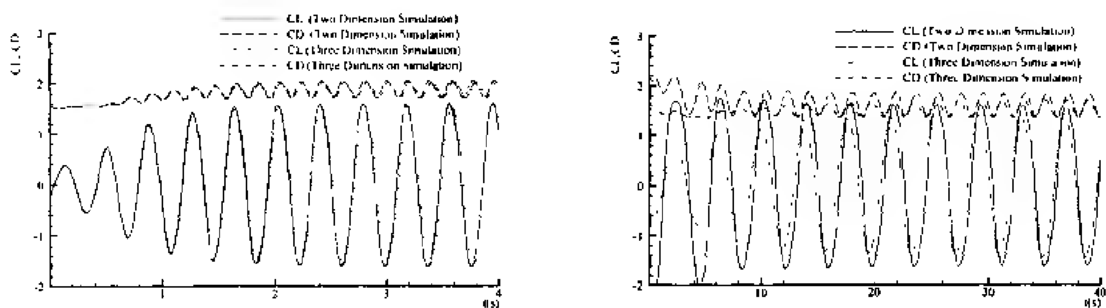
其区间内幅值减小，而且，在计算时间域内，两端断面处的幅值大于中间断面，但中间断面处的幅值没有达到稳定，仍在继续增大。

3 结 语

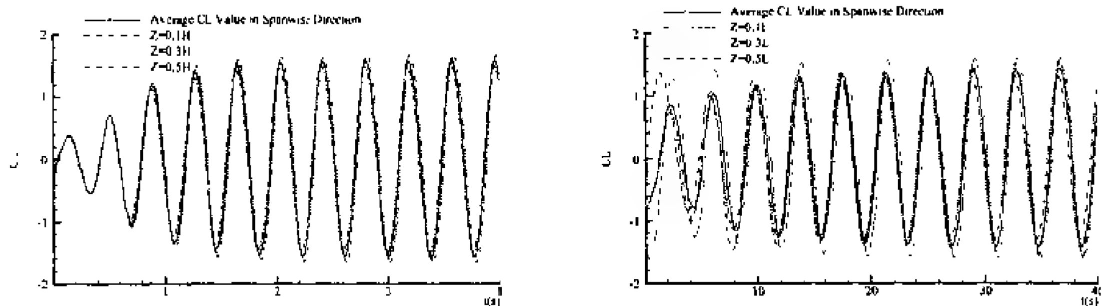
(1) 雷诺数在亚临界区范围内，圆柱升力系数和阻力系数出现周期性的单一频率的振动，雷诺数较小时，圆柱绕流的三维特性较弱，随着雷诺数的增大，圆柱绕流出现明显的三维特性，三维模拟的升力和阻力系数均小于二维模拟，沿柱长平均的升力、阻力系数以及各断面的升力、阻力系数曲线振动的频率和幅值均有变化。

(2) 利用计算流体力学软件 CFX-4 可以成功地模拟圆柱绕流问题，反映出流动的三维特性。

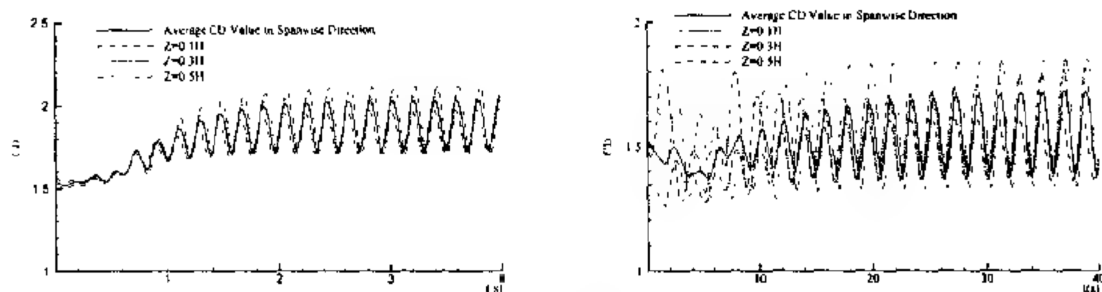
(3) 进一步的研究可以在以下方面展开：加大柱长方向的网格数，进一步提高计算的精



(a) 二维与三维数值模拟的升力与阻力系数曲线图



(b) 沿柱长平均的升力系数与各断面的升力系数曲线



(c) 沿柱长平均的阻力系数与各断面的阻力系数曲线

图 5 圆柱升力和阻力系数比较（左图 $Re=10^3$，右图 $Re=10^4$）

度；舍弃圆柱两端的周期性边界条件，或扩大柱长方向的计算域长度；利用 RANS 方程以及湍流模式；考虑圆柱运动情况及“锁定”（lock-in）现象。

参 考 文 献

1 易家训. 流体力学. 北京：高等教育出版社，1982

2 刘应中，缪国平. 高等流体力学. 上海：上海交通大学出版社，2000

3 黄祥鹿，陆鑫森. 海洋工程流体力学及结构动力响应. 上海：上海交通大学出版社，1992

4 Massey BS (Bernard Stanford) Mechanics of Fluid. T J Press Ltd，Padstoe，Cornwall，1989

5 Jan F Kreider. Principles of Fluid Mechanics，USA Allyn and Bacon Inc，1985

6 Richard Korpus，Paul Jones，Owen Oakley. Prediction of viscous forces on oscillation cylinders by Reynolds-averaged Navier-Stokes Solver. In: Proceedings of The Tenth International Offshore And Polar Engineering Conference.Seattle: ISOPE Press，2000(III): 471~477

7 BP Leonard. A survey of finite differences with upwinding for numerical modeling of the compressible convective diffusion equation. *Computational Techniques in Transient and Turbulent Flow*，1981. 1~35

非线性全局及局部最优扰动和第一类可预报性

穆　穆　王家城
（LASG，中国科学院大气物理研究所，北京 100029）

摘要　提出了非线性奇异值和非线性奇异向量的概念，这是对线性奇异值和线性奇异向量概念的自然推广。从理论上研究了它们的性质，推导出了确定非线性奇异值和非线性奇异向量的优化问题，研究了它们在第一类可预报性研究中的作用。对于二维正压准地转模式，用数值方法求得了它的非线性最优扰动。结果表明，存在局部的非线性最优扰动，并揭示了其在可预报性研究中的重要作用。

关键词　可预报性，非线性，最优扰动

1　非线性最优扰动

在大气和海洋科学的研究中，奇异值和奇异向量方法被广泛地应用[1]。通常，人们假定初始扰动很小，可以用切线性模式(TLM)描述初始扰动的发展。这时，描述初始扰动发展的传播算子可以表示为一个矩阵，线性最优扰动是其最大奇异值对应的奇异向量。线性奇异值(LSVA)和线性奇异向量(LSV)被广泛地应用于理论研究与数值天气预报。但是，大气和海洋运动是非线性的，控制它们的发展方程是非线性方程。因此，TLM 的有效性就值得研究，也就是说，我们必须考察，在什么条件下能够用 TLM 得到比较精确的初始扰动的发展。已经有一些关于 TLM 的有效性问题研究的文献[2~4]，但是还没有一个比较明确的答案。

在文献[5]中，作者之一引入了非线性奇异值(NSVA)和非线性奇异向量(NVS)的概念。非线性奇异值就是非线性模式的最优扰动对应的最大增长率。直接用非线性模式来求初始扰动的发展，进而求它的非线性最优扰动，这样得到的非线性奇异值和非线性奇异向量是线性奇异值和线性奇异向量的自然推广。

大气和海洋运动大都可以归结为如下形式的非线性的发展方程

$$\frac{\partial w}{\partial t}+F(w)=0 \qquad \text{在 } \Omega\times[0,T] \text{ 中} \tag{1.1}$$
$$w|_{t=0}=w_0$$

其中 $w(x,t)$ 代表气压、温度或者速度等未知函数，F 是非线性算子，w_0 是初值。$(x,t)\in\Omega\times[0,T]$，$T<\infty$，$x=(x_1,x_2,...,x_n)$ 是空间变量，t 是时间变量。

我们假定问题(1.1)的解是存在唯一的，则对任意的初始值 w_0，存在唯一连续依赖于 w_0 的解 $w(x,t)$。对于固定的时间段 $T>0$，设 $M(w_0)=w(x,y,T)$ 是唯一确定的，则 M 是(1.1)的传播算子 (propergator)。

假设 $U(x,t)$ 和 $U(x,t)+u(x,t)$ 分别是(1.1)对应于初值 U_0 和 U_0+u_0 的解

$$U(T)=M(U_0)\text{，}\quad U(T)+u(T)=M(U_0+u_0) \tag{1.2}$$

定义内积及相应的内积范数

$$(u,v)=\int_{\Omega}uv\mathrm{d}x,\quad \|u\|=(u,u)^{1/2} \tag{1.3}$$

对于一些物理问题，需要用不同的范数来度量扰动场，因此我们引入线性算子 A 并假定

$$\|Au(T)\|\le c\|Au_0\| \tag{1.4}$$

对任意的初始扰动 u_0 成立，这里 c 是独立于 u_0 的常数。

我们称初始扰动 u_{10}^* 为对应于基流 U_0 的非线性最优扰动（或非线性奇异向量），当且仅当

$$I(u_{10}^*)=\max_{u_0} I(u_0) \tag{1.5}$$

这里

$$I(u_0)=\frac{\|Au(T)\|^2}{\|Au_0\|^2} \tag{1.6}$$

而其最大值的正平方根则称之为非线性奇异值，它表明了初始扰动 u_{10}^* 在时间 T 后按范数 $\|A(\cdot)\|$ 的增长率。

显然，u_{10}^* 是泛函 $J(u_0)$ 的极小值点，即

$$J(u_{10}^*)=\min_{u_0} J(u_0) \tag{1.7}$$

这里

$$J(u_0)=\frac{\|Au_0\|^2}{\|Au(T)\|^2} \tag{1.8}$$

这样，确定非线性奇异向量 u_{10}^* 可归结为求解如下的优化问题。由 $u(T)=M(U_0+u_0)-U(T)$，可得

$$J(u_0)=\frac{\|Au_0\|^2}{\|A[M(U_0+u_0)-U(T)]\|^2} \tag{1.9}$$

$J(u_0)$ 的一阶变分为

$$\begin{aligned}\delta J(u_0)=2[(Au_0,A\delta u_0)\|Au(T)\|^2-(A(M(U_0+u_0)-U(T)),\\ AM(U_0+u_0)\cdot\delta u_0)\|Au_0\|^2]/\|Au(T)\|^4\end{aligned} \tag{1.10}$$

记 A^* 和 M^* 分别是 A 和 M 的伴随算子，则有

$$\begin{aligned}\delta J(u_0)=(2[A^*Au_0\|Au(T)\|^2-M^*(U_0+u_0)A^*A(M(U_0+u_0)-\\ U(T))\|Au_0\|^2],\delta u_0)/\|Au(T)\|^4\end{aligned} \tag{1.11}$$

使得泛函 $J(u_0)$ 取得极小值的必要条件是它的一阶变分为零，即是

$$A^*Au_0\|Au(T)\|^2=M^*(U_0+u_0)A^*A(M(U_0+u_0)-U(T))\|Au_0\|^2 \tag{1.12}$$

2 数值试验

我们考察二维正压准地转模式，用数值方法寻求它的非线性最优扰动。结果表明，对于非线性模式，存在局部的非线性最优扰动。本文还研究了它与线性奇异向量的区别和联系，揭示了其在可预报性研究中的重要作用。无量纲的二维正压准地转方程是

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial P}{\partial t} + \partial(\Phi, P) = F \\
&P = \nabla^2 \Phi - F\Phi + f_0 + \beta y, \qquad \Omega \times (0,T) \qquad\qquad (\text{NM}) \qquad\qquad (2.1) \\
&\Phi|_{t=0} = \Phi_0
\end{aligned}
$$

其中 P 是位涡，Φ 是流函数，Jacobi 算子 $\partial(\Phi,P)=\Phi_x P_y - \Phi_y P_x$。

设 Ψ_0 是 Φ 的初始值，ψ_0 是初始扰动，M 是方程(1.1)的传播算子，则方程(1.1)对应初始值 Ψ_0 和 $\Psi_0+\psi_0$ 的解是

$$\Psi_T = M(\Psi_0), \quad \Phi_T = M(\Psi_0+\psi_0) \tag{2.2}$$

引入能量范数

$$\|\phi\|^2 = \int_\Omega (|\nabla\phi|^2 + F|\phi|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.3}$$

其中 ϕ 是流函数。则非线性最优扰动 ψ_0^*，是使得泛函

$$J(\psi_0) = \frac{\|\Phi_T - \Psi_T\|^2}{\|\psi_0\|} = \frac{\|M(\Psi_0+\psi_0) - M(\Psi_0)\|^2}{\|\psi_0\|^2} \tag{2.4}$$

取得最大值的初始扰动，而非线性奇异值则是

$$\lambda = (J(\psi_0^*))^{1/2} \tag{2.5}$$

用数值方法寻求非线性最优扰动，主要分两个步骤：传播算子 M 的离散和泛函 $J(\psi_0)$ 的优化。在我们的数值试验中，Jacobi 算子用 Arakawa 差分格式[6]离散，Laplace 算子用五点差分格式离散，而优化方法则为 LBFGS 方法[7]。

空间区域为 $\Omega=[0,6.4]\times[0,3.2]$，对应于实际区域[0，6400km]×[0，3200km]，参数选取为 $F=0.1$，$f_0=10$，$1/H=1.0$，空间离散步长为 $d=0.2$，对应于实际长度 $d=200$ km，时间离散步长为 $d=0.006$，对应于实际时间 10 min。

2.1 数值试验 1

数值试验的第一个基本流是 $\Psi_0 = a\times 0.1\times\sin(2\pi x/6.4) + b\times\sin(2\pi y/3.2)+c$，其中 $a=1.185\,2$，$b=0.325\,9$，$c=-45.301\,9$。这是一个稳定的基流，其总能量是 $\|\Psi_0\|=65.522\,6$。地形 $h_s = 0.1\times\sin(2\pi x/6.4)+1.0\times\sin(2\pi y/3.2)$。固定时间积分步数 $T=720$，1 008，1 440 (对应于实际天气的 5d，7d，10d)，得到的结果如表 2.1 所示。

表 2.1

	5d	7d	10d
λ^1	4.376 0	6.514 4	10.000 2
$\|\psi_0^1\|$	1.427 7E-4	0.521 8E-1	3.881 2E-2
$\|\psi_0^1\|/\|\Psi\|$	2.179 0E-6	7.963 7E-4	5.923 5E-4
$\|\psi_N^1(T)\|$	6.247 8E-4	3.399 2E-1	3.881 2E-1
$\|\psi_L^1(T)\|$	7.207 4E-4	3.157 4E-1	3.263 0E-1
$\|\psi_L^1\|/\|\psi_0^1\|$	4.347 7	6.242 6	8.406 9
λ_L	4.349 4	6.380 8	9.361 1

在表 2.1 中，$\|\psi_0^1\|$ 是非线性最优扰动的能量范数，$\|\psi_N^1(T)\|$ 是其非线性发展的能量范数，$\|\psi_L^1(T)\|$ 是其线性发展的能量范数。λ_L 是 LSVA，它是在(1.4)中，将解算子 M 用其 TLM

算子 M 替代，计算其最大值得到的。λ^1 和 λ_L 分别代表初始扰动的非线性和线性最大增长率，它是可预报性的一个重要度量。

从表 2.1 我们可以看出，对于非线性最优扰动，其能量范数非常小，使得它和线性奇异向量没有明显的差别，这是因为对于小的初始扰动，可以用 TLM 近似地描述其发展变化。

2.2 数值试验 2

这时基流 $\Psi_0 = 1.0 \times (\sin(2\pi y/3.2) + 0.25)$，它仍然是一个稳定的基流，地形为 $h_y = 1.0 \times \sin(2\pi y/3.2)$，而 $1/H$=0.35，其余的参数和第一个试验相同。基流的能量范数为 $\|\Psi_0\|$=6.336 3。

对于积分步数 T=720（相应于 5d），我们发现对于泛函 $J(\psi_0)$，有一个全局极大值和两个局部极大值，见表 2.2。

表 2.2　T =5d 的三个全局和局部极大值

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
λ^1_i	9.117 1	6.234 4	5.533 9
$\|\psi^1_{0i}\|$	2.092 74E-4	8.949 6E-1	1.391 0
$\|\psi^1_{0i}\|/\|\Psi\|$	3.199 8E-5	0.141 2	0.219 5
$\|\psi^1_{Ni}(T)\|$	1.848 5E-3	5.579 6	7.697 1
$\|\psi^1_{Li}(T)\|$	1.848 5E-3	1.339 1	3.289 5
$\|\psi^1_{Li}\|/\|\psi^1_{0i}\|$	9.117 1	1.496 3	2.365 0
λ_L	9.117 1	——	——

对于积分步数 T=1 008（相应于 7d），我们发现对于泛函 $J(\psi_0)$，有一个全局极大值和四个局部极大值，见表 2.3。

表 2.3　T =7d 的五个全局和局部极大值

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
λ^1_i	10.061 8	7.552 3	7.332 7	5.323 2	5.148 4
$\|\psi^1_{0i}\|$	5.105 8E-5	6.401 1E-1	5.169 5E-1	2.138 7	2.372 3
$\|\psi^1_{0i}\|/\|\Psi\|$	8.057 9E-6	1.010 2E-1	8.158 5E-2	0.337 5	0.374 4
$\|\psi^1_{Ni}(T)\|$	5.137 3E-4	4.834 3	3.790 7	11.384 9	12.213 9
$\|\psi^1_{Li}(T)\|$	5.137 3E-4	1.078 6	1.897 1	3.090 0	2.858 8
$\|\psi^1_{Li}\|/\|\psi^1_{0i}\|$	10.061 8	1.685 0	3.670 0	1.444 8	1.205 0
λ_L	10.061 8	——	——	——	——

对于 5d 和 7d 两种情形，我们都发现了局部的非线性最优扰动，它的增长率比全局最优扰动要小，但是，由于它本身的能量范数比全局最优扰动要大得多，因此它的非线性发展要比全局最优扰动的非线性发展大，这可以从表 2.2，2.3 中的 $\|\psi^1_{Ni}(T)\|$ 项看出来。另一方面，全局最优扰动非常小，它和线性最优扰动没有明显的差别，把它乘以一个常数后仍然是线性最优扰动。可以将它乘以一个适当的常数，使得它的线性发展和局部最优扰动的非线性发展相等。但是，我们的研究表明，这时，TLM 失效，也就是说，我们不能用 TLM 来描述它的发展变化。因此，局部的非线性最优扰动，在可预报性研究中的作用比全局最优扰动更大。

3 结 论

本文提出了非线性奇异向量和非线性奇异值的概念，进行了理论分析与数值试验，初步结果表明，对于某些基流，只存在一个非线性最优扰动，它的能量范数很小，因而它和线性奇异向量没有明显的差别。对另外一些基流，存在局部的非线性最优扰动，而局部的非线性最优扰动能量范数较大，在可预报性研究中比全局最优扰动起更大的作用。

参 考 文 献

1 Lorenz EN. A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model. *Tellus*，1965，XVII 3：321~333

2 Lacarra JF and Talagrand O. Short-range evolution of small perturbation in a baratropic model. *Tellus*，1988，40A：81~95

3 Tanguay M，Bartello P and Gauthier P. Four-dimensional data assimilation with a wide range of scales. *Tellus*，1995，47A：974~997

4 Mu Mu，Guo Huan，Wang Jiafeng and Yong Li. The validity of tangent linear model with nonlinear stable and unstable basic flow. *Adv Atmos Sci*，2000，17：375

5 Mu Mu，Nonlinear singular vectors and nonlinear singular value. *Science in China (D)*，2000，43：375~385

6 廖洞贤，王两铭. 数值大气预报原理及其应用. 北京：气象出版社，1986

7 Dong C Liu and Jorge Nocedal. On the Limited Memory BFGS Method for Large Scale Optimization. *Mathematical Programming*，1989，45：503~528

射流表面形状的周向变化对界面不稳定性的影响

胡明海　周哲玮

（上海大学，上海市应用数学和力学研究所，上海 200072）

摘要　为了着重体现周向变化对金属射流的影响，采用无黏、不可压的单流体模型，利用简正模态法 (Normal-Mode)导出频率与波数的特征方程。进而分析了各参数的变化对稳定性的影响。

关键词　射流，不稳定性，喷射雾化

引　言

喷射雾化是指液体在气体的冲击作用下破碎成为液滴的过程。它作为一个基本概念被广泛应用于许多领域，其中包括粉末冶金、内燃机、陶瓷材料制备等。R.A.Castleman[1]认为，喷射雾化的机理是由于液体和气体相互作用引起液体表面不稳定波的增长而导致射流的破碎，D.Bradley[2]在这方面的研究取得了突破性的进展。之后 R.D.Reitz 和 F.V.Bracco[3]，S.P.Lin 和 D.J.Kang[4]，Z.W.Lian，Z.W.Zhou 等人[5]一直利用稳定性理论来研究射流破碎的问题，这些研究在判断喷射雾化产生方面取得了一定的成功。A.Lawley，J.B.See 和 G.H.Johnston，H.Lubanska，N.J.Grant，A.Unal 等人从实验和实际工艺角度对喷射雾化进行了研究。发现了喷射雾化的三个阶段：(1) 射流初始破碎；(2) 液滴二次破碎；(3) 液滴的固化。根据稳定性理论，不稳定波增长到一定程度后波破碎，这只是喷射雾化的第一阶段，之后，液滴已经与气体完全混合，因此以后的过程已不再适合用液体射流表面波的发展来进行描述。有关喷射雾化的详细综述可见[6~8]。

国内在喷射成形方面的研究起步较晚，理论基础和实验条件都还不够完善，目前宝钢已将该技术的研究作为基础性及前沿研究项目，上海钢研所和北京科技大学在从事这方面的理论和实验研究。但国内研究仍处于小规模的实验阶段，其设计及控制的理论基础不甚了解，急需理论模型方面的研究来指导。

由实验观测到，在喷射雾化的初始破碎阶段，射流表面在气流挤压作用下呈梅花状。在以往的研究中都未考虑这一因素，而是把射流看作圆柱形，本文着重研究这种梅花状分布对金属射流的影响。由于理论模型与喷射成形工艺存在一定差距，为此，本文建立了无黏、不可压的单流体模型，将外部气体的作用看作一种外载。

1　理论模型和公式推导

1.1 单流体模型

本文通过以下简化对喷射雾化的初始破碎阶段建立数学模型：

(1) 忽略重力作用；

(2) 金属射流为无黏不可压流体；

(3) 外部气流作用由按某种规律分布的压力场代替。

其控制方程包括运动方程和连续性方程

$$\frac{\partial V}{\partial t}+(V\cdot\nabla)V=-\frac{1}{\rho}\nabla P$$
$$\nabla\cdot V=0 \tag{1}$$

相应的边界条件为：

运动学边界条件

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=u-\frac{v}{r}\frac{\partial\eta}{\partial\theta}-w\frac{\partial\eta}{\partial z},\quad r=\eta \tag{2}$$

动力学边界条件

$$P-P_W=\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right),\quad r=\eta \tag{3}$$

其中$V=(u,v,w)$是速度矢量，P是压力，P_w是外界压力场，ρ是密度，t是时间，σ是表面张力系数，η是界面的径向坐标，R_1,R_2是界面上的主曲率半径。

1.2 公式推导

我们考虑满足方程(1)~(4)的一个定常解，作为稳定性研究的基态

$$\overline{V}=(0,0,W_0)$$
$$\overline{P}=P_0$$
$$P_W=P_0-\frac{\sigma}{R(\theta)} \tag{4}$$
$$\overline{\eta}=a+A\sin n\theta$$

式中W_0是恒定的射流速度，P_0是常压，a是圆柱射流的半径，A是表面梅花状突起的振幅，n是周期数，这里假设沿周向周期性变化。在基本态上加一扰动，即令

$$V=\overline{V}+V',\qquad P=\overline{P}+P',\qquad \eta=\overline{\eta}+\eta' \tag{5}$$

这里假设P_w为定常量，即不考虑外部气压随时间变化。将(4)，(5)代入方程(1)~(3)并经线性化后得到扰动量方程

$$\frac{\partial V'}{\partial t}+W_0\frac{\partial V'}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\nabla P'$$
$$\nabla\cdot V'=0 \tag{6}$$

以及$r=\overline{\eta}$处的边界条件

$$\frac{\partial\eta'}{\partial t}=u'-\frac{v'}{r}nA\cos n\theta-W_0\frac{\partial\eta'}{\partial z},\quad r=\overline{\eta} \tag{7}$$

$$P'=\sigma\left(K'-K-\frac{\partial^2\eta'}{\partial z^2}\right),\qquad r=\overline{\eta} \tag{8}$$

其中

$$K'-K=\frac{1}{(\overline{\eta}^2+\overline{\eta}_\theta^{\,2})^{3/2}}[2\overline{\eta}\eta'+4\overline{\eta}_\theta\eta'_\theta-\overline{\eta}_{\theta\theta}\eta'-\overline{\eta}\eta'_{\theta\theta}-$$
$$\frac{3}{(\overline{\eta}^2+\overline{\eta}_\theta^{\,2})}(\overline{\eta}^2+2\overline{\eta}_\theta^{\,2}-\overline{\eta}\,\overline{\eta}_{\theta\theta})(\overline{\eta}\eta'+\overline{\eta}_\theta\eta')] \tag{9}$$

对以上方程作无量纲化处理

$$t = t\frac{W_0}{a}, \qquad P = \frac{P'}{\rho {W_0}^2}, \qquad V = (u, v, w) = (u', v', w')/W_0,$$
$$(r, z, d) = (r, z, \eta')/a, \qquad W_e = \frac{\sigma}{\rho {W_0}^2 a} \tag{10}$$

且令 $A/a = \varepsilon$，得到无量纲形式的方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} = -\nabla P$$
$$\nabla \cdot V = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial d}{\partial t} - u - \varepsilon\frac{v}{r}n\cos n\theta - \frac{\partial d}{\partial z}, \qquad r = 1 - \varepsilon\sin n\theta \tag{12}$$

$$P = W_e\left[(K' - K) - \frac{\partial^2 d}{\partial z^2}\right], \qquad r = 1 - \varepsilon\sin n\theta \tag{13}$$

假设基本流动刚开始失稳时，流动是无旋的，存在速度势函数 ϕ，且有

$$V = \nabla\phi \tag{14}$$

在此假设下，方程可化为

$$P = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) + E$$
$$\nabla^2\phi = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\varepsilon n\cos n\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial d}{\partial t} + \frac{\partial d}{\partial z}, \quad r - 1 + \varepsilon\sin n\theta \tag{16}$$

$$P = W_e\left[(K' - K) - \frac{\partial^2 d}{\partial z^2}\right], \quad r = 1 + \varepsilon\sin n\theta \tag{17}$$

其中

$$K' - K = -\left(d + \frac{\partial^2 d}{\partial\theta^2}\right) + \varepsilon\left[2\sin n\theta\left(d - n^2 d + \frac{\partial^2 d}{\partial\theta^2}\right) + n\cos n\theta\frac{\partial d}{\partial\theta}\right] \tag{18}$$

2 问题求解与理论分析

2.1 特征方程的导出

在柱坐标中，拉普拉斯方程 $\nabla^2\phi = 0$ 用分离变量法[9]解得

$$\phi = A_0 I_m(kr)\exp[\mathrm{i}(kz + m\theta \quad \omega t)] \tag{19}$$

(15)，(16)，(17)联立消去 d，得

$$\frac{1}{W_e}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right)^2\phi = \left\{\left(1 + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial}{\partial r} - \varepsilon\left[2\sin n\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(1 - n^2 + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{1}{r^2}n\cos n\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r} + 1 + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right] - O(\varepsilon^2)\right\}\phi, \quad r = 1 + \varepsilon\sin n\theta \tag{20}$$

下面考虑 A_0 是关于 t，z，θ 的慢变量，即 $A_0 = A_0(T_1,\theta_1,Z_1)$

$$T_0 = t,\quad \theta_0 = \theta,\quad Z_0 = z,\quad T_1 = \varepsilon t,\quad \theta_1 = \varepsilon\theta,\quad Z_1 = \varepsilon z$$

将(19)代入(20)，并将边界条件从 $r = 1+\varepsilon\sin n\theta$ 变换到 $r = 1$[10]上，得

$$\left[\frac{1}{W_e}(k-\omega)^2 I_m(k) + kI_m'(k)(1-m^2-k^2)\right]A_0 + \varepsilon\left[C_1\frac{\partial A_0}{\partial T_1} + C_2\frac{\partial A_0}{\partial \theta_1} + C_3\frac{\partial A_0}{\partial Z_1} + C_4 A_0\right] = 0,\qquad r=1 \tag{21}$$

其中

$$\begin{aligned}
C_1 &= -2\mathrm{i}(k-\omega)I_m(k)/W_e\\
C_2 &= 2\mathrm{i}mkI_m'(k)\\
C_3 &= 2\mathrm{i}[k^2 I_m'(k) - (k-\omega)I_m(k)/W_e]\\
C_4 &= \sin n\theta\left[\frac{1}{W_e}(k-\omega)^2 kI_m'(k) + k^2 I_m''(k)(1-m^2-k^2) - 2kI_m'(k)(1-n^2-m^2)\right] - \\
&\quad \cos n\theta * \mathrm{i}mn[kI_m'(k) + I_m(k)(1-m^2-k^2)]
\end{aligned} \tag{22}$$

这就是所要求的特征方程。

2.2 方程的求解与分析

考虑空间模式，假设 A_0 只与 Z_1 有关，则由(21)可解得

$$A_0 = B\exp\left(-\frac{C_4}{C_3}Z\right)$$

B 是常数，$Z_1 = \varepsilon z$，$\varepsilon = A/a$。

$$\phi = A_0 I_m(kr)\exp[\mathrm{i}(kz+m\theta-\omega t)] = BI_m(kr)\exp\left\{\mathrm{i}\left[\left(k + i\varepsilon\frac{C_4}{C_3}\right)z + m\theta - \omega t\right]\right\} \tag{23}$$

由(21)，(22)求出扰动的增长率 k_i 随各参数 $(m,n,W_e,\omega,\theta,\varepsilon)$ 的变化。

图 1 表示增长率 k_i 与 m 的关系，$m=0$ 表示轴对称，$m\geq 1$ 表示非轴对称。图 1 说明非轴对称的增长率远小于轴对称的，即非轴对称是稳定的，这与前人的结论是相同的。因此以后的计算中只考虑轴对称情况。

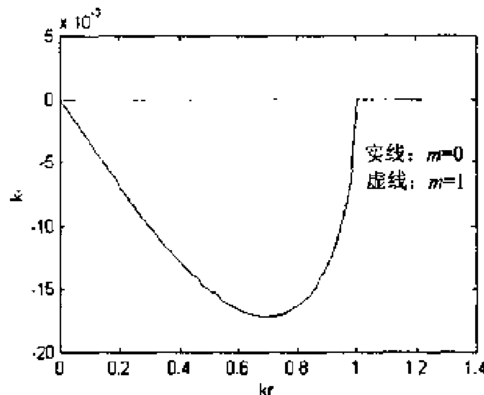


图 1　增长率 k_i 与 m 的关系

图 2 表示增长率 k_i 与 θ 的关系，从计算中可得出，在每一个周期内，最大增长率位于梅花状突起的最高点，且增长率在其两侧呈对称分布。这也可以从 k_i 的表达式中看出，因为 C_4 包括两部分，而含 $\cos n\theta$ 的部分当 $m=0$ 时也为 0；含 $\sin n\theta$ 的部分显然有周期性，当 $\theta=\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}$ 有最大值。

图3 表示增长率 k_i 与 n 的关系，增长率 k_i 随 n 的增大而增大，同样可算出随 W_e 和 ε 的增大，增长率 k_i 也增大。n 表示喷嘴周围的气孔数，增长率 k_i 随 n 的增大而增大说明气孔数增多能促进扰动增长。W_e 数与速度的平方成反比，因此降低液体射流的速度能促进扰动增长。$\varepsilon=A/a$，刚开始表面梅花状突起的振幅 A 很小，随着振幅越来越大，扰动增长越快。

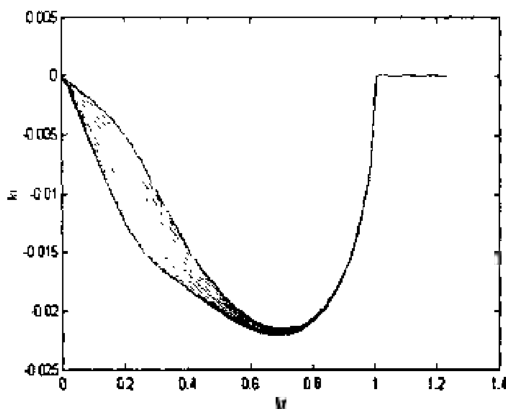


图 2 增长率 k_i 与 θ 的关系

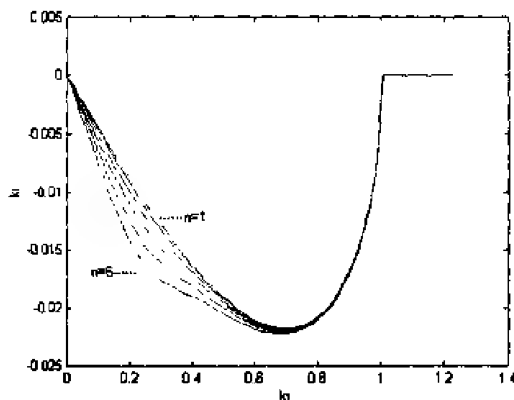


图 3 增长率 k_i 与 n 的关系

3 结 论

本文主要研究表面形状的周向变化对金属射流的影响，建立了只考虑金属射流的单流体模型，将气体的作用看作外部载荷，从控制方程和边界条件出发导出了波数与频率的特征方程。将实验中观测到的现象用理论模型进行了描述，得到了一些与前人的工作相一致的结果，并发现了一些新的现象。但由于实验条件的限制，无法进一步证实结果的正确性。而且该模型是在对实际问题作了相当简化的基础上提出的，一些因素(如黏性、压缩性等)的简化处理，使其在与实验比较时难以高度一致。但从理论角度出发，它将对今后的深入研究奠定基础。

参 考 文 献

1 Castleman RA. NACA Report, No.440. 1932

2 Bradley D. On the atomization of liquid by high-velocity gases(I)&(II). *Phys Fluids*, 1973, 6: 1724~2267

3 Reitz RD, Bracco FV. Mechanism of atomization of a liquid jet. *Phys Fluids*, 1982, 25(10): 1730

4 Lin SP, Kang DJ. Atomization of a liquid jet. *Phys Fluids*, 1987, 30(7): 2000

5 Zhou ZW, Lin SP. Absolute and convective instability of a compressible jet. *Phys Fluids A*, 1992, 4(2): 277

6 马峥，周哲玮. 气流雾化问题中的流动稳定性研究. 应用数学和力学，1999，20(10)：991

7 张景，周哲玮. 喷射成形中的喷射雾化机理研究. 粉末冶金技术，1999，17(3)：163

8 汤晓东. 外部扰动对射流稳定性的影响. [硕士学位论文]. 上海大学，1999

9 Nayfeh AH (著)，宋家骕(译). 摄动方法导引. 上海翻译出版公司，1990

10 王竹溪，郭敦仁. 特殊函数概论. 北京：科学出版社，1979

二维交通流密度波的稳定性分析

薛　郁*,**　戴世强*　谢腊兵*

*(上海市应用数学与力学研究所，上海大学，上海 200072)

**(广西大学物理系，南宁 530004)

摘要　利用格子流体力学交通模型对二维网格上交通流的密度波变化作解析研究。首先利用非线性分析方法推导出在交通流的稳定区域上描述密度波的 Burgers 方程，在稳定区域中有三角激波出现。而且分别证明在共相线之外，中性线附近和中性线内分别出现三角激波，孤子波和扭折-反扭折波(kink-antikink wave)。这些密度波分别由Burgers方程、Korteweg de Vries(KdV)方程和修正的 Korteweg de Vries(mKdV)方程所描述。

关键词　格子流体力学交通模型，密度波，Burgers 方程，KdV 方程，共相线，中性线

引　言

当前，社会经济的迅速发展与交通建设的相对滞后已经构成非常突出的世界性矛盾，更好地解决交通问题已经成了当务之急的问题。为此人们提出各种交通模型[1, 2]。按研究层次可分为微观模型，中观模型和宏观模型。其中跟车模型是从微观的角度来研究一维交通流的演化过程，人们发现随着道路上的车辆的增加，交通的堵塞就会发生，而且以密度波的形式传播，分析结果表明，该密度波具有扭折-反扭折（kink-antikink）波的形式，由修正的 Korteweg de Vries(mKdV)方程描述[3, 4, 6-8]。这样，交通流具有以密度波形式传播和发生相变的两个方面。1992 年，B.Ham.Middelton 和 Levine 利用元胞自动机理论提出了二维元胞自动机交通流模型，简称 BML 模型[5]。利用 BML 模型，可以从整体上对城市的交通网络进行深入的研究。模拟结果表明，随着车辆的密度的增大，系统会发生相变；在相变点以下，系统的状态是车辆密度皆可行驶的运动相；而在相变点以上，则是车辆被堵塞的堵塞相。Nagatani 利用格子流体力学的方法研究二维网格上的交通流[6]，结果发现，随着车辆的密度的增加，在运动相与堵塞相之间发生临界相变，其中存在一个临界点，该临界点随向东车辆数比例的增加而减少，阻塞相可以由 mKdV 方程的行波解描述。本文利用 Nagatani 的二维格子流体力学交通模型，对二维交通流的密度波的演化过程的作进一步的研究。从微观角度研究二维的交通流的密度波变化与一维情形的异同之处；随着车辆密度增加，二维的交通流是否存在由 Burgers 方程描述的稳定状态的密度波向亚稳状态的具扰动项 KdV 方程所描述的密度波演化，失稳后演化为 mKdV 方程所描述的密度波。

1　格子流体力学交通模型及 Burgers 方程、KdV 方程

Nagatani 提出的二维格子流体力学交通模型[6]中类似于 BML 模型在二维网格上分布有两种不同类型的车辆，分别沿 x 轴正方向行驶的车辆（称为向东行驶车）和沿 y 轴正方向行驶的车辆（称为向北行驶车）。向东（或向北）行驶车辆的局域密度和局域速度分别为 $\rho_x(x,y,t)$，$\rho_y(x,y,t)$ 和 $u(x,y,t)$，$v(x,y,t)$。由流体力学连续性方程，有

$$\partial_t \rho_x(x,y,t) + \partial_x[\rho_x(x,y,t)u(x,y,t)] = 0 \tag{1}$$

$$\partial_t \rho_y(x,y,t) + \partial_y[\rho_y(x,y,t)v(x,y,t) = 0 \tag{2}$$

其中 $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$，$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$，$\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$。

假定交通流流量在一个延迟的时间 τ 内通过最佳速度进行调整，向东和向北的交通流量分别为

$$\rho_x(x,y,t+\tau)u(x,y,t+\tau) = c\rho_0 V(\rho(x+x_0,y,t)) \tag{3}$$

$$\rho_y(x,y,t+\tau)v(x,y,t+\tau) = (1-c)\rho_0 V(\rho(x,y+y_0,t)) \tag{4}$$

其中 c 是向东行驶车辆数的比例。$\rho(x,y,t) = \rho_x(x,y,t) + \rho_y(x,y,t)$ 是局部密度，ρ_0 是总的平均密度，x_0 是向东行驶车辆的平均车距，y_0 是向北行驶车辆的平均车距 $V(\rho(x,y,t))$ 是依赖于局部密度的最佳速度。当 $c=0$ 或 1 时，该二维模型就转化为一维的流体力学交通模型。对方程(3)和(4)进行差分离散，合并和整理，我们就得到如下的差分方程

$$\begin{aligned}\rho_{j,m}(t+2\tau) - \rho_{j,m}(t+\tau) + \tau c^2\rho_0^2\left[V(\rho_{j+1,m}(t)) - V(\rho_{j,m}(t))\right] + \\ \tau(1-c)^2\rho_0\left[V(\rho_{j,m+1}(t)) - V(\rho_{j,m}(t))\right] = 0\end{aligned} \tag{5}$$

$$\rho_{j,m} = \rho_{x,j,m}(t) + \rho_{y,j,m}(t)$$

其中 $\rho_{x,j,m}(t)$ 是沿 x 正方向在 (j,m) 格点上的局域密度，$\rho_{y,j,m}(t)$ 是 y 方向 (j,m) 格点上的局域密度。最佳速度按文献[6，7]，设为

$$V(\rho_{j,m}(t)) = \tanh\left(\frac{2}{\rho_0} - \frac{\rho_{j,m}(t)}{\rho_0^2} - \frac{1}{\rho_c}\right) + \tanh\left(\frac{1}{\rho_c}\right) \tag{6}$$

其中 ρ_c 是安全距离的倒数，在 $\rho_{j,m}(t) = \rho_c$，当 $\rho_c = \rho_0$ 时存在一个拐点 $V''(\rho_c) = 0$。当 $\rho_c = \rho_0$ 时，$-\rho_0^2 V'(\rho_0) = 1$。因此 $V(\rho_{j,m}(t))$ 具有如下性质:单调减函数，具有上界(最大速度)，在安全距离点上具有一个拐点。正因为这些性质，才能得到扭折-反扭折密度波来表示交通堵塞，Nagatani 应用线性分析方法得到了交通流的稳定条件。如果满足下列条件，则交通流处于稳定状态[6]

$$V'(\rho_0) < -\frac{1}{3[c^2 + (1+c)^2]\rho_0^2\tau} \tag{7}$$

其中 ρ_0 是平均总密度，$V'(\rho_0)$ 是最佳速度函数在 $\rho = \rho_0$ 点上的导数。对方程（5），我们考虑在稳定交通流状态下，长波模式的展开，引进表明波数的小参数 $\varepsilon(0 < \varepsilon << 1)$ 以及慢变量 X 和 T

$$X = \varepsilon(j+m+bt), \quad T = \varepsilon^2 t \tag{8}$$

其中 b 是待定参数。设密度为

$$\rho_{j,m}(t) = \rho_0 + \varepsilon R(X,T) \tag{9}$$

利用方程(8)和(9)，将方程(5)展开至 ε^3 量级，可以得到下列非线性偏微分方程

$$\varepsilon^2\left[b\tau + g\tau V'\rho_0^2\right] + \varepsilon^3\left\{\left[\frac{3(b\tau)^2}{2} + \frac{\tau g\rho_0^2}{2}V'\right]\partial_X^2 R + \tau\partial_T R + \tau g\rho_0^2 V'' R\partial_X R\right\} = 0 \tag{10}$$

其中 $g = c^2 + (1-c)^2$，$\partial_T = \frac{\partial}{\partial T}$，$\partial_X = \frac{\partial}{\partial X}$，$V' = \left[\frac{\mathrm{d}V(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right]_{\rho=\rho_0}$，$V'' = \left[\frac{\mathrm{d}^2V(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2}\right]_{\rho=\rho_0}$。

如果取$b=-g\rho^2V'(\rho_0)$，则项ε^2的系数为零。我们就可得到如下的偏微分方程

$$\partial_T R + g\rho_0^2 V'' R\partial_X R = -\left[3\rho_0^2 V' g\tau + 1\right]\frac{g\rho_0^2}{2}V'\partial_X^2 R \tag{11}$$

在$\rho_0>\rho_c$时，$V''<0$．而在稳定区域。$\partial_X^2 R$的系数是$-\left[3\rho_0^2V'g\tau+1\right]\frac{g\rho_0^2}{2}V'>0$。因此方程(11)就是描述交通流处于自由运动稳定区域的 Burgers 方程。Burgers 方程的解为

$$R(X,T)=\frac{1}{|V''|T}\left[X-\frac{1}{2}(\eta_j-\eta_{j+1})\right]-\frac{1}{2|V''|T}(\eta_{j+1}-\eta_j)\times$$

$$\tanh\left[\frac{V'(\rho_0)/2-V'^2\tau}{4|V''|T}(\eta_{j+1}-\eta_j)(X-\zeta_j)\right] \tag{12}$$

其中ζ_j波前，η_j沿x轴方向的斜率，其传播速度为

$$v_p=V'(\rho_0) \tag{13}$$

当$\rho_0=\rho_c$时，$V''=0$。方程(11)变为

$$\partial_T R+\left[3\rho_0^2V'g\tau+1\right]\frac{g\rho_0^2}{2}V'\partial_X^2 R=0 \tag{14}$$

在满足$3\rho_0^2V'g\tau+1<0$条件下，交通流处于稳定的扩散运动状态。如果$3\rho_0^2V'g\tau+1<0$条件不满足，则交通流处于不稳定的扩散运动状态，此时交通流失稳表明阻塞相变发生，Nagatani 已经证明可以通过 mKdV 方程来描述此时的密度波为扭折–反扭折（kink-antikink）波。其解为[6]

$$\rho_{j,m}(t)=\rho_c\pm\left[\frac{6\left(-\rho_c^2V'\right)\left(-3g\rho_c^2V'\tau-1\right)}{\rho_c^2V'''}\right]^{1/2}\times$$

$$\tanh\left[\left\{\frac{27}{2}\left(-3g\rho_c^2V'\tau-1\right)\right\}^{1/2}\left\{j+m-g\rho_c^2V'\left(2+3g\rho_c^2V'\tau\right)t\right\}\right] \tag{15}$$

在中性线附近，$\varepsilon=\sqrt{|a_s/a-1|}<<1$，表明偏离中性线。我们可以定义慢变量$X$，$T$

$$X=\varepsilon\left(j+m+V't\right),\quad T=\varepsilon^3t \tag{16}$$

其中$V'=\left[\mathrm{d}V(\rho)/\mathrm{d}\rho\right]_{\rho=\rho_0}$，密度定义为

$$\rho_{j,m}(t)=\rho_0+\varepsilon^2R(X,T) \tag{17}$$

将方程(16)和(17)代入方程(5)中，并展开至ε^6量级，我们就可以得到如下具有扰动项的 KdV 方程

$$\varepsilon^5\left[\partial_T R+\frac{g\rho_0^2V'}{27}\partial_X^3R+g\rho_0V''R\partial_XR\right]+$$

$$\varepsilon^6\left[\frac{15g^4\rho_0^8V'^2}{24}\partial_X^4R-3g\rho_0^2V''\partial_T\partial_XR+\frac{1}{24}\tau g\rho_0^2V'\partial_X^4R+\frac{V''}{4}\tau g\rho_0^2\partial_X^2R^2\right]=0 \tag{18}$$

忽略ε^6项，得

$$\partial_T R + \frac{g\rho_0^2 V'}{27}\partial_X^3 R + g\rho_0^2 V'' R\partial_X R = 0 \tag{19}$$

其孤子解为

$$\rho_{j,m}(t) = \rho_0 + \frac{28V'}{27\rho_0^2 gV''}\left|\frac{a_s}{a}-1\right|\sec^2 h\left[\sqrt{\frac{7\left|\frac{a_s}{a}\right|-1}{3}}\left\{j+m+\left(1+\frac{14\left|\frac{a_s}{a}\right|}{9}\right)V't\right\}\right] \tag{20}$$

其中

$$V' = \frac{\mathrm{d}V(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\bigg|_{\rho=\rho_0}, \quad V'' = \frac{\mathrm{d}^2V(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2}\bigg|_{\rho=\rho_0}$$

2 总 结

利用 Nagatani 提出的格子流体力学交通模型，用解析方法研究二维网格上交通流密度波的变化，比较一维的格子流体力学交通模型[7]或一维跟车模型[8]的结果，我们发现与一维的格子流体力学交通模型一样存在相同的车辆密度波的演化过程。即在运动相，车辆的运动处于稳定状态，密度波是由 Burgers 方程描述的三角波或扩散运动；当处于亚稳定时，密度波是由具有扰动项的 KdV 方程描述的孤子波；由于扰动作用，车辆运动失稳处于不稳定状态，密度波就是由 mKdV 方程所描述的扭折-反扭折（kink-antikink）波，此时交通阻塞出现了阻塞相，或者车辆的运动处于不稳定的扩散运动，此时交通就越来越堵塞，处于一种逆输运的状态，直至车辆全部阻塞。而与一维的情况不同的就是二维的相变点不相同，沿 x，y 方向局域分布的车辆密度不相同。

参 考 文 献

1 Chowdhury D, Santen L and Schreckenberg A. Statistical physics of vehicular traffic and some related systems. *Phys Rept*, 2000, 329: 199~329

2 Prigogine I, Herman R. Kinetic Thoery of Vehicular Traffic. Amsterdam: Elsevier, 1971

3 Bando M et al. Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation. *Phys Rev E*, 1995, 51: 1035

4 Nagatani T. Thermodynamic theory for the jamming transition in traffic flow. *Phys Rev E*, 1998, 58(4): 4271~4277

5 Biham O, middleton AA, and Levine DA. Self-organization and a dynamical transition in traffic flow models. *Phys Rev A*, 1992, 46: R6124

6 Nagatani T. Jamming transition in a two-dimensional traffic flow model. *Phys Rev E*, 1999, 59(5): 4857~4921

7 Nagatani T TDGL. MKdV equations for jamming transition in the lattice models of traffic. *Physica*, 1999, 264(3-4): 581~672

8 Muramatsu M, Nagatani T. Soliton and kink jams in traffic flow with open boundaries. *Phys Rev E*, 1999, 60(1): 180~187

热毛细对流空间实验研究 1)

刘秋生　周炳红　胡文瑞

(国家微重力实验室，中科院力学研究所，北京 100080)

摘要　介绍了实践 5 号科学实验卫星完成的我国首次两层流体空间实验及结果。实验研究采用理论、数值模拟分析和空间实验观察的方法，研究液体石蜡和氟化液（FC70）二层流体的纯热毛细对流（温度梯度方向与流体界面平行）与 Marangoni 对流（温度梯度与界面垂直）对流特征。实验历时 9d，共完成了微重力（$10^{-4}g$）和低重力（$10^{-2}g$）条件下 30 余种工况下的实验观测。实验和理论的分析结果比较获得了基本一致的结果，验证了理论模型的正确性。本文还分析了空间实验观测到的微重力环境中液-气和液-液多界面驱动的 Marangoni 和热毛细相互影响的对流新现象，提出了新的流体物理模型。

关键词　两层流，微重力流体，热毛细对流，空间实验

引　言

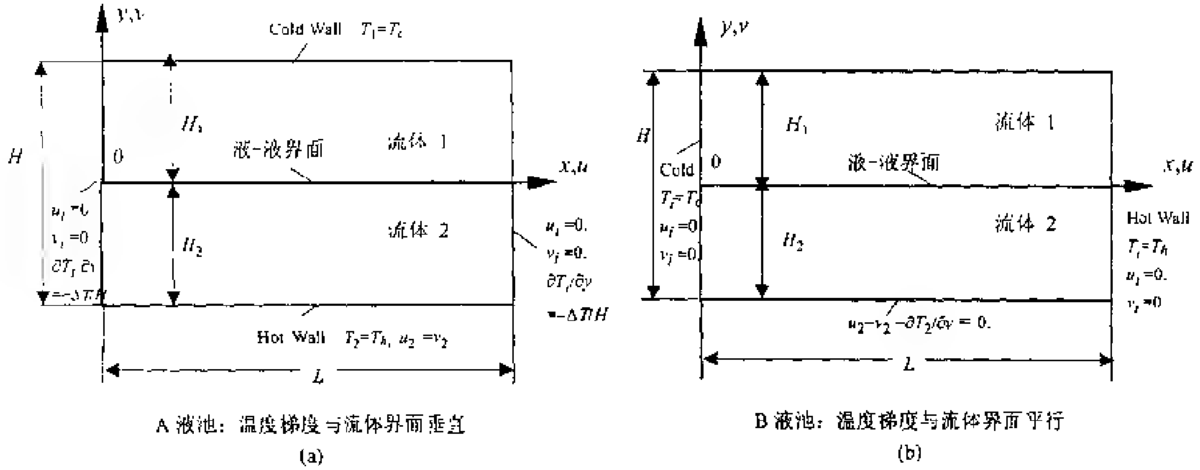
多层流体流动及界面现象是自然界和工程技术中普遍存在的物理现象。在微重力环境中由于重力引起的浮力效应的极大减小，流体自由面或界面的表面驱动对流成为主要现象。在非均匀温度场中的多层流体热毛细对流涉及具有流体界面效应的较复杂传热传质现象，同时也涉及许多工程技术中的流体力学问题[1]。在晶体材料生长过程中，为了避免某些人造晶体材料中所含的挥发性成分的挥发，Metz 等人[2]于 1962 年提出液体覆盖技术用于 Czochralski 晶体生长方法(简称 LEC 方法)。Johnson[3]于 1975 年提出一种加有一层覆盖液体的液桥方法（LEFZ 方法），采用在三氧化二硼液体的包裹下地面生长锌化镓半导体材料（GaAs），避免了待结晶材料同容器壁面的接触。1987 年 Barocela[4]等人建议在太空(微重力环境)中采用该方法生长锌化镓。两种不同加热方式下的两层流体 Marangoni 对流和热毛细对流是上述材料生长过程中典型的热对流运动形式，前者的外加温差方向与流体界面相平行，后者与流体界面垂直。进行微重力环境下的两层流体空间实验，为研究和认识多层流体热毛细对流及不稳定性特征提供了很好的机会和条件。

近年来人们从理论和实验两方面对多层流体系统进行系统和深入的研究，重点是研究在相同或不同二液体厚度层，以及不同粘性比情况下热毛细对流的始发点和振荡对流现象。随着空间技术的发展和空间的应用开发，人们先后开展空间实验研究微重力环境下的纯热毛细对流现象的基本特征和规律。刘秋生，Roux 等人[5]用数值模拟的方法分析并探讨了覆盖液体层对被覆盖液体的动力控制特性。Legros 等人自 70 年代初就开始进行空间微重力流体实验[6]，分别于 1971 年和 1992 年两次在宇宙飞船上进行单层液体(气-液) Maragoni-Benard 对流的观测实验之后，又于 1994 和 1996 年完成了多层热毛细对流空间实验，获得了宝贵的实验观察数据，实验结果与理论预测基本相符。但是，上述空间多层流体实验未能观察到振荡对流现象[7]。1999 年 5 月，我国首次利用实践 5 号卫星成功完成了两层流体空间实验，实验中采用石蜡-氟化液新的两层流体实验体系，实现了所需的平整液-液交界面，得到了纯热毛细对流的流场结构，验证了理论模型[8]。空间实验已经显示出在微重力环境下仍然可以得到不相混且变化不大的液-液交界面，为在空间实现液体覆盖晶体生长可行性提供了依据。

1) 国家科委攀登预选项目 95-Yu-34 和国家基金委基金(No.19789201)资助项目

1 物理模型

实验采用两个内腔尺寸不同的矩型液池分别封装着厚度相等的二层不相混合液体，其中一个液池（48 mm×20 mm×32 mm）采取上下加热方式（外加温差方向与流体界面垂直），另一个液池（35 mm×20 mm×32 mm）采取水平加热方式（外加温差方向平行于流体界面）。与之相对应的系统模型见图 1 所示。通过分别在 A 液池的两侧边壁上保持不同的恒定温度，形成与流体界面平行的外加温度梯度，此时右侧壁为高温 T_h、左侧壁为低温 T_c，外加温差值是$\Delta T = T_h - T_c$；在 B 液池的上下和外加温度梯度与流体界面平行（对应于空间实验的），此时底固壁面为高温 T_h（或低温 T_c）、上固壁为低温 T_c（或高温 T_h），形成垂直于界面方向的温度差（ΔT）。矩型液池的长宽比定义为$A = L / H_2$，上下流体厚度比$h^* = H_1 / H_2$。



A 液池：温度梯度与流体界面垂直

(a)

B 液池：温度梯度与流体界面平行

(b)

图 1 两种不同加热方式下二层流体系统示意简图

不考虑重力效应($g = 0$)的二维多层不可压缩流体的 Navier-Stokes 方程组和能量控制方程的无量纲化形式可写为

$$\nabla \cdot V_i = 0$$

$$(V_i)_t + C^{\mu}{}_i V_i \cdot \nabla V_i = -C^{\rho}{}_i \nabla p_i + C^{\nu}{}_i \nabla^2 V_i$$

$$(\theta_i)_t + C^{\chi}{}_i \nabla \cdot (V_i \theta_i) = C^{\alpha} D_i \nabla^2 \theta_i$$

其中$i = 1$对应于上层流体，$i = 2$对应于下层流体（以在地面重力条件下的自然分层为准）。$V_i = (u_i, v_i, 0)$为无量纲速度变量，$\theta_i = (T_i - T_c)L / \Delta T H_2$是无量纲温度，$p_i$无量纲压力。方程里的定常系数$C_i^{\mu}, C_i^{\rho}, C_i^{\nu}, C_i^{\chi}$和$C_i^{\alpha}$代表控制方程中的无量纲系数，它们决定于所选取的量纲参量。当选取 $\alpha_2 / H_2, H_2^2 / \alpha_2, H_2$和$\Delta T H_2 / L$为速度、时间、长度和温度的无量纲化尺度后，上述系数分别等于如下值

$$C_1^{\mu} = 1,\quad C_1^{\rho} = 1/\rho^*,\quad C_1^{\nu} = Pr\nu^*,\quad C_1^{\chi} = 1,\quad C_1^{\alpha} = \alpha^*$$

$$C_2^{\mu} = 1,\quad C_2^{\rho} = 1,\quad C_2^{\nu} = Pr,\quad C_2^{\chi} = 1,\quad C_2^{\alpha} = 1$$

其中$Pr = \nu_2 / \alpha_2$为对应于流体-2 的 Prandtl 数，$\rho^* = \rho_1 / \rho_2$，$\nu^* = \nu_1 / \nu_2$和$\alpha^* = \alpha_1 / \alpha_2$分别表示流体-1 与流体-2 的密度比，运动黏度比，热扩散系数之比值。

在本文中，液-液交界面均假设是平的和不变形。所有固壁处均被假设为不滑移动力学边界条件。A 液池和 B 液池中的加热边壁被考虑为等温热边界条件，而 A 液池中的其他非加热壁面被认为是绝热的、B 液池中的被认为是纯导热的热边界条件。位于两流体间的液-液交界

面上 ($y=0$) 的张力分布被认为是温度的线性变化函数：$\sigma=\sigma_0-\gamma(T-T_0)$，其中 $T_0=(T_c+T_h)/2$ 和 $\gamma=-\partial\sigma/\partial T$ (界面张力温度系数)。其中连接两层流体的界面切向动力学平衡条件和法向热平衡条件分别为

$$\frac{\partial u_2}{\partial y}-\mu^*\frac{\partial u_1}{\partial y}=-Ma\frac{\partial\theta_2}{\partial x}$$

$$\chi^*\frac{\partial\theta_1}{\partial y}=\frac{\partial\theta_2}{\partial y},\quad \theta_1=\theta_2$$

这里的 Marangoni 数定义如下

$$Ma=\gamma\delta TH_2^2/\mu_2\alpha_2$$

其中 γ 流体 1 和流体 2 交界处的。式中的 $\chi^*=\chi_1/\chi_2$ 分别表示两流体的热传导系数之比。

2 理论分析及数值模拟

2.1 稳定性分析

对在两种不同加热情况下的二层流体对流线性稳定性的分析，我们采用谱方法(Tau-Chebychev)离散系统线性化后的控制方程和相应的边界条件，求解系统的复数特征根 λ，从而确定流体系统的临界状态参量。

在 A 液池垂直加热情况下的 Marangoni 对流不稳定性分析，初始基态为静止的流场和纯导热线性分布的温度场，通过施加三维小扰动，并在基态流场中引入其幅值正比于 $\exp[\lambda t+i(k_x+k_z)]$ 的速度、温度和压力的空间扰动量，忽略二阶以上的小扰动项，消除 x 和 z 方向的速度分量及压力项，便得到上述多层流体无量纲控制方程组的线性化常微分方程控制方程系统

$$ZD_i(D^2-k^2)^2v_i'=\lambda(D^2-k^2)v_i'$$

$$TD_i(D^2-k^2)\theta_i'-ZT_iG_{T_i}v_i'=\lambda\theta_i'$$

式中 D 代表无量纲的微分算子 d/dy，λ 代表时间增长速率，$k^2=k_x^2+k_z^2$ 代表无量纲波数，和 G_{T_i} 表示第 i 层流体内的静态 y 方向的温度梯度。

在 B 液池中外加温度梯度与流体界面平行情况下的热毛细对流不稳定性是在某一稳定对流基态上发生的非稳定流动，线性稳定性分析是基于二层流体对流的一维近似（长宽比 $A=L/H\to\infty$）基础流基础上，对其产生非稳态（震荡）对流现象进行求解[9]，线性化后系统的线性常微分方程组（动量方程和能量方程）为

$$ZD_i\phi_i^{(4)}-\left[2k^2ZD_i+ikZU_i\overline{U}_i\right]\phi_i^{(2)}+\left[k^4ZD_i+ik^3ZU_i\overline{U}_i+ikZU_i\overline{U}_i^{(2)}\right]\phi_i=\lambda\left(\phi_i^{(2)}-k^2\phi_i\right)$$

$$TD_i\theta^{(2)}-\left[k^2TD_i+ikZT_i\overline{U}_i\right]\theta_i+ZT_i\left\{ik\left(\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}\right)_i\phi_i-\left(\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x}\right)_i\phi_i^{(1)}\right\}=\lambda\theta_i$$

其中 $\hat{U}_i$ 和 $\overline{\theta}_i$ 分别表示速度和温度的基态解，ϕ_i 是在 x-y 平面内定义的流函数扰动变量。

对于无限长矩型池 ($A\to\infty$) 中的二层流体对流，在上下各液层任意纵截面上的对流流量为零和每一流层内的流体质量守恒和温度场沿 x(水平)方向呈线性分布的假设下，利用相应的边界条件，可给出零重力条件下($g=0$)的二层流体基态一维近似的速度分布和温度分布解。

采用谱方法 (Tau-Chebychev) 离散上述线性方程组和相应的边界条件，求解系统的复数特征根 λ，最后确定流体系统的临界状态参量。线性方程系统复数特征根的求解使用了 IMSL

程序库的 EIGZC 子程序。

2.2 Marangoni-Benard 对流稳定性

表 1 给出了空间实验 A 液池中石蜡/氟化液（FC70）二层流体介质产生 Marangoni 对流的临界参数和温差方向。在空间微重力条件下，理论分析告知需要从氟化液侧加高温才会引发该二层流体系的 Marangoni 对流，其最小温差值为 $\Delta T = 2.325°K$，对应的对流涡波数是 $k_c = 3.9858$。在微重力环境下 $(g = 0)$，如在液体石蜡侧加高温，其计算临界 Marangoni 数为负值 $Ma_c =$ 1806，所对应的临界外加温差为 $\Delta T = -2.325°K$。负的温差值表示只有在氟化液侧加高温才可使流体系统发生 Marangoni 对流现象。

表 1　液态石蜡/氟化液体系的 Marangoni-Bénard 对流稳定性分析

（ΔT ⊥ 流体界面，H=20 mm，H =H_2）

临界参数值	$g = g_0$	$g = 1\times10^{-1} g_0$	$g = 0$
Ma_c	19.96	181	1795
ΔT_c(K)	0.0148	0.134	2.325
k_c	5.155	5.005	3.9858

2.3 热毛细对流稳定性

随着 B 液池的外加水平温差的进一步增加，二层流体热毛细对流将从稳态转变到周期性的非稳态流动，使该流体系统发生非稳态振荡流动的最小温差值定义为临界温差$(\Delta T)_c$，此值也是实验研究所希望测定的。

液态石蜡和氟化液二层流实验系统纯热毛细对流不稳定性的分析结果由图 2 给出。由上图可以得出该流体系统发生热毛细振荡对流的（最小）临界 Marangoni 数值为 $Ma_c = 2382.2$，对应的临界波数是 $k_c = 2.3747$。对 B 液池的长宽比 $A = L/H_2 = 3.5$ 而言，由于临界扰动波的波长是 $\Lambda_c = 2\pi / k_c = 2.6445$，故根据线性稳定性分析的结果估计该流体系统生产非稳态震荡热毛细对流时每层中至少可出现 1 对对流涡（$A > \Lambda_c$）。

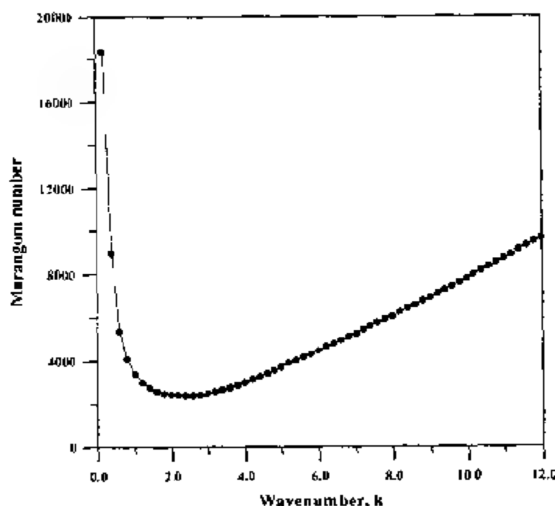


图 2　微重力条件下液态石蜡/氟化液体系热毛细对流的线性稳定性中性曲线

（ΔT // 流体界面，g=0，H_1=H_2=10mm）

2.4 数值模拟

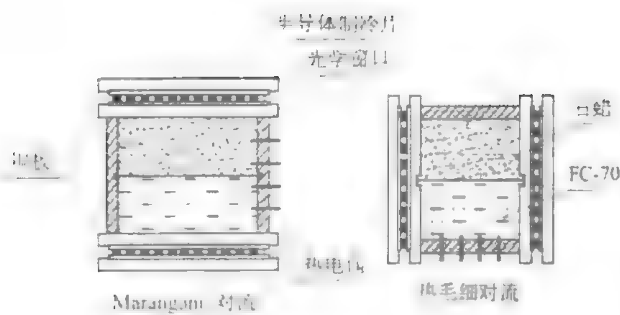
矩型液池内两层流的直接数值模拟计算是通过用 SIMPLE 方法来求解由系统的控制方程

和边界条件所组成的二维非线性方程组，计算是在交错网格上进行的，其中对流项为迎风格式，扩散项用中心差分，然后用 ADI 方法求解离散得到的代数方程组可分别给出 Marangoni 对流和稳态热毛细对流的速度场和温度场分布。其计算网格数一般取为(25+25)×100 至(31+31)×121（对于二层流体而言）。数值模拟得到的涡型与图像处理结果一致，速度值和实验符合较好，证明了该计算程序及方法是有效的。

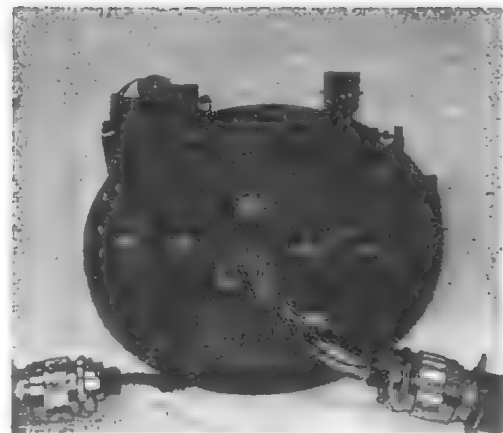
3 空间实验

3.1 实验装置

根据理论研究模型（见图 1），分别设计了两个内腔尺寸不同的矩型液池，A 液池内腔尺寸为 48 mm×20 mm×32 mm，采取上下加热方式；B 液池为 35 mm×20 mm×32 mm，采取水平加热方式。每个实验液池分别由四块 K9 光学玻璃和两块紫铜板制成，两紫铜板上设置了半导体致冷器，用以在液池上下或水平方向建立稳定的温差。两液池分别封装着厚度相等（均为 10mm）的石蜡-氟化液两层不相混合液体。上下加热时观察 Marangoni 对流，水平加热时观察纯热毛细对流。双液池和系统总成见图 3。



(a) 双液池系统示意图图



(b) 实验装置总成

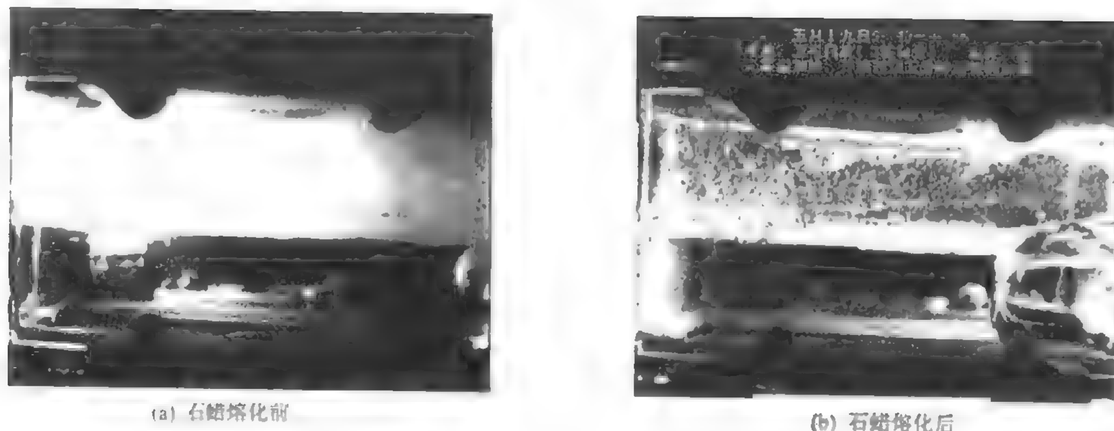
图 3 二层流体实验装置

该实验装置还包括光学测量系统、温度测控系统和图像、数据采集系统。采用 PIV 方法显示流场图像，示踪粒子直径约 100μm 。4 个发光二级管用来照亮示踪粒子，再由 CCD 摄像机接收示踪粒子的反射光，得到流场图像。测出示踪粒子在不同时刻的位移量，得出速度值。每个液池中分别植入四对铜-康铜微型热电偶，用以测量 A 液池两侧壁附近和 B 液池上下壁附近的流体温度。加热/致冷器片中各有一温度测点，以控制调节温度差值(ΔT)。即每个液池共有 6 个温度测点。

3.2 实验流体体系

实验最后选定石蜡(液-1)和氟化液 FC-70(液体-2)为上天的流体实验体系，石蜡由 40%的固体石蜡和石蜡油组成，由于石蜡在摄氏 28℃下呈固态，克服了运载火箭升空过程中振动使交界面受到破坏和两液体相混合的难题。在卫星进入预定轨道后，升温熔化石蜡形成界面平整的两层流实验体系。图4为卫星传回的未熔石蜡(上层)和 FC-70 液体两层实验体系的图像，表明卫星升空后体系仍保持良好的界面。液态石蜡和氟化的液主要物理参数之比分别为

$\rho^* = \rho_1 / \rho_2 = 0.4313$，$\nu^* = \nu_1 / \nu_2 = 0.9584$，$\chi^* = \chi_1 / \chi_2 = 2.2072$ 和 $\alpha^* = \alpha_1 / \alpha_2 = 2.405$，它们的 Prandtl 数分别为 $Pr_1 = 160.2$，$Pr_2 = 402.3$。液-液界面上的界面张力温度梯度系数为 $\gamma = -\partial\sigma / \partial T = 3.63 \times 10^{-5}$ (N/m°K)，是引起热毛细对流的重要物理参数。γ 值越大，在同样温差下所形成的热毛细对流越强。



(a) 石蜡熔化前　　(b) 石蜡熔化后

图 4　石蜡(上层) 和 FC70 二层实验体系空间图象

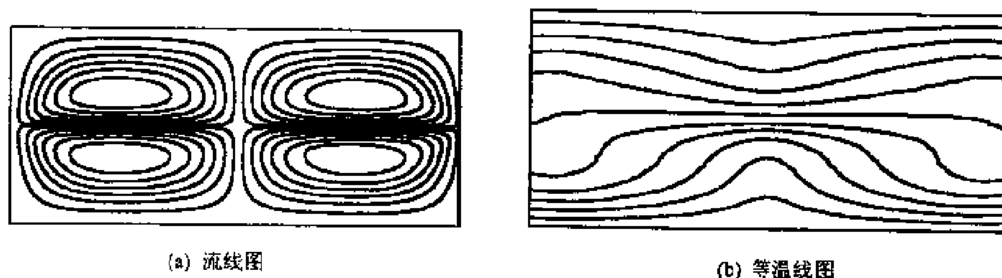
3.3 实验过程及数据采集

实验在实践 5 号卫星上共进行9 天 30 余次，重力水平为 $4\times10^{-4}g$ 及 $1\times10^{-2}g$。每次卫星过顶时间为 10~20min。通过地面发出的遥控指令切换A、B 实验液池，并改变加热温差值(ΔT)及加热速率，以完成不同工况的科学实验。本次实验共从卫星上传回 12 000 多幅流场图像，及实验液池内6 个测温点的30h 的实时温度数据。温度数据和图像数据通过码速率为 1.024Mbps 的信道传到地面，其方式为先传 100 帧 $512\times512\times8$bits 的图像数据(约 3.5min)，再传 8s 温度数据，重复上述过程，直到卫星过境结束。地面实验员得以实时地观察实验液池内的流动情况。

4　实验数据分析

4.1 Marangoni 对流(A 液池)

A 液池采取上下加热方式，理论分析表明当上下温差 ΔT 大于 2.325°C 时，液态石蜡和 FC-70 液体即在微重力条件下产生 Marangoni 对流。图 5 给出了 $\Delta T = 23$°C 时该两层流体中 Marangoni 对流流动的流场和速度场分布数值计算结果，其中在每层流体中分别存在一对相对旋转的、大小对称的对流涡。对应的等温线图表明(图 5(b))底层氟液中的热量由中部向上传，上层石蜡的低温流体自上向液-液界面流动。

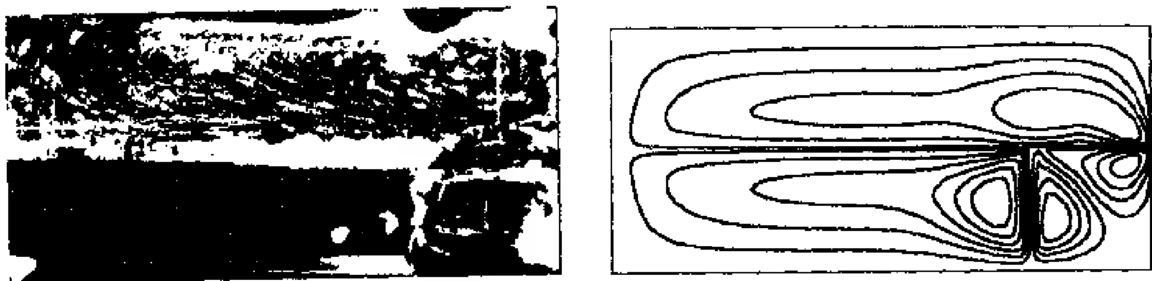


(a) 流线图　　(b) 等温线图

图 5　A 液池 Marangoni 对流模型计算结果 (不考虑气泡的影响)

在空间实验中温差 $\Delta T = 23$℃的实验工况下，实际对流流动图像如图 6(a)所示。此时液池

下端加高温，液池右下角明显存在一个直径约 10mm 的气泡（由于实验装置微小泄漏造成）。图像处理后的的流体运动轨迹显示液体石蜡层中一个充满整个液层的对流涡，FC-70 液体层中的示踪粒子较少，对流情况显示不佳，但根据流体界面处的速度连续可推断出下层液体流动结构。图 6(b)给出了考虑实验中石蜡层右端气泡时的定常流动的近似数值模拟结果。可以看出考虑气泡的作用后，数值模拟得到的流场分布和实验结果基本一致，两者具有相同的涡型。由于气泡与液体交面处具有较强的热毛细驱动力，使石蜡层内形成一个整体对流涡，并且涡心处于气泡上方。同理想的两层流体 Marangoni 对流流型(见图 5)相比，气泡的出现破坏了 Marangoni 对流流场的对称性和对流形成的临界特性。尽管如此，此次实验仍然很好的验证了具有局部气泡影响的两层流体 Marangoni 对流的新模型，获得了理论和实验一致的定量比较结果。



(a) 空间实验流场轨迹图像　　(b) 数值模拟流场流线图

图 6　A 液池中 Marangoni 对流空间实验结果 (考虑气泡的影响)

表 2 列出了 A 液池中 4 个不同位置处的流体实测速度值与数值模拟结果的比较，二者在流动方向和流动强度量级上均比较接近，证实了实验结果的可靠性。

表 2　实验流体速度值与计算结果比较

位置坐标 $(x, y)(\times10^{-3}m)$	(2.1，6.9)		(21.5，2.0)		(25.1，2.4)		(27.5，2.5)	
速度分量	实验	理论	实验	理论	实验	理论	实验	理论
$U(\times10^{-6}m/s)$	18.7	10.5	46.7	-61.4	-54.5	-42.6	-54.5	-37.8
$V(\times10^{-6}m/s)$	27.5	13.6	0	-1.3	11.5	-1.4	11.5	6.8

4.2 热毛细对流 (B 液池)

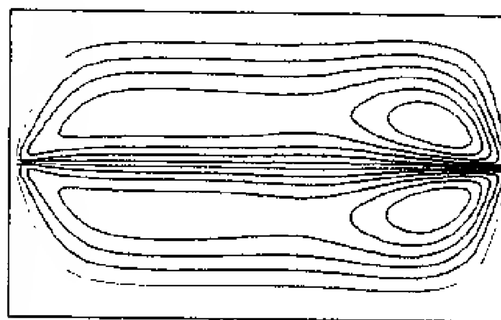
B 液池采取两侧加热方式观测微重力环境下的二层流体热毛细对流。图 7(a) 展示了实际外加温差为 43℃(右端为热端，左端为冷端)时的稳态热毛细对流的空间流动显示图象。很明显，在石蜡层内出现一个整体对流涡，涡心靠近热端；下层氟化液体(FC-70)靠近液-液界面附近处也有明显的、与上层流体涡对称的流动轨迹，显示出典型的纯热毛对流流动结构。实验对流流型与数值模拟结果(见图 5(b))完全相同。从表 3 可以看出，二者对应位置上的流体速度值也较好地吻合，表明本文中理论模型的正确性。

表 3　实验速度值与计算结果比较

位置坐标 $(x, y)(\times10^{-3}m)$	(22.1，0.4)		(23.0，0.5)		(23.9，0.5)		(30.5，5.7)	
速度分量	实验	理论	实验	理论	实验	理论	实验	理论
$U(\times10^{-6}m/s)$	-343	-383	-445	-383	-480	-405	240	206
$V(\times10^{-6}m/s)$	-26	4	26	10	26	16	-419	-102



(a) 空间实验流动轨迹图



(b) 数值计算流场流线图

图7 B液池中热毛细对流空间实验结果

5 结 论

本文介绍了实践5号卫星两层流体空间实验及其实验结果，并利用线性稳定性分析法和直接数值模拟计算，分析了微重力环境中两种不同加热方式下的两层流体实验系统的对流特征。通过图像处理分别获得了典型微重力条件下热毛细对流的空间实验结果，分析了具有气泡影响的的 Marangoni 对流和相应的新模型，其实测结果与数值模拟分析结果进行了比较，二者的对流流动结构一致、速度大小基本吻合，验证了微重力多层热毛细对流的理论模型和流动特征。

此次实验是我国首次成功完成的流体空间实验，取得了科学实验结果和宝贵的空间实验经验。实验已经清楚观察到典型的定常 Marangoni 对流和热毛细对流现象，其 Marangoni 对流的始发点和热毛细对流振荡现象有待进一步的空间实验观测和验证。

致谢 作者感谢参与此项空间流体实验的中科院空间科学与应用中心、501 所和西安卫星地面测控站等单位的有关人员，及参与实验装置研制的姚永龙、胡良、刘方、张璞、懂向群等国家微重力实验室科研人员。

参 考 文 献

1 刘秋生，胡文瑞，Roux B. 有关多层流体对流的研究. 力学进展，1997，27(4)：518~537

2 Metz EPA，Miller RC，Mazelsky R. A technique for pulling single crystals of volatile materials. *J Applied Physics*，1962，33：2016~2017

3 Johnson ES. Liquid encapsulated floating zone melting of GaAs. *J Crystal Growth*，1975，30：249~256

4 Balocela E，Jahlevand A. Liquid encapsulated float zone method for microgravity production of gallium arsenite. AIAA-87-0390，1987

5 Liu QS，Roux B，Velarde MG. Thermocapillary convection in two-layer systems. *Int J Heat Mass Transfer*，1998，41：1499~1511

6 Legros JC et al. Low-gravity fluid dynamics and transports phonomena. Edit by Koster JN，Sani RL，1990. 207~238

7 Georis Ph，Hennenberg M，Lebon G et al. Investigation of thermocapillary convection in a 3 liquid-layer system. *J Fluid Mech*，1999，389：209~228

8 Yao YL，Liu QS，Hu WR et al. Space experiment on thermocapillary and Marangoni convections of two liquid layer. Advanced Program on Microgravity Sciences，Joint 1st Pan-Pacific Basin Workshop and 4th Japan-China Workshop，July 8~11，1998 (Tokyo Japan)：11-B 1

9 Liu QS，Hu WR. Instability of convection in multilayer fluids subjected to a horizontal temperature gradient. 48th International Astronautical Congress，Oct.6~10，1997/Turin(Italy)：IAF-97-J.4.06

涡量探头测量应用：角区流动内涡量分布的实验研究[1)]

林发布　尹崇禄　王凯建　魏中磊
(北京大学湍流研究国家重点实验室，北京 100871)
孟庆国　　赵　峰　张　军
(国家自然科学基金委力学处，北京 100084)　(水动力学国防科技重点实验室，无锡 214082)

摘要　作者发展成功的六线涡量探头，能同时测量两个涡分量ω_x，ω_y或ω_x，ω_z以及三个速度分量u，v，w。对椭圆柱(5:1)垂直于平板上所构成的角区流场及其尾迹，利用该探头测量了流场的速度场和涡量强度，进而求得了角区流场内的拟涡能和螺度的分布等。

关键词　角区流动，涡量，六线探头，拟涡能，螺度

引　言

由于椭圆柱体正前方平板边界层内存在逆压梯度，形成了边界层内的流体分离，从而在柱体前方流场内出现旋涡线；由 Helmholtz 定理知，涡线在流场内不能中断，其结果是在涡线的不断卷吸、演化过程中，从柱体的两侧拖向远下游处，直到旋涡完全耗散为止。从柱体顶部向下观测全部角区，整个流场内的涡线呈马蹄形状。尽管角区流动模型几何形状很简单，但其构成的湍流场是非常复杂的，其中湍流场的涡量分布是一个非常重要的参量。由柱体的前方产生的强逆压梯度和边界层内的周期性分离、以及绕过柱体时形成的马蹄涡的非定常流场，在自然界和工程应用流动中普遍存在。对这种角区流动内湍流场的涡量分布的研究，不仅对更准确地理解湍流机理有帮助，更重要的是它有很广的技术应用价值，特别是对改进机翼、机身根部的角区连接处、潜艇了望塔和舰体的角区连接处，以及汽轮机叶片与端壁间的角区等的工程设计，都是不无裨益的。本实验应用六线涡量探头和六通道热线风速仪探头在 Reynolds 数为3×10^5实验条件下，研究了角区流场的速度场和涡量强度，进而求出了角区流场内的湍动能、Reynolds 应力、拟涡能和螺度的分布等，分析了角区流场的特征。此外，实验结果也与 B-L 湍流模式的计算结果做了比较。本文的实验成果，对流体工程应用上的涡量测量，有较大的实用价值。

1　实验装置与仪器

本实验是在北京大学湍流研究国家重点实验室低湍流风洞中进行的，风洞为直流、闭口吸入直流式，风洞实验段宽 0.3m，高 0.8m，长 3.0m，总收缩比为 18.75，风速 0.05~20m/s 范围内连续可调，风洞来流的湍流度低于 0.8%。安装模型后，风洞堵塞比仅为 2.25 %，实验中，应用自行研制的六线涡量探头和六通道热线风速仪测量了Ω_x，Ω_y，Ω_z的涡量分布，以及湍动能u'^2, v'^2, w'^2和雷诺应力$\overline{uv}$等参量。

六线涡量探头是由三个在ZX平面上的 X 型探头和一个的XY平面上的 X 型探头组成的，

1) 科技部攀登项目和总装备部国防科研预演基金资助项目

在 ZX 平面上线的间距为 1mm，在 XY 平面上的间距为 2mm。该探头空间分辨率为 2mm×2mm，尽管其六根热丝的空间布置较复杂，没有发现热线之间，以及热线和支杆之间的干扰现象，当探头主轴与来流方向之间的夹角在 ±5° 的范围内，热丝的特性几乎与角度的变化无关[1, 2]。

使用热线风速仪，必须首先标定出风速仪的输出电压与有效冷却速度的关系式，这是非常重要的，因为来流速度与有效冷却速度有一定的差别，大家知道，有了非常精确的标定结果，才会有较为准确的测量结果。对探头的标定速度范围选择在 0.3~1.5 倍所要测定的速度范围为进行。热线的过热比设置为 1.5，在不同的主流速度和不同的角度方向，要重复进行标定，以便能得到更为可靠的标定数据.本文的校准误差小于 0.2%。本实验标定的俯仰角变化是以每步变化 5° 进行的。标定得出的有效冷却速度对输出电压之间的关系曲线，如图 1 所示。

本实验采用的 AD 板，其采集频率为 100kHz，分配到每个单通道的采集频率是 16.6kHz。对每个采样点，采集时间为 15s。采样点移动由计算机控制的步进电机驱动三维坐标架来实现，坐标定位能达到较高的 (0.02mm) 精度。各个断面的布置和各个面内测量点的分布，如图 2 所示，其中在角区进行了五个断面的测量，在尾流区进行了三个断面的测量。

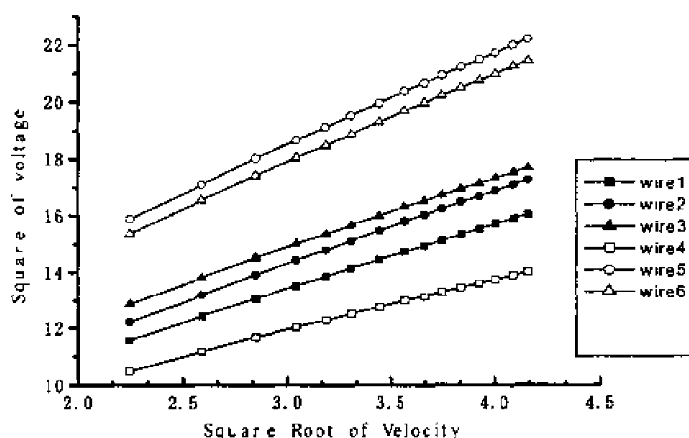


图 1　六线涡量探头的标定

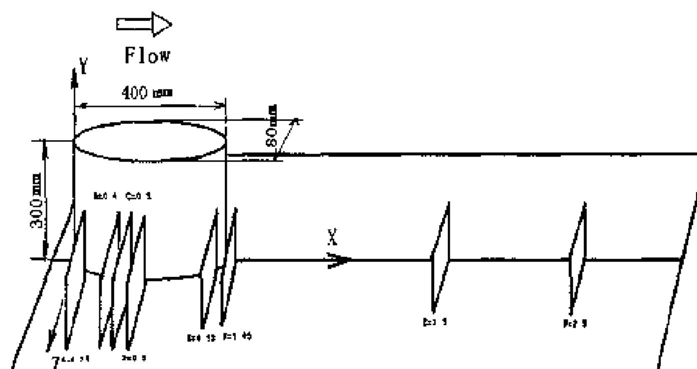


图 2　模型及测量面的安排

2　测量结果及其分析

在角区流动中，尽管流动模型的几何形状很简单，但其构成的湍流场是非常复杂的，它首先是一个非定常三维流场，其流动的主要特征是存在有多个马蹄涡的形成和发展，而马蹄

涡是由于平板上椭圆柱体正前方边界层内存在强逆压梯度，因此形成了边界层内的流体分离、再附。从柱体前方流体内形成的分离、再附的展向旋涡线，实际上是不断地前后摆动和扭曲的，并卷吸、吞併了周围流体，然后从柱体前方拖向柱体角区两侧的远下游。若从椭圆柱体的正上方向下看，此绕流椭圆柱体的旋涡线呈马蹄涡的形状。除了上述主马蹄涡外，在柱体正前方边界层内还存在有一系列较弱的二次涡。这些马蹄涡在流场中是周期性摆动的，所以角区流动是一个非定常的涡量场，这种非定常的马蹄涡流场在工程应用上非常普遍。

本文用六线涡量探针，对模型进行了 8 个断面的测量，其中对角区进行了五个断面的测量，对尾流进行了三个断面的测量。在角区内，截面 A (x/c=0.18) 和 D(x/c=0.5)上的涡量分布，见图 3 图 4； 在截面 A (x/c=0.18) 和 D(x/c=0.5)上的螺度分布，见图 5 和图 6。显然，由于主马蹄涡的卷吸，会把流场内高动量、高涡量的流体诱向邻近柱体的根部区域。

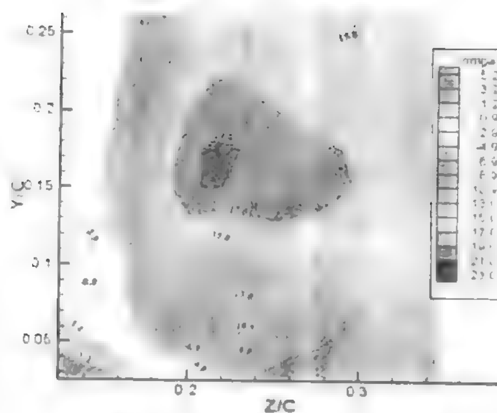


图 3 在截面 A 上的涡量分布

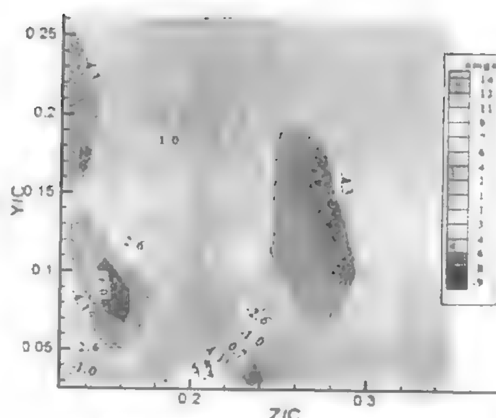


图 4 在截面 D 上的涡量分布

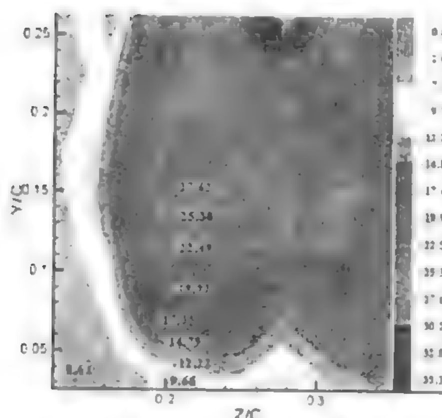


图 5 在截面 A 上的螺度分布

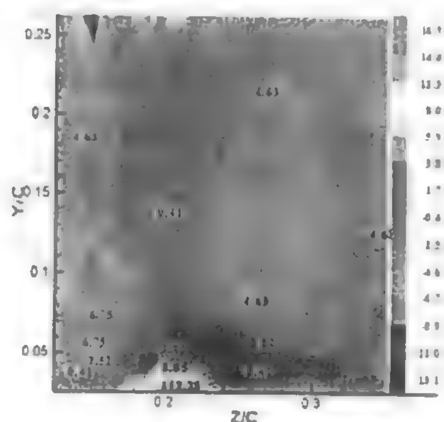
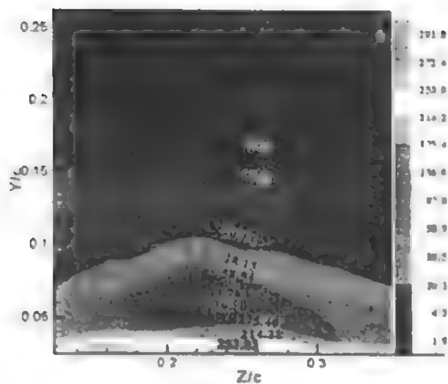
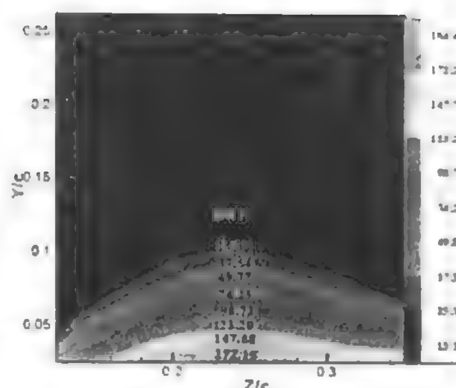


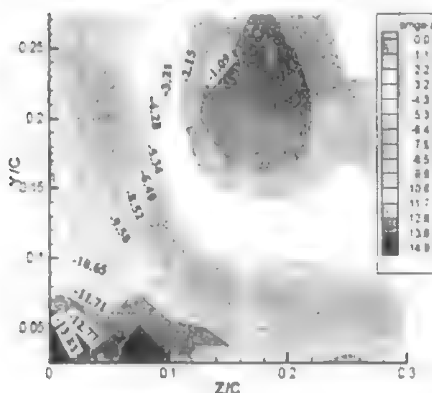
图 6 在截面 D 上的螺度分布

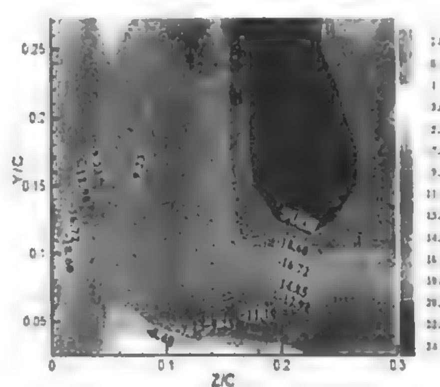
在角区内，截面 A (x/c=0.18) 和 D(x/c=0.5)上的拟涡能量分布，如图 7 和图 8 所示。由图可见，在角区内受马蹄涡的卷吸影响，拟涡能分布愈靠近根部，其值愈大。而高拟涡量的区域靠近角区平板的壁面。

在尾流内，截面 G（x/c=2.5）上的涡量分布、螺度分布和拟涡能分布，与角区内的测量结果，不完全一样，这是因为在尾流区域，马蹄涡已拖在自由流内，不再受柱体壁面的影响，马蹄涡可以自由扩散。这时流场的涡量分布、螺度分布和拟涡能分布如图 9，图 10，图 11 和图 12 所示：

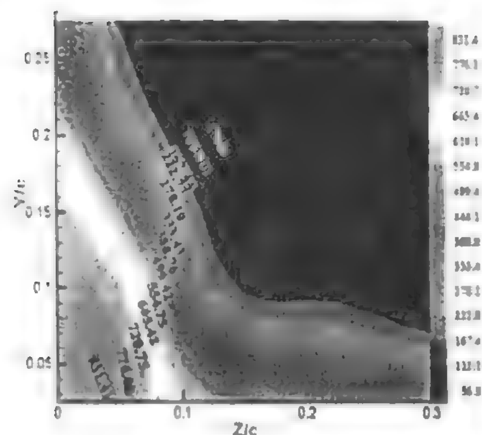

图 7　在截面 A 上的拟涡能分布

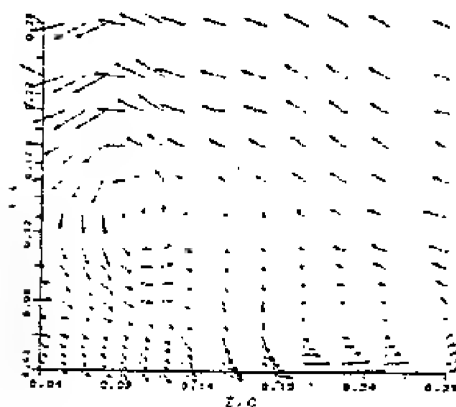

图 8　在截面 D 上的拟涡能分布


图 9　在尾流内截面 G (x/c=2.5)上的涡量分布


图 10　在尾流内截面 G (x/c=2.5)上的螺度分布

由上述的测量结果可知，角区和尾流内都现显示出，流场内有非常明显的大旋涡拟序结构，在角区内，近壁处也非常明显地观测到，靠近根部拟涡能在增加。实验发现，在角区的柱体最大厚度的前半部是顺压梯度区，涡量在扩散；在角区的柱体最大厚度的后半部，是逆压梯度区，很明显看到涡量在加强，而且这在拟涡能的分布图中也能够很好的体现出来。实验也测量出尾流内的大涡的结构的位置，如在 x/c=2.5 的断面上的速度矢量图和涡量分布，如图 11 和图 12 所示。由图也可很明显地看到大涡拟序结构形状和位置，二者是一致的。此外，本文用六线涡量探头测量的结果，与文献[5]用 X 型探头的测量的结果也是一致。


图 11　在尾流内截面 G (x/c=2.5)上的拟涡能分布


图 12　在截面 G (x/c=2.5)上速度矢量图

而马蹄涡的流向分量 ω_x 主要来源于速度梯度 $\partial w/\partial y$ 分量，如图 13 所示。实验发现，马蹄涡在尾流内沿下游传递会弥散为较为松散的涡，实验中还发现流向涡受二次流影响在 x/c=3.5 开始变弱。

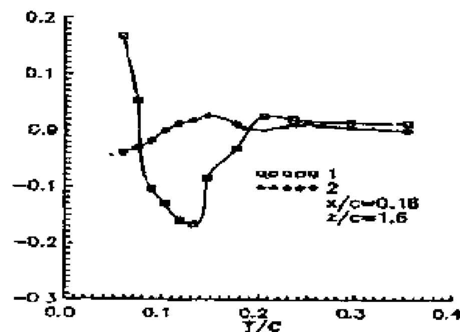


图 13 流向涡分量 $\partial w/\partial y$ (No.1) 和 $\partial v/\partial z$ (No.2) 的分布图

3 结 论

综上所述。从本实验的结果可以看出马蹄涡二次流对角区流动的湍流场有很大的影响，主要表现在：

(1) 在角区内由于主马蹄涡的卷吸，会把流场内高动量、高涡量的流体诱向邻近柱体的根部区域。

(2) 在角区内受马蹄涡的卷吸影响，拟涡能分布愈靠近根部，其值愈大。而高拟涡能的区域，靠近角区平板的壁面。

(3) 在角区的柱体最大厚度的前半部是顺压梯度区，涡量扩散得较快；在角区的柱体最大厚度的后半部，是逆压梯度区，涡量扩散得较慢，在拟涡能的分布图中，能够很好地体现出来上述特征。

(4) 六线涡量探头能测量出角区和尾流内的涡量分布，以及大涡结构的所在位置，由实验求得的尾流内断面 G（x/c=2.5）上的速度矢量图和涡量分布图，可很明显地看到，大涡拟序结构形状和位置，二者是一致的。

(5) 在角区内，马蹄涡的流向分量 ω_x 主要来源于速度梯度 $\partial w/\partial y$ 分量。

(6) 本文用六线涡量探头测量的结果，与文献[5]用 X 型探头的测量的结果也是一致。

目前，作者正在进一步做更多的实验和数据处理希望对角流场有更多的理解，特别是关与对角流场内螺度对湍流特性的影响，作者将做进一步的分析研究，以期在工程实际中得到更多的应用。

感谢　南京航空航天大学卢森林同志对热线探针的制造，北京大学魏庆鼎教授对本课题实验研究给予了的帮助和支持，作者特表谢意。

参 考 文 献

1 Kim JII Wirbelstaerkemessungen in einer turbulenten scherschicht [Ph D Thesis]，TU Berlin (in Germany)

2 魏中磊，魏庆鼎，王凯建，徐诚．热线风速仪及其探针的发展以及在湍流研究上的贡献．见：周哲玮主编．湍流理论新进展及其应用．上海：上海大学出版社，2000. 135–138

3 林发布，康红文，魏中磊：角区流场内涡量分布的实验研究．见：杜庆华主编．力学与工程应用．北京：中国林业出版社，2000

4 Kaijian Wang，Fabu Lin，Zhonglei Wei，Hongwen Kang，Feng Zhao. Vortices behavior in wing-body junction turbulence flow. In: Proceedings of the 4th international conference on Hydrodynamics/Yokohama/ 7-9 Sep. 2000，381~385

5 Hongwen Kang，Meng Fan，Zhonlei Wei. Study of turbulent wing-body junction flow. *Acta Aerodymic Sinica*，1998，16(2)：199

锯齿型扰流片对壁面压力分布的影响

张攀峰　王晋军　李亚臣

（北京航空航天大学流体力学研究所，北京 100083）

摘要　通过风洞测压实验研究了绕平板扰流片和锯齿扰流片分离流动的壁面压力分布，结果表明平板扰流片和锯齿扰流片均在上游 x/h=-0.6 处剪切层开始分离，并再附于下游 x/h≈20 的位置。锯齿扰流片横向位置的变化对壁面平均压力分布几乎没有影响，但通过锯齿槽流向的压力脉动一般大于通过锯齿尖点流向的脉动。从平均压力分布看，锯齿高度可以增加扰流片阻流效果，采用锯齿扰流片可以减小下游壁面压力的脉动。

关键词　平板扰流片，锯齿扰流片，平均压力分布，脉动压力分布

引　言

近年来，扰流片在工程实践的各领域得到了广泛的应用。科研工作者对扰流片的分离再附点、压力分布、速度分布以及脱落频率等诸多方面作了许多细致的工作。

对于平板扰流片，Everitt[1]在 1982 年研究了底部间隙 g/h 以及边界层厚度 δ/h 对扰流片前后压力系数 C_{pfm}，C_{pbr} 以及 St 数的影响；而 Yeung 等[2, 3]的工作主要是为了降低和消除机翼表面扰流片动态时的副作用，他们不仅研究了带有底部间隙的扰流片，而且对前倾扰流片的静态和动态效果与传统扰流片作了比较。结果表明扰流片的底部间隙 g 以及前倾的扰流片静态时都能保持传统扰流片的功用，而在动态时又可降低反作用的力和力矩。

在农林工程上，为了扩大扰流片下游回流区的范围，使用较多的是开孔扰流片。射流通过扰流片的孔进入下游回流区，增大了流动的能量。从而使得分离剪切层抬高，再附点后移。Fang 和 Wang[4]在 1997 年对开矩形孔扰流片进行了数值模拟，得到了开孔度 $\eta=0\%$，10%，20%，30%，40%的扰流片的流线图和压力分布图；Yaragal 等[5]在 1997 年使用皮托管对开孔度 $\eta=0\%$，12.5%，26.1%，60%的扰流片下游压力分布和速度分布进行了测量；而 Lee 和 Kim[6]用粒子跟踪测速技术（PTV）测量了开孔度 $\eta=0\%$，20%，40%，65%的扰流片后速度场和涡量场，在 $\eta\leqslant 40\%$时随着开孔度的增大再附点后移，但 $\eta>40$ 以后射流加强，回流区大尺度涡结构消失。

本文主要研究锯齿对扰流片引起的壁面压力分布的影响，特别是锯齿扰流片横向位置和锯齿高度对扰流片上下游平均压力和脉动压力分布的影响。

1　实验设备与技术

实验是在北航 D1 风洞中进行的，风洞实验段截面形状呈椭圆形，进口尺寸为 1.02 m ×0.76 m，出口尺寸为 1.07 m ×0.81 m，全长 2 m。在平板扰流片的底部是一块有机玻璃平板，其尺寸为 1400 mm ×1150 mm ×15 mm。平板扰流片位于距离平板前端 600 mm 处。距底部平板前缘 100 mm 处有一直径约为 6 mm 的二维绊线，层流边界层在此转捩，在平板扰流片所处位置湍流边界层相对高度大约为 $\delta/h=1.4$。扰流片模型共有 6 块，用铝合金平板加工而成，其中平板扰流片 1 块、尺寸为 400 mm ×10 mm ×1.5 mm；锯齿相对高度 d/h_1=0.19，0.33，0.46，

0.57、0.67 的扰流片 5 块，每块的实际面积折算成不开孔的平板扰流片高度均为 h=10mm。在锯齿扰流片横向测量了两个位置：①锯齿板的槽对着测压中心线，记为 A 位置。②锯齿板的尖峰对着测压中心线，记为 C 位置。自由来流速度为 20 m/s，基于平板扰流片高度的雷诺数 Re_h=1.26×10^4。在平板扰流片前后沿底部平板的中心线共开了 30 个测压孔。模型的尺寸如图 1 所示，锯齿扰流片的尺寸如表 1 所示。

30 个测压孔通过外径为 1.5 mm 的塑料测压管与 Hyscan2000 系统的电子扫描阀的压力扫描模块相连。在每次测量之前校准 Hyscan2000 系统的压力校准系数，测量的误差值大约为 0.0006PSI。

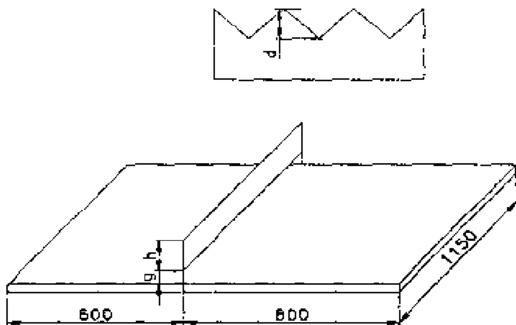


图 1　实验模型尺寸及布置（单位：mm）

表 1　锯齿扰流片的尺寸（单位：mm）

锯齿相对高度 d/h_1	0.19	0.33	0.46	0.57	0.67
锯齿高度 d	2.0	4.0	6.0	8.0	10.0
锯齿扰流片 h_1	11	12	13	14	15

2　实验结果与分析

2.1 平板扰流片引起的壁面压力分布

平均压力：平板扰流片紧贴底部平板时，自由来流在平板扰流片上游减速增压，在黏性力的作用下发生分离。从其压力分布图来看，在 $x/h\approx-6$ 的位置平均压力系数才开始快速增加。分离剪切层绕过平板扰流片上端后再附于平板扰流片下游的底板壁面上。在分离剪切层所包围的区域内形成两个回流区。在扰流片上游压力系数 C_p>0，下游回流区（$0\leqslant x/h\leqslant20$）压力系数 C_p<0，在 x/h>20 的区域压力系数又恢复到正值（图 2）。

脉动压力：在平板扰流片的上游 $x/h\leqslant-6$ 的区域流体紧贴底部平板运动，脉动压力仅为湍流边界层内的速度脉动引起，脉动压力系数 p'/q 大约在 0.008 左右（图 3）。在 $x/h\approx-6$ 处，脉动压力同平均压力一样开始稳定增加，大致上可以判定剪切层在此处分离抬高，导致脉动速度的增大。而后在平板扰流片的下游 x/h=1，6，22，38 的位置形成四个峰值，其中 x/h=22 处的值最大。结合扰流片平均压力的分布得知平板扰流片的再附点在 x/h=20 左右，从流动结构可以推测 x/h=1，6 应分别对应于回流区主涡和二次涡的最低位置，x/h=38 处较大的脉动则可能是剪切层再附后跳跃二次再附所造成的。

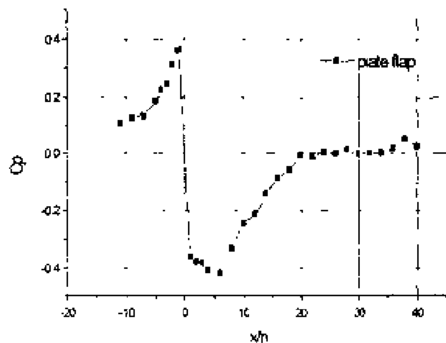


图 2　平板扰流片引起的壁面平均压力分布

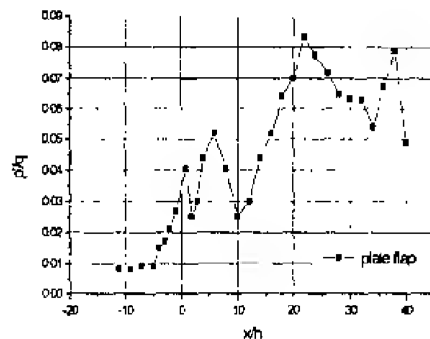


图 3　平板扰流片引起的壁面脉动压力分布

2.2 锯齿扰流片引起的壁面压力分布

平均压力：由图 4 可以看出，锯齿扰流片横向位置的变化对壁面的平均压力分布几乎没有什么影响。因此在研究锯齿高度对壁面平均压力分布影响时，可以不必考虑锯齿板的横向位置的变化，可认为是一个二维绕流问题。锯齿高度的增加可以使扰流片上游的压力系数略有增大，而使回流区内的压力系数略有降低（图 5），这说明在不改变扰流片的实际有效面积的前提下，可以通过加高锯齿的方法有效地改善回流区壁面压力分布特性。

脉动压力：图 6～7 给出了壁面脉动压力分布，从图中可以看出在扰流片的上游（$x/h \leqslant 0$），锯齿扰流片横向位置的变化对其脉动压力分布影响甚微。在扰流片的下游，脉动压力的分布与平板扰流片情形基本一致，唯一的区别是在 $x/h=10$ 处前者为极大值而后者为极小值，对此有待进一步深入研究。扰流片横向位置的变化主要影响再附点区域壁面脉动压力分布；另外

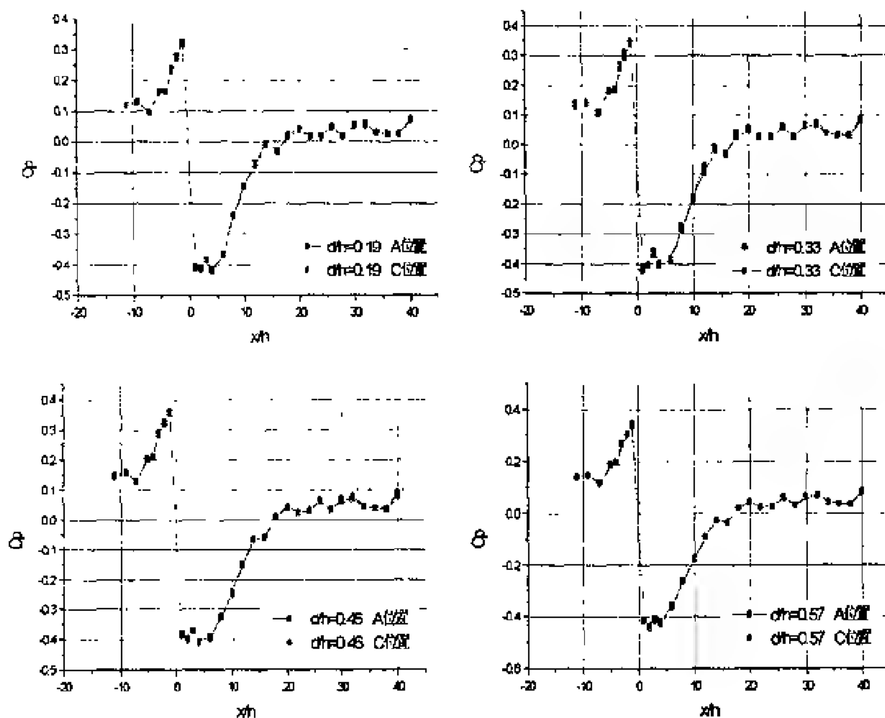


图 4　锯齿扰流片横向位置变化对壁面平均压力分布的影响

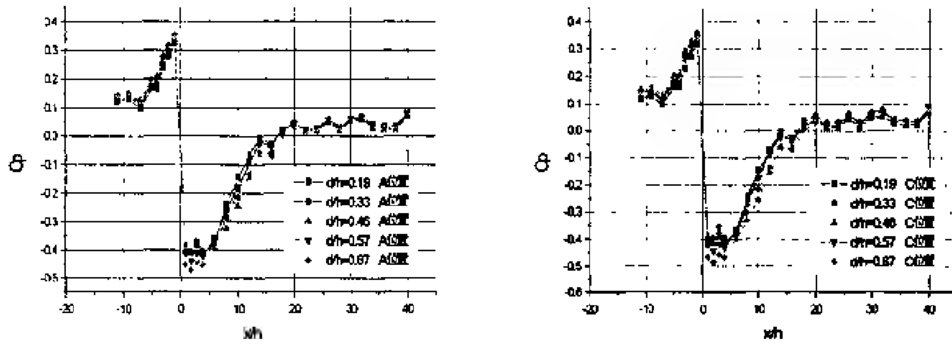


图 5 锯齿高度变化对壁面平均压力分布的影响

通过锯齿槽流向的压力脉动要比通过锯齿尖点流向的脉动大，并且随着锯齿高度的增加这种差异越来越小。锯齿高度的变化对扰流片上游和 $x/h\geq38$ 以后区域壁面脉动压力分布几乎没有影响；对于通过锯齿槽流向的壁面脉动压力，锯齿高度的影响主要在扰流片下游剪切层再附点以后的区域；对于通过锯齿尖点流向的壁面脉动压力，则影响 $0\leq x/h\leq38$ 的整个区域。

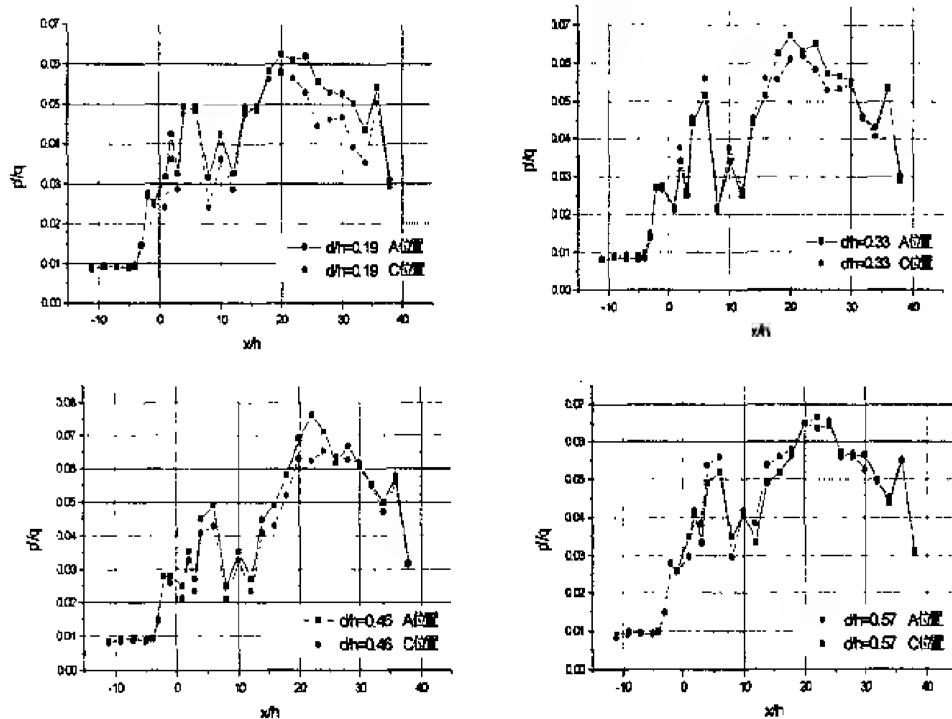


图 6 锯齿扰流片横向位置的变化对壁面脉动压力分布的影响

2.3 平板扰流片和锯齿扰流片引起的壁面压力分布的比较

平均压力：由平均压力分布图（图 8）可以看出，在下游很靠近扰流片的区域 $0\leq x/h\leq6$，锯齿扰流片所引起的平均压力要比平板扰流片的低，而在 $x/h\geq6$ 的区域则相反。在扰流片的上游，它们的平均压力的分布基本上一样。在扰流片下游，平均压力系数再次恢复到正值的位置比平板扰流片略有提前，约在 $x/h=18$ 的位置。

脉动压力：锯齿扰流片和平板扰流片壁面脉动压力分布比较如图 9 所示，与平板扰流片不同的是，在扰流片上游和下游两个明显峰值的结合部锯齿扰流片引起的压力脉动存在峰值。

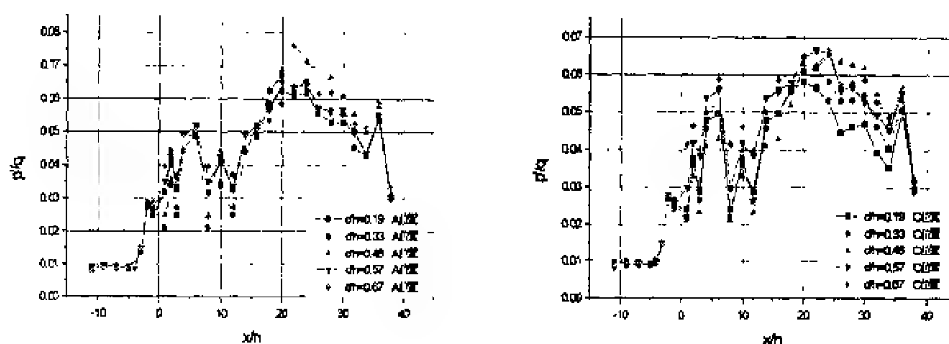


图 7　锯齿高度变化对壁面脉动压力分布的影响

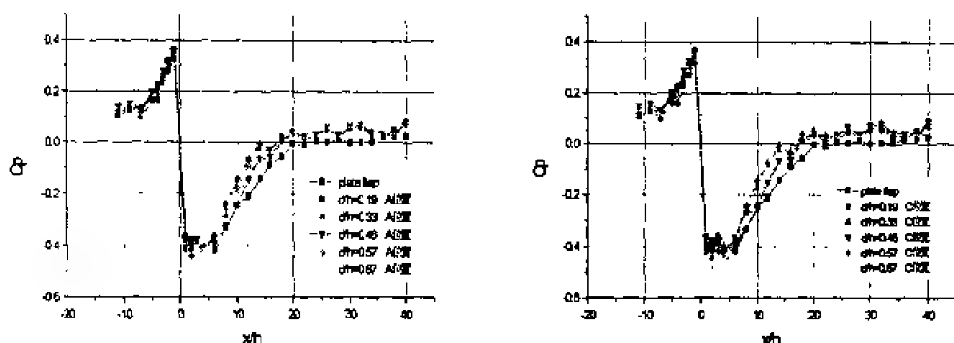


图 8　锯齿扰流片和平板扰流片壁面平均压力分布的比较

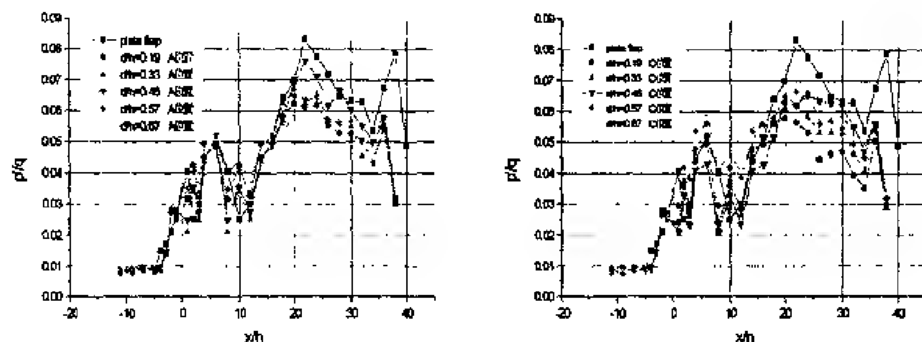


图 9　锯齿扰流片和平板扰流片壁面脉动压力分布的比较

而在 $x/h \geqslant 20$ 即再附点后的区域，锯齿扰流片可以明显减小脉动压力。对于回流区两者所引起的脉动压力相差不大，且它们在扰流片上游的脉动压力分布相同。

结合平均压力分布和脉动压力分布来看，锯齿扰流片上游边界层分离点和下游的再附点的位置和平板扰流片基本相同。采用锯齿扰流片可以减小扰流片下游的压力脉动，而对平均压力的分布影响不大。

3 结　论

实验结果表明平板扰流片和锯齿扰流片均在上游 $x/h=-0.6$ 处剪切层开始分离，并再附于下游 $x/h \approx 20$ 的位置。锯齿扰流片横向位置的变化对壁面平均压力分布几乎没有影响，但通

过锯齿槽流向的压力脉动一般大于通过锯齿尖点的流向的脉动。锯齿高度主要影响回流区的脉动压力，并可以降低扰流片下游壁面压力脉动。

参 考 文 献

1 Everitt KW. A normal flat plate close to a large plane surface. *Aero Quarterly*, 1982, 90~104

2 Yeung WWH, Xu C, Gu WD. Reduction of transient adverse effect of spoilers. *J of Aircraft*, 1997, 34(4): 479~484

3 Yeung WWH, Xu C. Separated flows around spoilers and forward-facing flaps. *J of Aircraft*, 1998, 35(1): 53~59

4 Fang FM, Wang DY. On the flow around a vertical porous fence. *J of Wind Eng and Industrial Aero*, 1997, 67&68: 415~424

5 Yaragal SC, Govinda RHS, Keshava MK. An experimental investigation of flow fields downstream of solid and porous fences. *J of Wind Eng and Industrial Aero*, 1997, 66: 127~140

6 Lee SJ, Kim HB. Laboratory measurements of velocity and turbulence field behind porous fences. *J of Wind Eng and Industrial Aero*, 1999, 80: 311~326

水气界面下低速条带统计特征和喷射行为 1)

王双峰　贾　复

(中国科学院力学研究所，北京 100080)

摘要　分析了剪切水-气界面下湍流低速条带的统计特征，包括条带平均间距和条带间距的展向分布等；对条带喷射现象进行细致的观测，给出了喷射流体的轨迹和速度分布。将这些结果与固壁湍流中的对应情形比较，揭示了水-气界面边界条件对条带结构的一些重要影响，也展现出剪切流中湍流结构特征的某些统一性。

关键词　剪切水-气界面，边界条件，低速条带，喷射，流动显示

引　言

在湍流边界层的近壁区(黏性次层和过渡层)内，存在着沿展向交替排列的低速和高速流体条带(streak)。这是固壁湍流的一个基本特征。经过 40 年持续而深入的研究，人们对条带结构的物理特征已经有了相当深入的了解[1, 2]。从动力学的角度讲，低速条带的重要性体现在它们是边界层中主要的湍动能产生事件——猝发(bursting)过程发生的地方，某种程度上，这一密切联系反映了湍流自我维持、湍流输运及壁面摩阻产生的物理机制。

液体-气体交界面是流体运动的另一种重要边界。这里的湍流运动直接影响地球流体环境中，大气与海洋、湖泊等水体之间的物质、热量和动量传输，也关系到化学工业中一些基本工艺过程效率的提高。另一方面，液气两相交界面具有明显不同于刚性固壁的特点。例如，在水流自由面附近，垂向湍流脉动受到抑制，而水平脉动分量却相反得到加强[3, 4](固壁对所有方向的流体速度脉动产生抑制)。研究这种边界附近湍流的特性，可以从新的视角考察湍流的结构特征。

和固壁湍流相比，对液气界面处湍流的研究起步要晚得多，现有的文献大部分是关于自由表面(界面上剪切应力等于零)与流场内湍流的相互作用(参见 Kumar 等[5]的评论)。1990 年，Rashidi & Banerjee[6]在明槽流动中观察了受气流剪切但无波动的水-气界面下的湍流结构，发现当界面上的剪切率足够大时，类似固壁湍流那样，在水面附近将出现流体条带和猝发等结构，无量纲化的低速条带平均间距和猝发周期也与固壁情况基本相同。但是，Rashidi & Banerjee 的实验中，由于水流较浅(小于3.5 cm)，水面湍流结构同时受到底部壁面上湍流边界层的影响。因此，水-气边界对湍流结构所起的作用是否等同于固壁尚不清楚，边界条件的影响仍是一个有待仔细探讨的问题。在水深足够大，排除了底边界干扰的条件下，Wang 等[7]初步观察和分析了产生于剪切水-气界面的湍流结构。结果表明，剪切是控制水面附近湍流结构的关键因素，界面剪切达到一定强度时，流动中相继出现湍流条带和猝发过程。

本文利用流动显示结果，考察了剪切水-气界面下低速流体条带的统计特征和喷射行为，并将结果与固壁湍流中的对应情形进行比较，讨论水-气界面这样一种边界条件对条带结构的影响。

1) 国家自然科学基金资助项目(No.19672070)

1 实验设备和方法

实验是在北京大学湍流研究国家重点实验室完成的。实验装置主要由循环式低湍流水洞和安装在水洞有机玻璃开口段上方的小型直流风洞组成。位于风洞出口的轴流风扇抽吸空气，在水流上方形成剪切气流，用变频调速器调节风机的输出功率，从而控制气流速度。实验段长(气流吹程) 3.5 m，断面尺寸为宽 0.4 m，高 0.85 m，其中水深约 0.38 m，气流通道高约 0.47 m。实验观察和测量断面距离气流进口 2.0 m。对该系统的详细描述可参见文献[7]。

实验中水流均匀流速 U_∞ 分别为 6.0 和 13.5 cm/s。气流方向与水流相反，均匀流速度 V_∞ = 1.70~3.53 m/s。在这样的风速范围内，水面上没有可觉察的表面波产生。为了确定交界面上的剪切条件，用热线风速仪(KANOMAX 1010)和单丝热线探头(KANOMAX 1026)精确测量了气流速度剖面，然后根据其对数分布特性和界面处两相剪应力相等的边界条件，就可求得水面上下两侧的摩擦速度 v_τ 和 u_τ(实验确定条带结构出现的临界剪切条件为 $u_\tau \approx 0.19$ cm/s)。实验条件列在表 1 中。

表 1 实验条件

U_∞ (cm/s)	V_∞ (m/s)	v_τ (cm/s)	u_τ (cm/s)	ν $\times 10^3$ (cm²/s)
6.0	1.74	5.80	0.20	8.63
6.0	2.09	7.57	0.26	9.05
6.0	2.72	10.7	0.37	9.38
6.0	3.12	12.6	0.43	9.17
13.5	2.26	10.8	0.39	8.55
13.5	3.25	14.6	0.50	9.72

采用氢气泡流动显示技术实现条带结构的可视化。直径 30 μm，长约 13.5 cm 的铂丝保持与水面平行并垂直流动方向，它作为电解过程中的阴极，在脉冲直流电压的作用下，产生氢气泡时间线。用普通片光(厚约2.0 cm)沿水平或垂直方向照亮氢泡，对水平平面和垂向平面内的氢气泡显示图案，分别进行俯视和侧视观察，同时用 CCD 摄像机(25 帧/s)记录。获得的图像资料可进一步回放分析，也可输入计算机中，作更细致的检查和定量处理。

2 实验结果和讨论

2.1 低速流体条带的统计特征

低速流体条带的展向间距 λ 根据流动显示的俯视记录图像确定。对不同的实验条件和氢泡发生线深度，至少 6000 帧(4min)的资料被记录下来，从中以 1.2s (30 帧)的间隔选取 70~100 幅图像，用于条带展向分布的统计分析。所用图像数量将保证低速条带的统计样本大于 300，条带间距样本大于 230。低速条带的判别方法和标准如下：相邻高速、低速条带的动量通量之比至少达到 2:1，即 $u_{low}/u_{high} < 0.7$；条带纵向长度超过 $\Delta x^+ (= \Delta x u_\tau / \nu) = 100$；低速条带的展向位置是指它们在氢气泡发生线下游 $\Delta x^+ = 50$ 处的坐标，如果其上游端离开氢泡线超过 $\Delta x^+ = 50$，则不被计算在内；条带间距没有最小值限制，只有当两个低速条带完全合并，之间没有明显的高速流区时，才会被看成是一个条带。

图 1 给出了四种剪切强度下，不同水深位置处无量纲化的条带平均间距 $\overline{\lambda^+} = \overline{\lambda} u_\tau / \nu$ 的结果。在所考察的实验条件和水深范围内，$\overline{\lambda^+}$ 随无量纲水深 y^+ 单调增大，变化规律与界面上的切应力大小无关，可表示为

$$\overline{\lambda^+} = 1.76\, y^+ + 61 \tag{1}$$

在固壁湍流边界层的黏性次层内($y_w^+ \le 5$，下标 w 表示用壁面摩擦速度 $u_{\tau,w}$ 和 ν 无量纲化)，低速条带平均间距 λ_w^+ 对相当宽的 Reynolds 数范围保持约为 100 的常数；在 $5 < y_w^+ < 30$ 的过渡区，λ_w^+ 随着 y_w^+ 的增大而增大，增长速率与 $\overline{\lambda^+}$ 相对 $\overline{y^+}$ 的情形近似[2]。由此可见，作无量纲化处理后，对于相同的 y^+ 和 y_w^+ 坐标，条带平均间距 $\overline{\lambda^+}$ 明显比 λ_w^+ 小，即与湍流边界层相比较而言，剪切水–气界面附近低速条带的展向分布更密集。Shu & Liu[8]在研究柔性壁面附近湍流边界层的相干结构时，发现 $y_w^+=10$ 处 $\lambda_w^+ \approx 82$，显然与人们熟知的固壁湍流的结果不同，与上面所得剪切水-气界面的情形却很接近。这是边界条件影响湍流结构的又一实例。

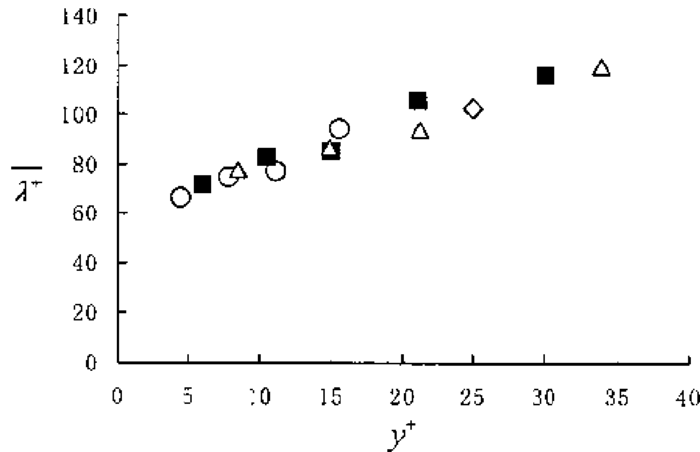


图 1 无量纲条带平均间距随水深的变化：
○，u_*=0.20 cm/s；■，u_*=0.26 cm/s；△，u_*=0.37 cm/s；◇，u_*=0.43 cm/s

Smith & Metzler[2]和 Nakagawa & Nezu[9]认为，在壁面湍流中，条带展向间距是呈对数正态分布的。对本文的研究，这种形式的概率密度函数可写成

$$P(\lambda)=\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\psi_0}\ln\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2\right]}{\lambda\psi_0(2\pi)^{1/2}} \tag{2}$$

其中

$$\lambda_0=\overline{\lambda}(1+\psi_\lambda^2)^{-1/2}, \qquad \psi_0=[\ln(1+\psi_\lambda^2)]^{1/2}$$

λ_0 表示 λ 的中值，ψ_0 是 $\ln\lambda$ 的变异系数，$\psi_\lambda=\sigma_\lambda/\overline{\lambda}$ 是 λ 的变异系数，σ_λ 为 λ 的标准差。为了检验剪切水–气界面附近低速条带间距的对数正态分布性质，把六个条带间距分布直方图的数据重新整理，计算 λ 的概率分布

$$F(\lambda)=\int_0^\lambda P(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{3}$$

以 $\log(\lambda/\overline{\lambda})$ 为横坐标，在图 2 中给出了条带间距的对数正态概率图。图中同时也画出了 $\psi_\lambda=0.52$ 的对数正态分布函数，以便比较。虽然在分布曲线两端(F<5%和 F>99%)，有少量直方图数据点偏离了对数正态性质，在大部分中心区域，二者吻合的程度十分理想；如果再考虑到统计样本和展向观察窗口都是有限大小的，对数正态概率分布确实能够令人满意地代表条带间距直方图的形状和特征，在 $4.5 \le y^+ \le 34$ 的区域内，完全可以作为低速条带间距的模型。

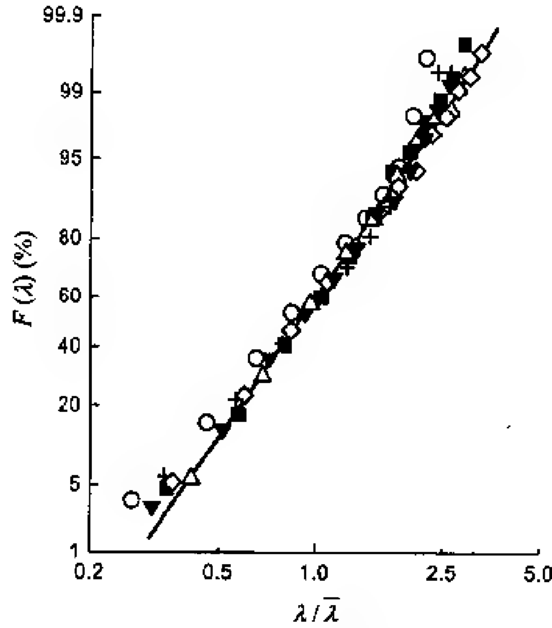
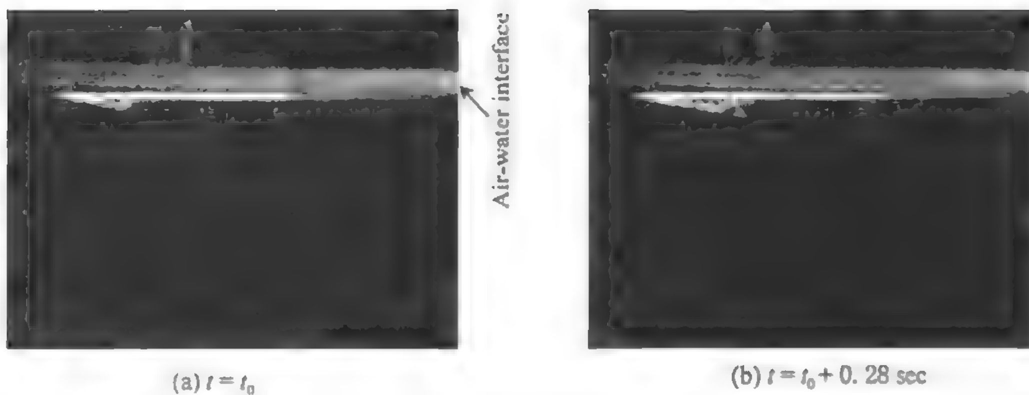


图 2 低速条带展向间距的对数正态概率图：——，对数正态分布，$\psi_\lambda = 0.52$；
○，$u_\tau = 0.20$ cm/s，$y^+ = 4.5$；■，$u_\tau = 0.37$ cm/s，$y^+ = 14.8$；Δ，$y^+ = 6.0$；□，$y^+ = 10.5$；+，$y^+ = 21$；▼，$y^+ = 30$（Δ、□、+、▼：$u_\tau = 0.26$ cm/s）

2.2 低速条带的喷射行为

侧视观察表明，低速条带出现后，大部分时间里作为一个整体保持相对的平静，同时非常缓慢地离开水-气界面下侵。当随机发生的猝发过程出现时，低速条带的某一小部分突然向下抬起，“引领”条带沿清晰可辨的轨迹向水流深处快速迁移。同时，条带剧烈地扭曲、拉伸和破碎，失去原有的相干特征。图 3 是氢气泡显示的一个喷射过程的初期形态，原本平直、安静的条带正迅速抬起。一个完整的条带破碎过程，即通常所说的猝发可能仅仅包含一次喷射，更常见的情况是它们由多个离散的喷射构成。



(a) $t = t_0$　　(b) $t = t_0 + 0.28$ sec

图 3 氢气泡显示的低速条带喷射的初期形态　水流方向从左向右

从流动显示图像的记录中，以 0.16s (4 帧)的间隔选样输入计算机，用于确定喷射流体前锋的轨迹和速度。

不同喷射的起始位置和达到的深度有显著差别，轨迹之间的变化相当大。但是，如果考虑足够大的样本，却可以得到稳定的平均喷射轨迹。图 4 是 50 个喷射事件的平均轨迹和最可几轨迹。从中可以看到，平均轨迹基本为直线，与水面成 1:4.2 的斜率，平均轨迹与最可几轨迹的位置非常接近。在湍流边界层中，Kline 等[1]得到的喷射“涡”的平均轨迹可用直线表示，它相对壁面的斜率约为 1:12.5，显然小于本文研究的剪切水–气界面的情况。这就是说，水–气界面下的喷射发生时，低速流体离开边界向外区流动迁移的趋势更强烈。

在向水面剪切层外边缘运动过程中，喷射流体的平均速度如图 5 所示。开始阶段，垂向速度 V_e 不断增大，在 $y^+\approx 35$ 的位置达到最大值 $V_e = 3.38u_\tau$ 之后逐渐减小。流向速度 U_e 在喷射初期也随着 y^+ 增大。不过，从图 5 的结果可以清楚地看到，在 $y^+\geq 42$ 的区域 U_e/u_τ 几乎保持常值 13.8。在所考察的流场范围内，喷射体的运动速度始终小于当地平均流速，$U_e/U(y)$ 的最大值发生在 $y^+=42$，约为 0.65。这些结果表明，起源于水面近区的喷射流体将在相当长的距离上保持其低速特点，与主流的完全掺混是一个比较缓慢的过程。据 Kline 等[1]的观测，在固壁湍流边界层的条带猝发现象中，喷射流体在对数区($y_w^+ > 40$)的速度基本不变，约为 $13.8u_{\tau,w}$。这与上面得到的剪切水–气界面附近的结果极为接近。但是以平均流速为参考，发现在水面剪切层的远区喷射速度大约为平均流速的 60 %，而边界层中喷射体的外区速度约等于 80 %的平均流速，明显大于前者。

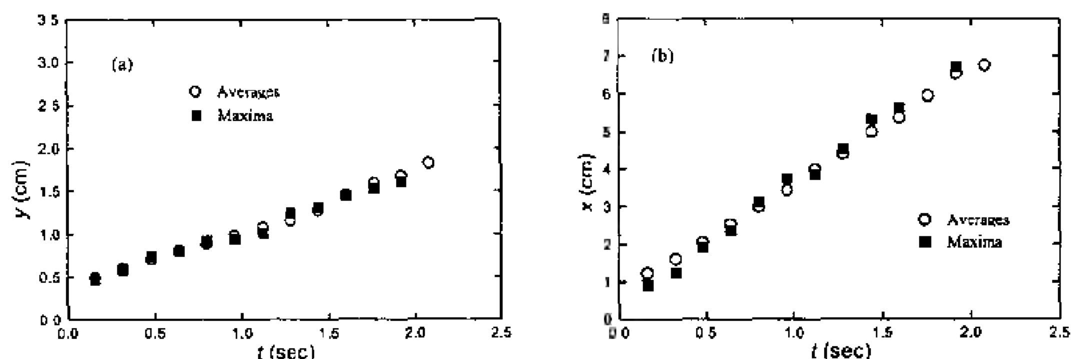


图 4 喷射流体的平均和最可几轨迹

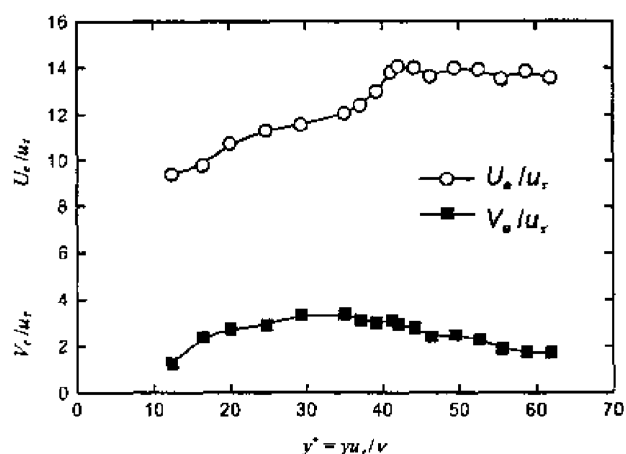


图 5 喷射流体的平均速度

3 结 论

本文分析讨论了剪切水-气界面下低速流体条带的主要统计特征和条带喷射现象的基本规律。与固壁湍流相比，水-气界面边界条件显著地改变了低速流体条带的一些特征，这包括：无量纲化的条带平均间距 $\overline{\lambda^+}$ 明显比 λ^+_w 小，即低速条带的展向分布更密集；喷射过程中，低速流体离开水面向外区迁移的趋势更强烈；喷射流体的运动速度与平均流动速度的关系有所改变。

另一方面，剪切水-气界面附近的低速条带又表现出诸多与固壁情况相同或近似的地方：条带结构的外貌、喷射形态在两种边界处基本一样；条带平均间距随 y^+ 或 y^+_w 增长的规律相近，条带间距的统计分布都很好地符合对数正态性；喷射流体的轨迹和速度分布有相近之处。这些从一个侧面反映了剪切流中湍流结构的普遍特性。

致谢 实验工作得到北京大学湍流研究国家重点实验室的大力支持，在此表示感谢。

参 考 文 献

1 Kline SJ, Reynolds WC, Schraub FA, Runstadler PW. The structure of turbulent boundary layers. *J Fluid Mech*, 1967, 30: 741~773

2 Smith CR, Metzler SP. The characteristics of low-speed streaks in the near-wall region of a turbulent boundary layer. *J Fluid Mech*, 1983, 129: 27~54

3 Dickey TD, Hartman B, Hammond D, Hurst E. A laboratory technique for investigating the relationship between gas transfer and fluid turbulence. In: Brutsaert W, Jirka GH ed. Gas Transfer at Water Surfaces. Reidel, 1984. 93~100

4 Komori S, Ueda H, Ogino F, Mizushina T. Turbulence structure and transport mechanism at the free surface in an open channel flow. *Int J Heat Mass Transfer*, 1982, 25(4): 513~521

5 Kumar S, Gupta R, Banerjee S. An experimental investigation of the characteristics of free-surface turbulence in channel flow. *Phys Fluids*, 1998, 10(2): 437~456

6 Rashidi M, Banerjee S. The effect of boundary conditions and shear rate on streak formation and breakdown in turbulent channel flows. *Phys Fluids*, 1990, 2(10): 1827~1838

7 Wang SF, Jia F, Niu ZN, Wu ZZ. An experimental study on turbulent coherent structures near sheared air-water interface. *Acta Mechanica Sinica*, 1999, 15(4): 289~298

8 Snu W, Liu WM. The effect of compliant coatings on coherent structure in turbulent boundary layers. *Acta Mechanica Sinica*, 1990, 6(2): 97~101

9 Nakagawa H, Nezu I. Structure of space-time correlations of bursting phenomena in an open-channel flow. *J Fluid Mech*, 1981, 104: 1~43

水洞中湍流边界层流场与噪声实验研究

罗柏华　刘宇陆
(上海大学 应用数学和力学研究所，上海 200072)

摘要　在水洞中进行了水翼湍流边界层流场与噪声的实验。对不同流速、不同攻角、以及光滑和粗糙翼面的情况测量了水翼边界层附近的湍流脉动速度场；测量了翼型内部测点的噪声及外部辐射噪声。试验发现，来流速度、水翼攻角、翼面粗糙度对翼型边界层湍流速度场有显著影响，15°攻角时，翼面附近的湍流强度要比0°时大得多，粗糙翼面附近的湍流强度比光滑的要大，而湍流强度随来流速度的变化不大；一般地，翼内部噪声及外部噪声都是随来流速度的增大而增大，随攻角的增大而增大，粗糙翼面的结果要比光滑翼面的大。从噪声测量结果与相应的流场测量比较可知，尽管理论分析表明噪声源取决于湍流脉动速度对时间的二次导数(这在实验中是难于直接测量的)，但仍然可以从湍流区域的湍流强度判断出声源强度的定性变化。

关键词　湍流噪声，边界层湍流，流动噪声

引　言

湍流边界层的流动噪声问题在实际中经常碰到，如航空飞行器的机体湍流边界层噪声；鱼雷、潜艇的边界层噪声等等。此类研究始于50年代，由于问题复杂，研究进展缓慢。早期大量是测定流线体、平板和管道中与湍流边界层有关的壁压力脉动的各种性质，主要研究的是边界层的近场特性，即伪声场区；对边界层辐射噪声的实验研究很少。Kraichnan[1]首先估算了平面边界层壁面压力脉动的均方值频谱；湍流边界层噪声理论研究基本上都基于Lighthill声类比方程[2]及其推广的含固体边界的Curle方程[3]，研究结果多是量级估算和定性分析。本文将简述水洞中对翼型边界层湍流流场及噪声实验研究的主要结果。

1　实验设备及实验模型

实验是在上海交通大学的重力式水洞中进行的，水流速度范围为0~10m/s。重力式水洞的本底湍流度及流动噪声较小，可以满足边界层流动噪声测量的要求。试验段及水翼模型如图1所示。试验段截面为矩形，为有机玻璃材料，激光从试验段侧壁射入进行激光测速。对称水翼弦长为129.65mm，最大厚度为30mm，为NACA0020翼型。翼型可变攻角，有0°，8°，15°三种情况。翼型内部开一圆柱形孔，孔内安装一个B&K8103式水听器，用来测量翼型内部感受的噪声，孔内注水充满。在试验段一面侧壁的外部靠下游处，安装一个方形水箱（其

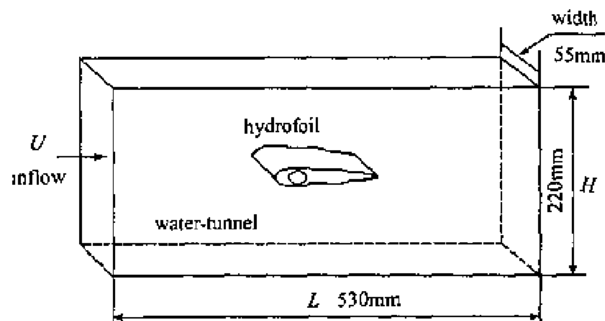


图1　水洞试验段及水翼模型

一面为试验段侧壁），箱内充满水，内置一个 B&K8105 水听器测量水洞的背景噪声（无模型时）及水翼的辐射噪声。粗糙度是在翼型表面粘贴圆柱型小粗糙元实现的，粗糙元直径 2mm，高 1mm，同行元间距为 8mm，交错行距为 4mm。

激光测速仪由氦氖激光器与 TSI 公司的 IFA755 型分析仪组成，采用 TSI 公司的 FIND 软件，可以得到湍流脉动速度信号的各种特征量。噪声测量采用 B&K8103 水听器（翼内）和 B&K8105 水听器(外部)，水听器信号经过 B&K2636 测量放大器，进入 CF350 信号分析仪。

2 实验内容及实验结果分析

湍流边界层流场一维激光速度测量有：

光滑及粗糙翼型：0° 攻角，(a) 来流 4.0m/s，测量翼面上方 7 个剖面的脉动速度。(b) 不同流速下翼型后部边界层内两点处脉动速度测量。

光滑及粗糙翼型：15° 攻角，(a) 来流3.5 m/s，翼面附近 10 个剖面的脉动速度测量。(b) 不同流速下翼型后部边界层内三点处脉动速度测量。

二维激光测量：光滑翼型 0 攻角时不同流速下翼型后部边界层内 2 点脉动速度测量(u 方向和 v 方向)。空水洞不同流速下试验段中间一点处脉动速度测量(u 方向和 v 方向)。

边界层噪声测量：空水洞，不同流速（2~7m/s）下外部水听器 BK8105 测量水洞的背景噪声。光滑及粗糙翼型，0°，8°，15° 攻角，不同流速（2~7m/s，间增 0.5 或 1m/s）下，测量水翼内部（B&K8103）及水洞外部（B&K8105）噪声。

2.1 平均速度场

从所测量的四个情况下翼型的平均速度场（只测量了若干个剖面）可以看出，0° 攻角时，光滑翼型的边界层厚度较小，流动基本上为附翼面流动，没有分离；而光滑翼型在 15° 攻角时，在上翼面后上方，存在明显的分离区；0° 攻角时，粗糙翼型的边界层厚度要比光滑时的大，而粗糙翼型在 15° 攻角时，在上翼面后上方，同样存在明显的分离区，而且分离区域要比同样情况下光滑水翼后的分离区大。图 2 给出了部分结果。

2.2 湍流强度

从四种情况下的水翼附近的湍流强度分布(图 3 中水平线段的长度表示湍流强度的大小，线段左起点为测量点位置，只列出部分结果)，可以看出，0° 攻角时，光滑翼型的湍流强度较小，而且湍流强度大的区域基本上在附翼面的后半部分，且该区域很小；而光滑翼型在 15° 攻角时，在上翼面后上方，湍流强度大大增加，最大值达到 0° 时的 5~6 倍，与对应的速度剖面图比较可以看出，湍流强度的最大值在翼面上方分离剪切层的位置上。0° 攻角时，粗糙翼型的湍流强度要比光滑翼型的大，而粗糙翼型在 15° 攻角时，在上翼面后上方，湍流强度也明显增大，而且湍流强度较大的区域要比同样情况下光滑翼型后的大。

对水洞前方来流速度剖面及湍流强度的测量表明，洞壁边界层厚度很小，湍流强度值也很小，（具体数值不列举），这说明翼型前方来流的边界层与翼型本身的边界层相比是影响较小的，基本上可以忽略其影响。对不同速度下，上述不同情况中边界层内相同点的脉动速度测量可知，边界层上同一点的湍流强度随来流速度的变化不大，基本上为常数值（但数值随测量点而不同）。从测量可知来流的湍流强度以及水洞本底的湍流强度比模型附近区域的湍流强度小得多。通过对光滑翼 0 攻角时不同流速下翼型边界层内二点处脉动速度二维激光测量、以及空水洞不同流速下试验段中间一点处脉动速度的二维激光测量，可以发现流向速度 u 和垂向速度 v 的脉动量级基本相当，一般是 u 方向的湍流强度略大。

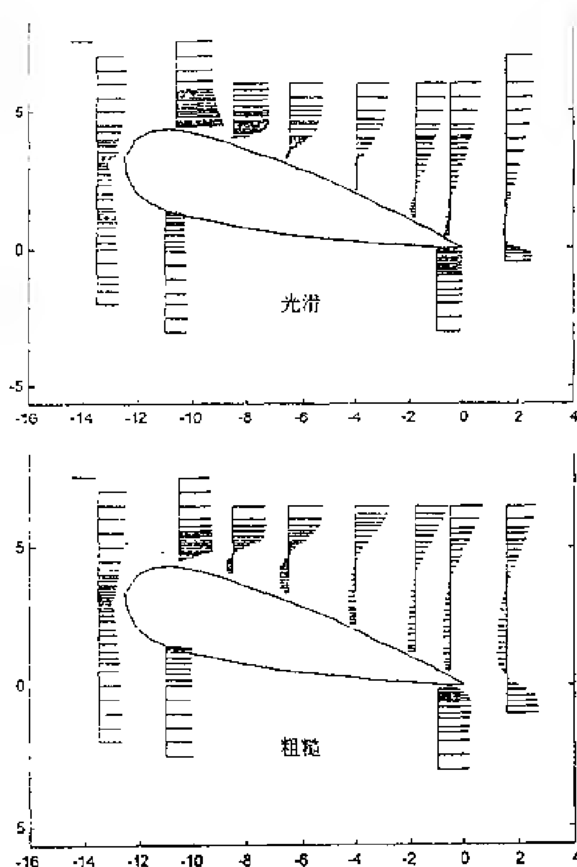


图2 平均速度场（15°攻角，3.5m/s）

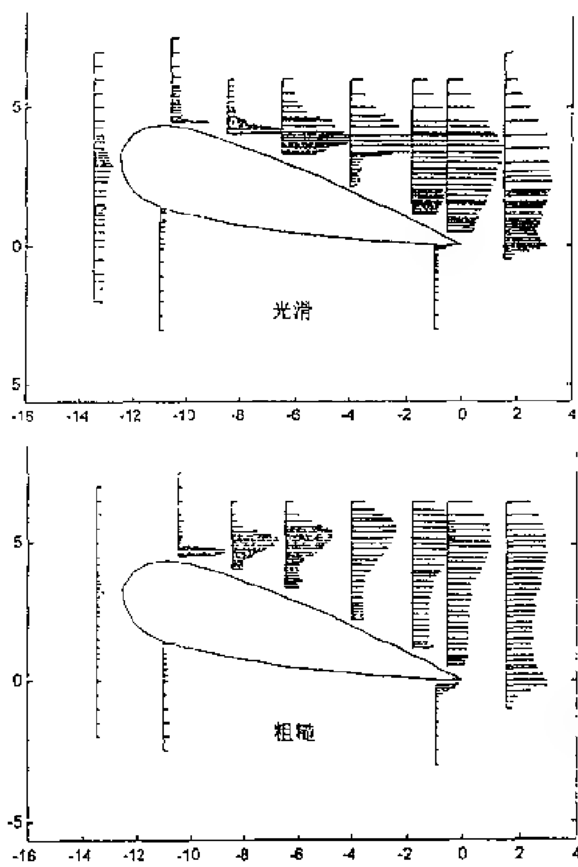


图3 湍流强度分布（15°攻角，3.5m/s）

2.3 噪声测量结果及分析

对空水洞测量了其背景噪声，所测结果是为了与模型实验结果进行比较。从空水洞在不同速度下背景水听器 B&K8105 测得的噪声谱可以看出，总的背景声压级基本上是随速度的增大而增大。背景噪声谱上在 2kHz 以下的低频部分有很高的值，而且总声压级也取决于这个低频部分，在后面有模型时的实验结果中，这个低频部分也仍然存在，这要是由水洞背景噪声引起的，因此在分析比较模型实验结果时，需注意这个情况。从所有模型试验的结果可知，有模型时外部噪声结果都比相同流速下空水洞时的背景噪声谱值要大（在 2kHz 以上高频部分），这说明本文实验结果反映出了模型的影响。

光滑、粗糙翼型，0°，8°，15°攻角下，水翼内部（B&K8103）和水洞外部噪声（B&K8105）的测量结果，在宽频上都是随速度增大噪声谱值也增大。从 0°，8°，15°攻角下相同流速的测量结果可以看出攻角的影响：水翼内部（B&K8103）和水洞外部噪声（水洞外 B&K8105 测量）的结果总的来说，随攻角的增大，噪声谱值也增大，特别是在 2kHz 以上的高频段上（而在低频某些频率处，有时谱值也可能下降，甚至导致总声级较小）。

从各种流速的 0°，8°，15°攻角下光滑与粗糙翼型翼内部（B&K8103）和水洞外部噪声（水洞外 B&K8105 测量）的测量结果比较可以看出翼面粗糙度的影响：在 2~20kHz 高频

段上粗糙的基本上要比光滑的噪声谱值更大，在 0° 攻角下粗糙翼与光滑翼的结果相差较大，而15° 攻角时，由于此时此时分离区的影响占主导，因此粗糙翼面的影响不是特别显著。图 4~8 列出少量噪声测量结果。

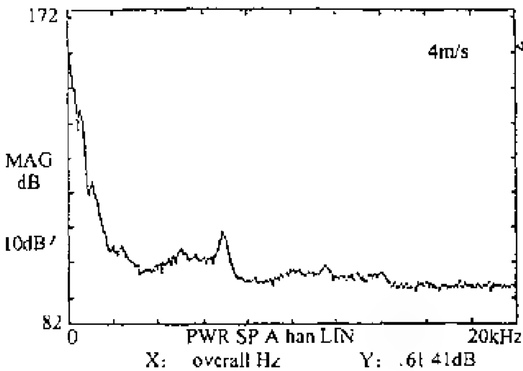


图 4 空水洞背景噪声（B&K8105）

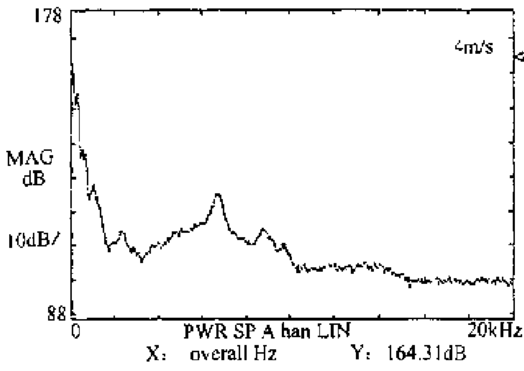


图 5 光滑翼 0° 攻角辐射噪声谱（B&K8105）

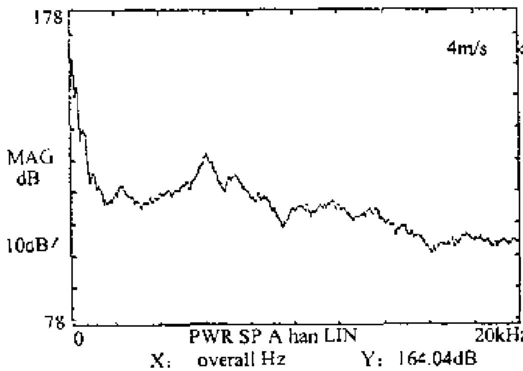


图 6 光滑翼 15° 攻角辐射噪声谱（B&K8105）

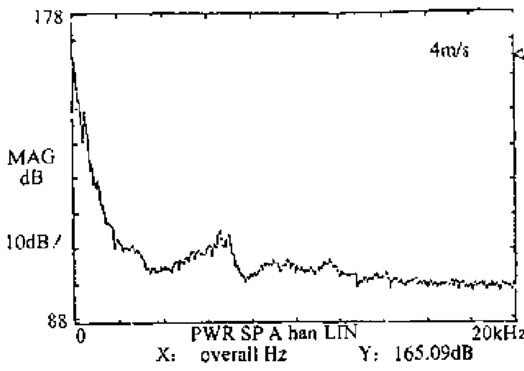


图 7 粗糙翼 0° 攻角辐射噪声谱（B&K8105）

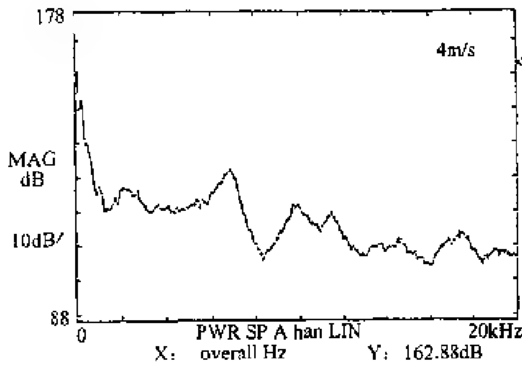


图 8 粗糙翼 15° 攻角辐射噪声谱（B&K8105）

总之，翼型内部噪声及外部噪声的总趋势是随来流速度的增大而增大，随攻角的增大而增大，粗糙翼面的结果要比光滑翼面的大。

目前边界层噪声理论研究基本上都基于 Lighthill 声类比方程[2]及其推广的含固体边界的 Curle 方程[3]，结果限于量级估计及定性分析，对主要声源机理有各种不同的假设，如壁面脉动压力偶极子源或湍流雷诺应力四极子源，因而有不同的结论。比如，Haddle 和 Skudrzyk[4] 认为湍流应力张量辐射的噪声可由分布的四极子声源来表示，其辐射声场压力正比于湍流脉动速度对时间的二次导数。Lauchle[5] 则认为小 M 数边界层中，脉动壁面剪切应力假设为主

要的噪声源，即噪声源主要在转捩区，用 Curle 积分方程的偶极子项来考虑。Hardin[6] 考察了低马赫数 M 下湍流边界层产生噪声的声源，表明声源本质上是四极子源，认为偶极子源在理论上可以忽略。此外，还有许多关于边界层噪声方面的理论探讨。

由于问题复杂，到目前为止对边界层噪声的各种机理及其重要性至今没有定论。尽管如此，其中仍有较为公认的一些结论，比如，通常认为，壁面脉动压力（偶极子源）及湍流雷诺应力（四极子源）都可能是湍流边界层噪声的源项，四极子声源的强度正比于湍流脉动速度对时间的二次导数，而壁面偶极子源的强度取决于壁面的应力脉动。从我们的实验结果可以看出，来流速度、水翼攻角、翼面粗糙度对辐射噪声有很大影响，翼内部噪声及外部噪声的高频部分都是随来流速度的增大而增大，随攻角的增大而增大，粗糙翼面的结果要比光滑翼面的大，这些结论基本上与已有的边界层噪声理论分析是一致的，因为从相应的流场测量可以看出，在来流速度大、攻角大、有粗糙的情况下，边界层附近的湍流脉动要更大，导致壁面压力脉动及辐射噪声更大。相应的边界层流场测量也有同样的趋势，从噪声测量结果与相应的流场测量结果比较可知，尽管边界层噪声的理论分析表明，对湍流边界层的四极子声源噪声辐射，即为湍流应力张量的辐射噪声，其辐射声场压力正比于湍流脉动速度对时间的二次导数，而这在实验中是难于直接测量的，但在实际中仍然可以从湍流区域的湍流强度判断出声源强度的定性变化。

3 结 论

实验测量了水翼边界层附近的湍流脉动速度场与其辐射噪声。试验结果发现，来流速度、水翼攻角、翼面粗糙度对翼型边界层湍流速度场有显著影响，对辐射噪声也有很大影响。15°攻角时，翼面附近的湍流强度要比 0° 攻角时大许多，粗糙翼面附近的湍流强度比光滑翼面的要大，而同一点湍流强度随来流速度的变化不大。来流速度、水翼攻角、翼面粗糙度对辐射噪声也有影响，一般地，翼内部噪声及外部噪声（尤其是 2kHz 以上高频部分）都是随来流速度的增大而增大，随攻角的增大而增大，粗糙翼面的结果要比光滑翼面的大。从测量结果可知，可以从湍流区域的湍流强度判断出声源强度的定性变化。

致谢　感谢上海交通大学鲁传敬、单雪雄、姜辑、朱蓓丽等老师在实验中的大力帮助。

参 考 文 献

1　Kraichnan RH. Pressure fluctuations in turbulent flow over a flat plat. *J Acoust Soc Am*, 1956, 29: 378~390

2　Lighthill MJ. On sound generated aerodynamically, Ⅰ General theory. *Proc Roy Soc*, VA211, 1952. 564~587

3　Curle N. The influence of solid boundary upon aerodynamica sound. *Proc Roy Soc*, VA231, 1955. 505~514

4　Haddle GP, Skudrzyk EJ. The physics of flow noise. *J Acoust.Soc Am*, 1969, 46(1): 130~157

5　Lauchle GC. Noise generated by axisymmetric turbulent boundary layer flow. *J Acoust.Soc Am*, 1977, 61(3): 694~703

6　Hardin JC. Acoustic sources in the low mach number turbulent boundary layer. *J Acoust.Soc Am*, 1991, 90(2), pt1: 1020~1031

双三角翼翼身组合体翼面分离流和边界层转捩的测量

卞於中　桂　兵　范洁川
(中国航空工业空气动力研究院，哈尔滨 150001)

摘要　给出了双三角翼翼身组合体翼面上的流动情况测量。表面油流实验给出了不同攻角下不同速度时的翼面流态。激光片光显示给出了同一速度下不同攻角时，不同模型截面处的流动情况。贴在模型翼面上的表面热膜测量了翼面上在不同攻角下不同速度时不同翼面位置表面边界层内的流动情况以及移动热膜测量的翼面上边界层转捩的情况。根据表面油流流谱、激光片光显示以及表面热膜测量可以判断翼面上流动分离以及涡形成、发展和破碎的情况，可以了解翼面上边界层转捩的情况。

关键词　双三角翼，分离流，涡流，边界层

前　言

关于双三角翼翼身组合体表面上流动情况的研究已有许多实验和理论的结果。为了将已成功用于二维和三维单独翼面上边界层测量技术——表面热膜技术[1]用于翼身组合体翼面边界层和分离流的测量，选择了一简单的 70°/45° 双三角翼翼身组合体模型。用该模型在 FL-5 风洞中分别作了表面油流流谱实验、激光片光显示实验以及表面热膜测量实验，并对实验中得到的结果进行了分析讨论和比较，以便对所选模型的流动情况有所了解，为表面热膜技术在类似于该模型上的正确应用摸索经验。

1　实验设备和模型

实验所用风洞是 627 所的 FL-5 风洞，该风洞为开口回路式，试验段截面尺寸为 Φ 1.5m，最大风速为 57m/s，风洞湍流度为 0.18%。热膜测量使用热线风速仪，激光片光显示用激光片光系统。

模型为简单的 70°/45° 双三角翼翼身组合体，如图 1 所示。

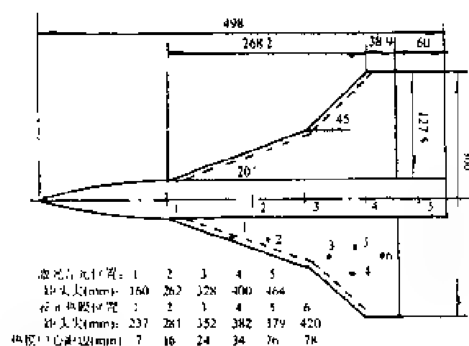


图 1　模型简图

2　实验结果及讨论

模型实验攻角为 0°，2°，4°，6°，8°，10°，15°，20°。不同攻角下风速为：$\alpha=0°$ 和 2° 时，$v=30$ 和 40 m/s，$\alpha=4°$ 时，$v=10$，20，30 和 40 m/s。$\alpha=6°\sim20°$ 时，$v=10$ 和 30 m/s。

2.1　油流流谱实验

$\alpha=0°$，$v=30$ 和 40 m/s 时，油流线是顺流方向的，在内翼(70° 后掠)前缘有一无油的层流边界层的高剪切区，翼根处的后部，由于机身的影响，油流线向外偏斜，但比较缓和。在外翼(45° 后掠)的前缘，有气泡存在。$\alpha=2°$，$v=30$和 40 m/s 时，在内翼前缘出现了层流分离气泡分离线，在外翼前缘不仅存在气泡分离，而且形成了油吹区或edd 涡流线区，该区存在于油积聚线即分离线和再附线之间。$\alpha=4°$，$v=10$ m/s 时，内翼前缘已分离形成分离涡，二次分

线在机翼折点处转折后延伸至翼面尾部，靠机身处的再附区，由于机身的影响流线向外偏斜，再附线与二次分离线之间的区域为横流区。前缘与二次分离线之间区域内的流动类似于气泡内的分离流动，有人也称之为气泡区。外翼前缘已分离形成旋涡，在翼面上同时存在前翼涡的延伸区、不强的折点涡、外翼面涡、后翼前缘气泡涡以及翼梢涡等。$v=20$，30和40 m/s时，翼面上的流态与10 m/s时不同的是靠机身的翼面再附区变成了湍流区。分离线的位置基本不随速度变化。$\alpha=6°$，$v=10$和30 m/s时，内翼涡和外翼涡都变强。内翼涡的二次分离线在内外翼折点处变得光滑地延伸到翼面后缘。外翼涡的二次分离线由折点处基本成直线延伸至翼面尾部$\alpha=8°$与$\alpha=6°$的差异在于内翼涡的二次分离线略向外偏斜，而外翼涡的二次分离线略向内偏斜。$\alpha=10°$，$v=10$ m/s时，从翼面上的流谱可以看出内翼涡的二次分离线进一步向外偏斜，两分离线之间的横流区变小，在翼后缘存在倒流区。$v=30$ m/s时，内翼前缘涡在外翼中部位置已破裂，分离线后部成喇叭状并影响外翼前缘涡。$\alpha=15°$，$v=10$ m/s时，内翼前缘涡与外翼前缘涡在翼面尾部互相绕合。$v=30$ m/s时，内翼前缘涡在折点处已开始破裂，破裂涡开始与外翼涡绕合在一起。$\alpha=20°$，$v=10$ m/s时，内翼涡在折点稍后处开始破裂，并与外翼涡相绕合。$v=30$ m/s时，内翼涡在折点处已开始破裂，并与外翼涡绕合成一个涡。图2给出了$\alpha=4°$和10°时的流谱。

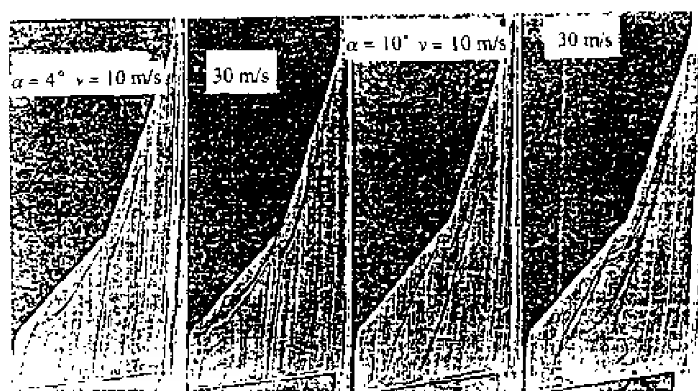


图 2　$\alpha=4°$和 10°时的流谱

从上可以看出，双三角翼翼身组合体模型当攻角由小变大时，从三角翼翼面上涡的形成和发展过程，由$\alpha=0°$，在内外翼前缘出现高剪区到$\alpha=2°$时内外翼前缘出现气泡分离，再到$\alpha=4°$时内外翼前缘分离出现分离涡，该分离涡随攻角增大而变强直至$\alpha=10°$，大风速时内翼涡开始破裂，到20°时内外翼涡在翼面后部绕合在一起。同时也可以看出，在同一攻角下，翼面上的流动也受速度的影响，攻角越大，这种影响越明显。

2.2 激光片光显示实验

为了解双三角翼翼身组合体模型表面上的空间流动情况，用激光片光技术对模型上5个截面处的流动情况进行了显示测量，截面位置如图1所示，实验风速为10 m/s。可以看出，$\alpha=0°$和2°时，在5个不同截面上，激光片光内未见到任何变化，从片光上看不到内外翼前缘的气泡涡。$\alpha=4°$时，在1，2截面处未见到任何变化，到3截面处，可以看到兰片光在翼面附近有一小空洞，这表明内翼前缘涡已形成，该涡的开始点应在2截面与3截面之间，到4截面处，可以看到，激光片光显示的该处的空间流态在翼面上有两个空洞，一里一外，里面的是内翼涡的延续，外面的是外翼涡，该涡产生于折点之后，到5截面处，仍可看到内外翼涡发展的痕迹。$\alpha=6°$时，在1截面处，没有发现涡的痕迹，到2截面处，可以看到内翼上的翼面涡，同时也可以看到在翼身结合处有一强度很弱的小涡，到3截面处，同样可以见到内翼涡和翼身结合处的涡，到4截面处，可见到翼面上的内、外翼涡和翼身处的涡，到5截面处，只有内外翼涡的存在。$\alpha=8°$时，1截面未见涡迹，到2截面处，可以看到内翼和翼身结合处很弱的一个涡。到4

截面处，翼面上有内外翼两个涡，外翼涡比内翼涡强，到5截面处，可以看到向内旋转的外翼涡和内翼涡，外翼涡比内翼涡强。$\alpha=10°$ 时，1截面处没有涡，到2截面处，内翼上有翼面涡存在，到3截面处，内翼涡变强，到4截面处，内外翼涡发展成首尾相接的两个涡，到5截面处，内外翼面上的两个涡绕合在一起了。$\alpha=15°$ 时，1截面处未出现涡，2截面处有内翼涡存在，3截面处，内翼涡变大，有破裂的迹象，4截面处，已破裂的内翼涡将外翼涡向外挤，5截面处，破裂的内翼涡与外翼涡绕合在一起了。$\alpha=20°$ 时，1截面无涡出现，2截面处有内翼涡，到3截面处，内翼涡似乎已开始破裂，4截面处已破裂的内翼涡与外翼涡已开始绕合，到5截面处，破裂的内翼涡与外翼涡绕合在一起。图3给出了 $\alpha=15°$ 时的激光片光显示。

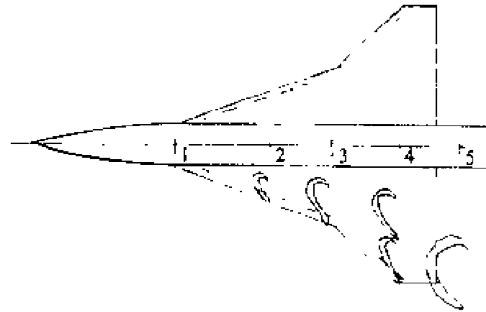


图3 激光片光显示的涡，$\alpha=15°$

从上可以看出，激光片光可以显示一定强度的涡，如果涡的强度达不到一定程度，则无法显示出来，如前缘气泡分离涡，折点涡等。片光显示的翼面上的涡的发展与油流油谱是基本一致的。

2.3 表面热膜测量结果

为了解模型表面边界层内的流动情况，在表面6个位置处贴了热膜片进行了测量，热膜片的位置如图1所示。从测量结果可以看出，$\alpha=0°$ 时1位置处的流动为层流和湍流的混合流动，30和40 m/s两个速度下均是层流成分略大于湍流成分的流动，虽然翼面上没有涡形成，但翼前缘气泡涡的存在已改变了翼面上的流动情况，且热膜片处于前缘气泡区后。2位置处两个速度下的流动略有不同，30 m/s时为层流流动略大于湍流流动的混合流动，40 m/s时已基本为湍流流动了。在3，4，5，6位置处翼面上的流动都是湍流流动。$\alpha=2°$ 时，1位置处基本为湍流流动，湍流强度不大，热膜片处于前缘气泡分离区内，2位置处为层流成分大于湍流成分的流动，3，4，5，6位置为湍流流动。$\alpha=4°$ 时，1位置为强度不大的湍流流动，2位置处，$v=10$m/s时是以层流为主的层湍混合流动，其他风速下为湍流流动，3位置处为层流大于湍流的混合流动，其它三个速度下基本为湍流流动，4处的情况类似于3处，5位置处，4个速度下的流动为层流大于湍流的混合流动，这时热膜片可能处于涡区与再附区交界的地方，6位置处的流动为湍流，热膜片处于涡区内。$\alpha=6°$ 时，1位置处流动为湍流流动，强度不大，2位置处是层流为主的层湍混合流，3和4位置处，10 m/s时是层流为主的混合流动，30 m/s时为湍流流动，5，6位置处为湍流流动，这时由于涡区扩大，在5位置处的热膜已处于涡区中。$\alpha=8°$ 时，1位置处为湍流流动，2位置处是层流为主的层湍混合流，这时热膜片可能处于内翼涡分离线附近的低速区，3位置处两个速度下的流动均为湍流，30 m/s的强度大于10 m/s的，4位置处10m/s时为层流为主的层湍混合流，30m/s为湍流，5，6位置为湍流流动。$\alpha=10°$ 时，1位置处为湍流，强度很小，2位置处，10m/s时是层流为主的层湍混合流，30 m/s时为湍流，3位置处为湍流，4位置处，10m/s时为层湍混合流，层流为主，30 m/s时为湍流，5，6位置处，两个速度下均为湍流。$\alpha=15°$ 时，1位置处流动为湍流，30 m/s的强度大，2位置处，10 m/s时为层湍混合流，30m/s时为湍流，3位置处为湍流，4位置处，10m/s时为层流为主的层湍混合流，30m/s时为湍流，5，6位置为湍流流动。$\alpha=20°$ 时，1位置处是湍流流动，2位置处是层流为主的层湍混合流，3位置

处是湍流流动，4位置处，10m/s时是层流为主的层湍混合流，30m/s时是湍流流动，5，6位置处为湍流流动。图4给出了$\alpha=10°$时的测量结果。由于上面所选的六个位置不是处于模型前缘就是处于分离的涡流中，所以未测出表面边界层转捩的情况。

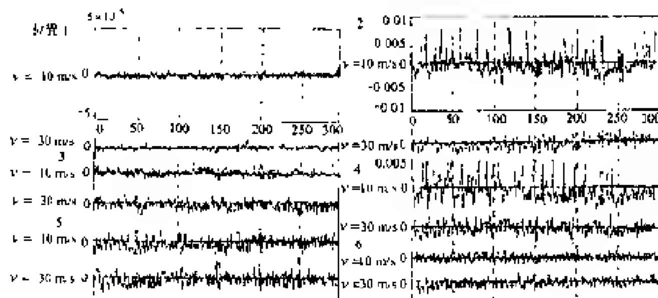


图4　$\alpha=10°$时热膜测量的边界层情况

为了测量模型表面边界层转捩的情况，用移动热膜的方法沿模型表面不同弦线进行了测量，测量结果如图5所示。图中给出了模型攻角分别为0°和5°时的测量结果，可以看出，攻角越大转捩雷诺数越小，转捩越容易。同时也可以看出转捩雷诺数沿展向的变化，离机身越远转捩雷诺数越小，转捩越容易。

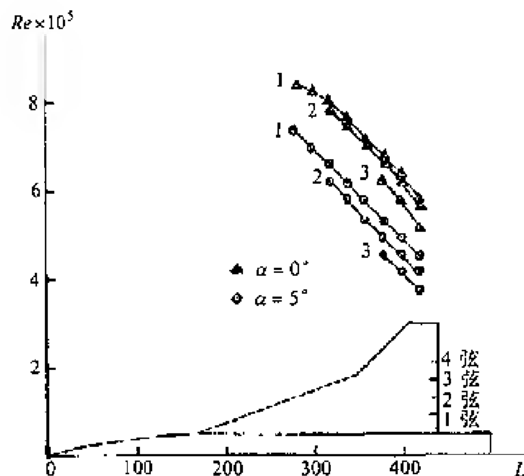


图5　模型上完全转捩 $Re\text{-}b_A$ 的变化

从上述可以看出，表面热膜不仅能测量模型翼面上的流动情况，并且与油流和激光片光测得的结果是基本一致的，而且能给出翼面上边界层转捩的定量结果。表面热膜虽能给出模型表面分离发生的位置，但难于判断涡破裂发生的位置。

3 结　论

(1) 表面油流技术，激光片光技术以及表面热膜技术能给出了双三角翼翼身组合体模型上分离点和分离开始位置相一致的结果。

(2) 表面油流技术可以给出模型表面边界层流动的性状，难于给出边界层转捩的位置，表面热膜技术可以给出模型表面边界层转捩的定量结果。

参 考 文 献

1　卞於中等. 边界层转捩位置的显示和测量. 第四届全国流动显示学术会议论文集，1999.12. 桂林

壁湍流温度耗散率函数标度律 1)

姜 楠*、** 王玉春* 田 清*

*(天津大学力学系，天津 300072) **(中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室，北京 100080)

摘要 用热线风速仪测量了风洞中壁面加热平板湍流边界层不同法向位置的温度信号，研究了温度耗散率函数的标度律以及剪切湍流平均流场的非均匀性对层次结构模型的影响。

关键词 温度，壁湍流，耗散率，层次结构模型

引 言

对充分发展湍流中的被动标量例如温度$T(x,y,z,t)$，其结构函数与速度结构函数一样在惯性子区存在着标度律

$$S_p(l)=<\left|u(x+l)-u(x)\right|^p>=<\left|\ \delta u(l)\ \right|^p>\propto l^{\zeta(p)} \tag{1}$$

$$R_p(l)=<\left|T(x+l)-T(x)\right|^p>=<\left|\ \delta T(l)\ \right|^p>\propto l^{\xi(p)} \qquad \eta<<l<<L \tag{2}$$

其中η为湍流的耗散尺度，L为湍流的积分尺度，$<>$代表系综平均。

Kolmogorov (1941)[1]提出惯性子区的存在及著名的-5/3 定律。根据这个理论，可以得到

$$<\delta u(l)^3>=-\frac{4}{5}<\varepsilon>l \tag{3}$$

$$\zeta(p)=\frac{p}{3} \tag{4}$$

Obukhov[2]，Corrsin[3]，Yaglom[4]根据 Kolmogorov 1941 年（K41）的理论预测

$$R_2(l)=<\left|T(x+l)-T(x)\right|^2>=<\left|\ \delta T(l)\ \right|^2>\propto<\varepsilon>^{-1/3}<N>l^{2/3} \tag{5}$$

$$<\delta u(l)\delta T^2(l)>=-\frac{4}{3}<N>l \tag{6}$$

因此，温度结构函数与速度结构函数具有同样的线性标度指数

$$\zeta(p)=\xi(p)=\frac{p}{3} \tag{7}$$

这里ε是动能的耗散率函数，N是温度的耗散率函数，$N=\kappa(\nabla T)^2$。

后来的实验研究表明，由于湍流的间歇性，导致标度指数随阶数的变化是非线性的，这就是湍流的奇异标度现象。Kolmogorov[5]提出了修正的自相似假设（Refined Similarity Hypothesis)，认为粗粒化脉动速度与粗粒化能量耗散率以量纲关系式相联系

$$<\delta u(l)>\propto(<\varepsilon_l>l)^{1/3} \tag{8}$$

$$<\varepsilon_l^p>\propto l^{\tau(p)} \tag{9}$$

$$<\delta T(l)>\propto l^{1/3}<\varepsilon_l>^{-1/6}<N_l>^{1/2} \tag{10}$$

其中ε_l，N_l分别为速度和温度的的耗散率函数ε，N在尺度为l的空间内的局部平均。

1) 国家教育部高等学校博士学科点专项科研基金(97005612)、国家“九五攀登计划”和国家自然科学基金(10002011)联合资助项目

由此导出速度结构函数的标度指数$\zeta(p)$与能量耗散率函数的标度指数$\tau(p)$有如下关系

$$\zeta(p)=\frac{p}{3}+\tau\left(\frac{p}{3}\right) \tag{11}$$

90 年代以后，奇异标度律的理论研究取得了重大进展，She 与 Leveque[6]提出了层次结构理论，S-L 理论认为，湍流中存在不同尺度、振幅和相干度的层次结构，任意尺度上最强的结构称为最高激发态；只有最高激发态才是控制湍流脉动结构统计特征量的特征结构，在充分发展湍流的惯性子区内，各层次结构之间通过相似关系与最高激发态相联系。基于层次结构理论，可以得到速度结构函数和能量耗散率的标度指数公式

$$\zeta(p)=\gamma p-\frac{3\gamma-1}{1-\beta}\left(1-\beta^{p/3}\right) \tag{12}$$

$$\tau_p=\lambda p-\frac{\lambda}{1-\beta}(1-\beta^p) \tag{13}$$

其中γ是速度结构函数最奇异标度指数，即最高激发态的标度指数，β是间歇参数，λ是能量耗散率的最奇异标度指数

$$\lambda=3\gamma-1 \tag{14}$$

即最强能量耗散率的标度指数。S-L 理论赋予了湍流标度律问题以新的理论框架。对于不同类型的湍流流场，如非均匀的湍流流场，参数β，γ的普适性问题是一个理论和实验都需要进一步深入研究的问题。

1 实验设备和技术

用热线风速仪测量了风洞中壁面加热情况下平板湍流边界层不同法向位置的温度信号的时间序列，研究了平板湍流边界层不同法向位置（剪切湍流平均速度梯度，湍流平均流场的非均匀性）对温度耗散率结构函数标度律的影响。

实验所用风洞为天津大学流体力学实验室的 DQS-1 型多功能空气动力学实验台，该多功能空气动力学实验台是由北京科学仪器厂制造。实验段长 345mm，横截面为 120mm×50mm 的矩形。来流速度在 30m/s 时背景湍流度小于 2%。实验用平板沿实验段中心轴线安装。DQS-1 型多功能空气动力学实验台如图 1 所示。

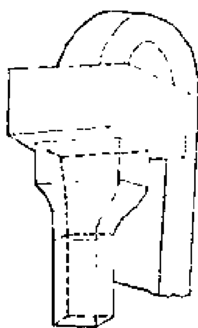


图 1 DQS-1 型多功能空气动力学实验台示意图

实验用的平板为铝板，长 300mm，宽 50mm，厚 5mm、导热系数为 236~240W/s℃。平板前缘为对称的楔形，在距离平板前缘 2.5mm 处放置了直径 1mm 的绊线。在铝板的背面加装了半导体元件，其尺寸为 40mm×40mm×4mm，当通电以后，一面为冷面，另一面为热面。

用不同的面贴在铝板上，可以实现对铝板的加热或制冷。半导体元件的最大功率为 41W，输出功率可以由输入电压在 0~15V 范围内调节。当固壁被加热时，靠近固壁的流体也被加热，因此，近壁流体的温度高于外层流体的温度。

实验测量仪器为 TSI-1050 恒温式热线风速仪和 TSI-1210-T-1.5 单丝热线探针和 TSI-1212-T-1.5 边界层热线探针。TSI-1050 恒温式热线测速仪主单元上有一个测量温度单元，接通这个单元并调节通过热线探针的电流，使电流保持 1.5mA 恒定，该风速仪可以用于恒流式冷线测温。热线探针可以作为温度计使用。

实验测量仪器为 TSI-1050 恒温式热线风速仪和 TSI-1210-T-1.5 单丝热线探针和 TSI-1212-T-1.5 边界层热线探针。实验数据采集系统由 KHAD03 数据采集卡和微机组成，其中 KHAD03 数据采集卡 A/D 转换精度 12 位，最高采样频率 100K，采样频率和采样长度可以根据实验情况自行设定。在来流速度为 $U_\infty = 16.67$m/s 和壁面温度为 $T = 59.4$ ℃的条件下分别测量了壁面加热情况下平板湍流边界层 18 个法向位置的瞬时温度的时间序列信号，采样频率 2k，采样时间 40s。

2 壁面加热平板湍流边界层温度耗散率结构函数的自相似标度律

图 2 为加热壁面情况下距离壁面最近位置(y=0.2 mm)的脉动温度信号的时间序列 $T(t)$。为了将小尺度脉动的细节显示清楚，图中只给出了从 20s 到 20.2s 的部分。

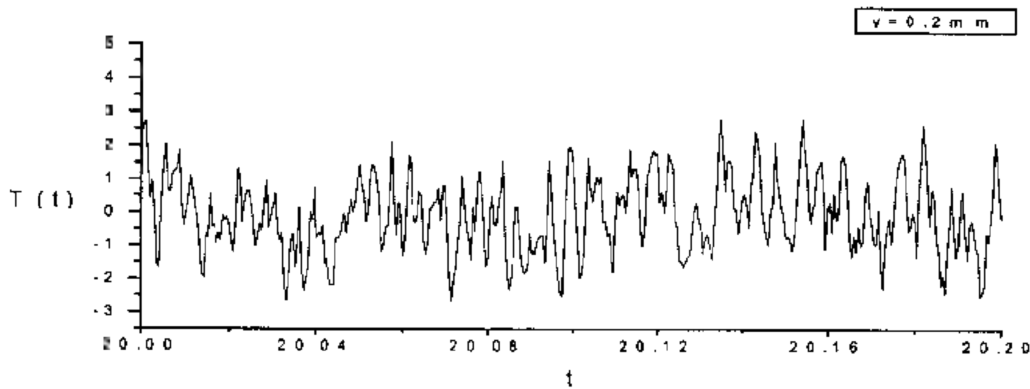


图 2 加热壁面距离壁面最近位置(y=0.2mm)的脉动温度信号的时间序列

图 3(a)，(b)为距离壁面位置从 y=0.2 mm 到 y=2.0 mm 加热壁面的平板湍流边界层的温度 $T(t)$ 的耗散率函数 N 的小尺度局部平均 $N(t;\Delta t)$ 的一阶结构函数 $<N(t;\Delta t)>$ 和二阶结构函数 $<N^2(t;\Delta t)>$ 随尺度 Δt 变化的双对数坐标图。从图 3 可以看到，温度 $T(t)$ 的耗散率函数的小尺度局部平均 $N(t;\Delta t)$ 的一阶结构函数 $<N(t;\Delta t)>$ 在很大范围内不随尺度 Δt 变化，近似为常数. 耗散率函数的一阶结构函数的标度指数 $\tau_1 = 0$，这符合 Kolmogorov (1941)[1] 的预测结果。图 4 为加热壁面的平板湍流边界层距离壁面位置从 y=0.2 mm 到 y=2.0 mm 的温度 $T(t)$ 耗散率函数 N 的局部平均 $N(t;\Delta t)$ 的 p 阶结构函数 $<N^p(t;\Delta t)>$ 的标度指数 π_p 以及速度耗散率函数 ε 的局部平均 $\varepsilon(t;\Delta t)$ 的 p 阶结构函数 $<\varepsilon_{\Delta t}^p>$ 的标度指数 τ_p 随阶数 p 的变化规律。从图 4 可以看到，温度 $T(t)$ 耗散率函数 N 的局部平均 $N(t;\Delta t)$ 的 p 阶结构函数 $<N^p(t;\Delta t)>$ 的标度指数 π_p 略小于速度耗散率函数 ε 的局部平均 $\varepsilon(t;\Delta t)$ 的 p 阶结构函数 $<\varepsilon_{\Delta t}^p>$ 的标度指数 τ_p。

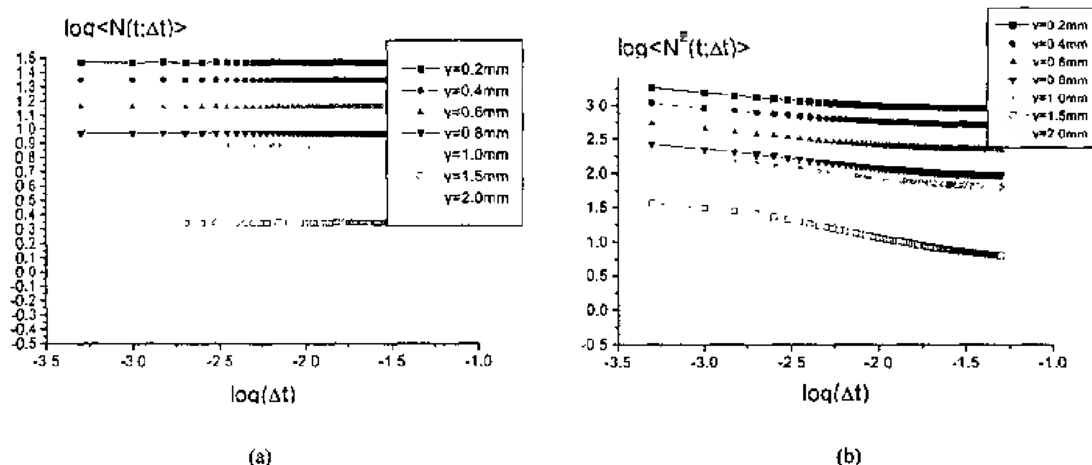


图 3　加热壁面平板湍流边界层不同法向位置温度耗散率的一阶结构函数和二阶结构函数

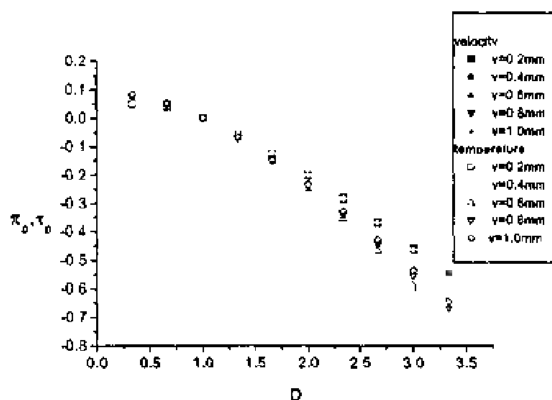


图 4　加热壁面平板湍流边界层的温度耗散率函数的 p 阶结构函数的标度指数 π_p 与速度耗散率函数 p 阶结构函数的标度指数 τ_p

图 5，图 6 分别是对图 4 所示的加热壁面的平板湍流边界层的温度局部平均耗散率函数 $N(t;\Delta t)$ 的 p 阶结构函数 $<N^p(t;\Delta t)>$ 的标度指数 π_p 用最小二乘法进行拟合公式（13）得到的间歇参数 β 和速度结构函数最强激发态（最奇异结构）的标度指数 γ 随测点位置坐标 Y 的变化规律。

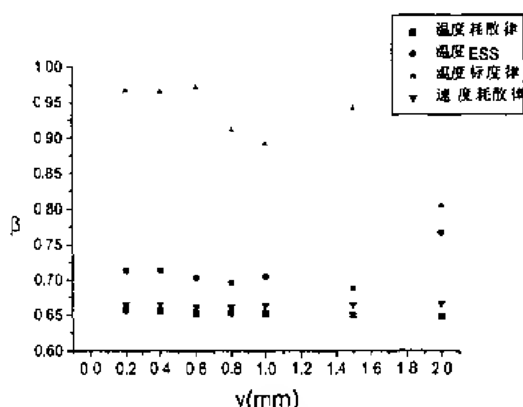


图 5　间歇参数 β 随测点位置坐标 Y 的变化

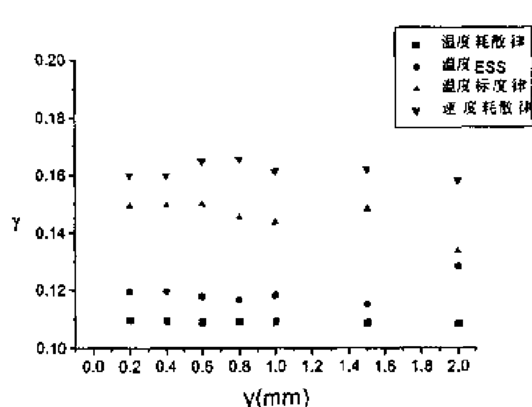


图 6　最奇异结构标度指数 γ 随测点位置坐标 Y 的变化

3 主要结论

本文对壁面加热平板湍流边界层不同法向位置的温度 $T(t)$ 耗散率函数 N 的局部平均 $N(t;\Delta t)$ 的 p 阶结构函数 $<N^p(t;\Delta t)>$ 的标度律以及剪切湍流平均流场的非均匀性对温度层次结构模型的影响进行了实验研究，主要结论如下：

(1) 用温度局部平均耗散率函数 $N(t;\Delta t)$ 的 p 阶结构函数 $<N^p(t;\Delta t)>$ 的标度指数 π_p 拟合的 β 和 γ 基本上不随测点位置坐标 Y 变化；

(2) 用温度局部平均耗散率函数 $N(t;\Delta t)$ 的 p 阶结构函数 $<N^p(t;\Delta t)>$ 的标度指数 π_p 拟合的 β 与壁面加热湍流速度的相对标度指数 $\zeta(p,3)$ 拟合的 β 近似相等；

(3) 用温度局部平均耗散率函数 $N(t;\Delta t)$ 的 p 阶结构函数 $<N^p(t;\Delta t)>$ 的标度指数 π_p 拟合的 γ 小于壁面加热湍流速度的相对标度指数 $\zeta(p,3)$ 拟合的 γ 。

致谢 舒玮教授和王振东教授对本文的工作给予了指导和帮助，谨表谢意。

参 考 文 献

1 Kolmogorov AN. Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence. *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1941, 32: 538~540

2 Oboukov AM. Spectrum of energy of turbulent flow. *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1941, 32: 22

3 Corrsin S. On thespectrum of isotropic temperature fluctuation in an isotropic turbulence. *J Appl Phys*, 1951, 22: 469

4 Yaglom AM. On the local structure of a temperature field in a turbulent flow. *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1949, 69: 743

5 Kolmogorov AN. A refinement of previous hypothesis concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J Fluid Mech*, 1962, 13: 82~85

6 She Z-S, Leveque E. Universal scaling laws in fully developed turbulence. *Phys Rev Lett*, 1994, 72(3): 336~339

长输气管道采用内壁覆盖层减阻试验研究

翟建军　尹崇禄　林发布　魏中磊　张伯寅
(北京大学湍流研究国家重点实验室，北京 100871)

林　竹　张丽萍　秦延龙　杨晓鸿
(中国石油天然气集团公司工程技术研究院，天津塘沽)

摘要　对 EP-99 减阻耐磨涂层管、8701 普通涂层管及无涂层普通工业用管的空气动力性能进行了试验研究，确定了其摩擦阻力系数，以及使用 EP-99 减阻耐磨涂层管在长输气管道中使用时的减阻、增输效果，并对粗糙环（焊缝）的局部阻力系数进行了试验研究。

关键词　输气管道，内涂层，摩阻系数，减阻增输

引　言

1955 年 Tennessee Gas pipeline Company 在美国首次将内涂敷管线投入实际应用，Transcontinental (Transco) Gas Pipeline Corporation 也于 1959 年将内涂敷管线投入实际应用。近些年来，发达国家的大多数长输管线都采用了内壁涂层技术。最近，在 2000 年 4 月 3 日~5 日，举行的国际气体输送技术研讨会上，Elling 等人报导了，北海油田的现场实测与实验室试验相结合的研究结果，证实了内涂层管道的优点及其经验公式估算办法。国内在此方面也进行了一些内涂敷管线实际应用研究，但主要是研究防腐问题。本文是国内首次对 EP-99 减阻耐磨涂层的减阻问题进行试验研究，试验证实内涂层能提高管线输送能力，经济性能好。

1　试验目的、试验方法及设备

本次试验是北京大学湍流研究国家重点实验室与中国石油天然气集团公司工程技术研究院，对长输气管道采用内壁覆盖层（涂层）时的减阻效果进行的合作研究。具体的试验测量与研究工作是在北京大学湍流研究国家重点实验室进行的，其目的为：通过对有涂层和无涂层管道空气动力试验，确定管道内壁的摩擦阻力系数（以下简称为：摩阻系数）及其减阻效果；用理论分析与试验测量相结合的方法，给出涂有 EP-99 减阻涂层管道的减阻、增输效果的评价意见。试验采用三种管道($\phi=114$mm，厚 4.5mm)，即：EP-99 减阻耐磨涂层管（平均绝对粗糙度，$\Delta=5.5\mu$m)；8701 普通涂层管（平均绝对粗糙度，$\Delta=6.7\mu$m)；无涂层普通工业用管（平均绝对粗糙度，$\Delta=45\mu$m)。

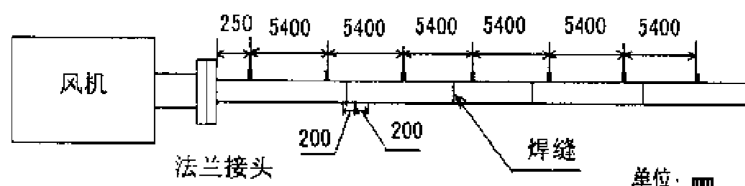


图 1　试验装置图

对上述三种管道分别在六种不同流速下，同时用三种测量工具对各测点的压力进行了测量，并针对每一种试验状态，分别进行了十次测量。使用的压力测量仪器分别为：(1) 电子

压力扫描阀：采用美国 Canivalve 公司的 Hyscan2000 电子压力扫描阀测量系统，扫描阀模块型号为 ZOC33。(2) 倾斜式微压计二台。(3) 倾斜式多管压力计。

2 管线运输分析

2.1 流量与压降

流量与压降的关系可由 Darcy-Weisbach 公式求得

$$p_f = f\frac{L}{D}\rho\frac{V^2}{2}$$

式中：P_f为给定管线的压降，f 为摩阻系数，L 为管线长度，D 为管线内经，V 为管内工质平均流速，ρ 为管内工质密度。由于流量 Q 与平均流速 V 的关系，得到压降与流量之间的关系为：$P_f = \frac{8}{\pi^2}\frac{\rho Lf}{D^5}Q^2$。对于给定的管线系统，管线尺寸和流体密度都已知，压降与流量和摩阻系数有如下关系

$$P_f \propto fQ^2$$

如果 Q 一定，则

$$P_f \propto f$$

如果 P_f 一定，则

$$Q \propto 1/\sqrt{f}$$

在雷诺数 Re 一定时，采用不同涂层及不同表面粗糙度(Δ)的实际输气管线系统，可利用上式计算出输送流量变化情况。

2.2 沿程驱动功率

管线系统的沿程驱动功率由以下方程求得

$$Power = P_f Q/\eta = \frac{8}{\pi^2}\frac{Lf\rho}{D^5}Q^3/\eta$$

式中：$Power$ 为沿程驱动功率，ρ 为工质密度，P_f 为摩阻系数，D 为管线直径，Q 为工质流量，η 为驱动机械的总效率，L 为管线长度。

如果天然气流量一定，则可得

$$Power \propto f$$

在雷诺数 Re 一定时，对于采用不同涂层及不同表面粗糙度(Δ)的实际输气管线系统，可利用上式计算出沿程驱动功率的变化。

3 常用长输气管线摩阻系数计算公式的比较

3.1 摩阻系数的计算公式

计算摩阻系数的经验公式较多，但各自的应用条件及准确度都有所不同，下面仅列出在天然气输运中，常用的几个摩阻系数计算公式如下

$$f = 0.046577Re^{0.094319} \tag{1}$$

$$f = 0.010566\left(\frac{\Delta}{D} + \frac{7025791}{Re}\right)^{0.09174} \tag{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 5.40798 - 0.935991\lg\left(\frac{\Delta}{D}\right) \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.041\ \lg\left(\frac{2.28}{Re\sqrt{f}} + \frac{\Delta}{2.5D}\right) \tag{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -\lg\left[\frac{\Delta}{3.7D} + \left(\frac{6.81}{Re}\right)^{0.9}\right] \tag{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.01\lg\left(\frac{\Delta}{3.7D} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}}\right) \tag{6}$$

式中，f 为摩阻系数，Δ 为绝对粗糙度，D 为管线直径，Re 为雷诺数。公式 (1)，(2)，(3)是以四川油田的输气管线的实测数据拟合而得的；公式(4)是适合于三个湍流阻力区的 Alteshile（阿尔特舒利）公式；公式(5)是 Flancker（弗兰凯尔）公式；公式(6)是 Colebrook 公式，也是我国输气管道设计规范（GB50251-94）建议使用的摩阻系数计算公式。

3.2 试验检验

本试验对上述六个半经验公式进行了验证。试验实测的摩阻系数值见表 1。

表 1　三种管不同流速的实测摩阻系数 f 值

流 速	35m/s	30m/s	26m/s	23m/s	18m/s	12m/s
EP-99 减阻耐磨涂层管	0.01549	0.01624	0.01646	0.01662	0.01796	0.01893
8701 普通涂层管	0.01622	0.01676	0.01701	0.01704	0.01821	0.01966
普通工业管	0.01849	0.01855	0.01886	0.01903	0.02025	0.02078

图 2 为不同流速下，各试验管的实测摩阻系数与用公式(1)至(6)计算所得摩阻系数分布图。

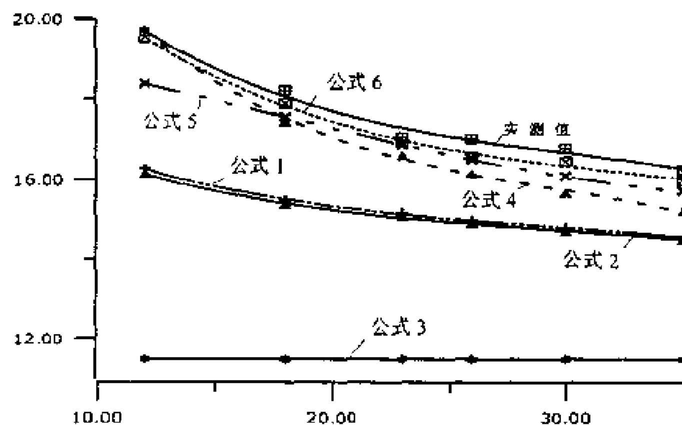


图 2　不同流速下各试验管的实测摩阻系数

图 3 为在不同流速下，EP-99 减阻耐磨涂层管与 8701 普通涂层管 (见图上曲线 2)，EP-99 减阻耐磨涂层管与无涂层普通工业用管相比(见图上曲线 1)，实测摩阻系数减小值随流速的变化趋势图。在不同流速下，EP-99 减阻耐磨涂层管与 8701 普通涂层管，以及与无涂层普通工业用管相比实测摩阻系数的减小值，可用以下公式计算

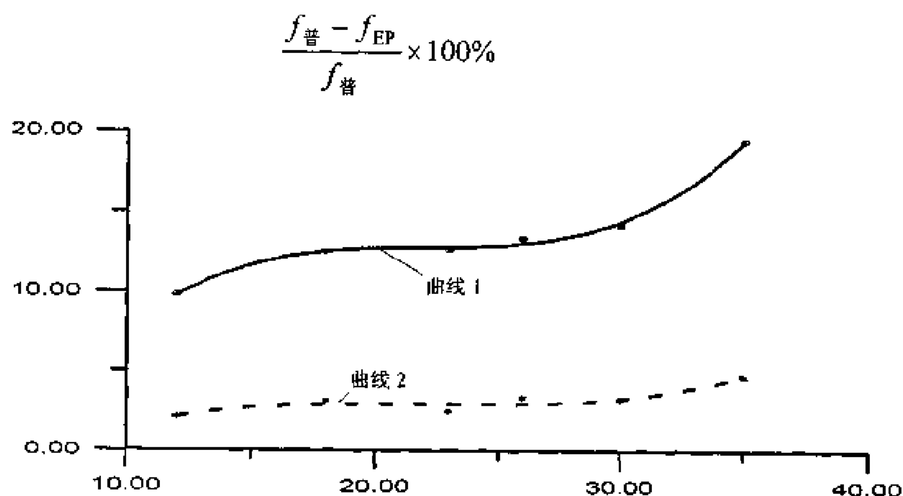


图 3 EP-99 减阻涂层管与 8701 普通涂层管(曲线 2)、无涂层普通工业用管相比(曲线 1)实测摩阻系数减小值随流速的变化

计算结果见下表 2。从图 3 中可知，随平均流速（雷诺数）的增大，其摩阻系数减小值增大，而且，在流速（雷诺数）进一步增大时，这种增大的趋势更为明显。这一点对推广本试验报告的结果到现场应用很有利。

表 2 EP-99 减阻耐磨涂层管与 8701 普通涂层管、无涂层普通工业用管相比，实测摩阻系数的减小值 （单位:%）

流速	35m/s	30m/s	26m/s	23m/s	18m/s	12m/s
EP-99 减阻耐磨涂层管与 8701 普通涂层管相比	4.713	3.201	3.341	2.527	3.114	2.0717
EP-99 减阻耐磨涂层管与无涂层普通工业管相比	19.37	14.22	13.36	12.66	12.47	9.772

在不同流速下，实测值及用 Colebrook 公式计算得到的 EP-99 减阻耐磨涂层管与 8701 普通涂层管、无涂层普通工业用管相比输气量增加值，可用公式(1)或(2)求得，结果见表 3 和表 4。

表 3 实测之 EP-99 减阻耐磨涂层管与 8701 普通涂层管、无涂层普通工业用管相比，输气量增加值 （单位:%）

流速	35m/s	30m/s	26m/s	23m/s	18m/s	12m/s
EP-99 减阻耐磨涂层管与 8701 普通涂层管相比	2.33	1.59	1.67	1.26	1.55	1.91
EP-99 减阻耐磨涂层管与无涂层普通工业管相比	9.23	6.88	7.04	8.40	7.89	4.77

表 4 Colebrook 公式计算的 EP-99 减阻耐磨涂层管与无涂层普通管、无涂层普通工业用管相比，输气量增加值 （单位:%）

流速	35m/s	30m/s	26m/s	23m/s	18m/s	12m/s
EP-99 减阻耐磨涂层管与 8701 普通涂层管相比	1.34	1.24	0.58	0.56	0.96	2.44
EP-99 减阻耐磨涂层管与无涂层普通工业管相比	8.66	7.63	7.01	7.55	7.12	4.96

对于长输气管道摩阻系数的确定，采用 Colebrook 公式的计算结果，与在本文的试验雷诺数范围与试验值吻合程度最高，因此该方程可成为随后进行理论分析的基础。同时也证实了我国的国家输气管道设计规范(GB50251-94)，采用 Colebrook 公式计算摩阻系数值的规定是适宜的。

4 实际输气管道摩阻系数的确定

对于国家“西气东输工程”的实际输气管道($\phi=1118$mm，厚 16.2mm，$Re=4.32\times10^7$)，采用不同涂层及使用无涂层普通工业管，本文作者建议其摩阻系数由 Colebrook 公式计算确定(见表 6)。

表 6 $\phi-1118$mm 采用不同涂层及使用普通工业管，摩阻系数值

	绝对粗糙度	摩阻系数 f
EP-99 减阻耐磨涂层管	5.5μ	0.00763
8701 普通涂层管	6.7μ	0.00794
普通工业管	45μ	0.01032

4.1 摩阻系数的变化

由此可以得到，采用不同涂层及使用普通工业管线输气时其摩阻系数的变化值：

(1) EP-99 减阻耐磨涂层管与普通工业管相比，摩阻系数减少值为

$$\frac{f_{普}-f_{EP}}{f_{普}}\times100\%=26.07\%$$

(2) EP-99 减阻耐磨涂层管与 8701 普通涂层管相比，摩阻系数减少值为

$$\frac{f_{8701}-f_{EP}}{f_{8701}}\times100\%=3.9\%$$

在雷诺数 Re 一定时，对于采用不同涂层及不同表面粗糙度(Δ)的实际输气管线系统，可利用公式(1)，(2)计算出输送流量变化情况，结果如下：

(1) EP-99 减阻耐磨涂层管与普通工业管相比，输气量增加值为

$$\frac{Q_{EP}-Q_{普}}{Q_{普}}\times100\%=\left(\sqrt{\frac{f_{普}}{f_{EP}}}-1\right)\times100\%=15.3\%$$

(2) P-99 减阻耐磨涂层管与 8701 普通涂层管相比，输气量增加值为

$$\frac{Q_{EP}-Q_{8701}}{Q_{8701}}\times100\%=\left(\sqrt{\frac{f_{8701}}{f_{EP}}}-1\right)\times100\%=2.0\%$$

4.2 沿程驱动功率的变化

在雷诺数 Re 一定时，对于采用不同涂层及不同表面粗糙度(Δ)的实际输气管线系统，可利用上式计算出沿程驱动功率的变化，结果如下：

(1) EP-99 减阻耐磨涂层管与普通工业管相比，沿程驱动功率减少值为

$$\frac{Power_{普}-Power_{EP}}{Power_{普}}\times100\%=26.07\%$$

(2) EP-99 减阻耐磨涂层管与 8701 普通涂层管相比，沿程驱动功率减少值为

$$\frac{Power_{8701}-Power_{EP}}{Power_{8701}}\times100\%=3.9\%$$

5 结 论

(1) 本试验的摩阻系数是在雷诺数为 0.7×10^5~2.28×10^5 范围内，通过实测取得的；实测

结果与 Colebrook 公式计算的值基本一致。

(2) 依据我国输气管道设计规范中的摩阻系数计算公式（Colebrook 公式）计算求得结果：

(a) 对于实际输气管线（$\phi = 1118$mm，厚 16.2mm，$Re = 4.32 \times 10^7$），采用 EP-99 减阻耐磨涂层管与采用无涂层普通工业管相比，其摩阻系数值减少 26.07%；采用 EP-99 减阻耐磨涂层管与 8701 普通涂层管相比，其摩阻系数减少 3.9%。

(b) 对于实际输气管线（$\phi = 1118$mm，厚 16.2mm，$Re = 4.32 \times 10^7$），采用 EP-99 减阻耐磨涂层管与采用无涂层普通工业管相比，其输气量增加 15.3%；采用 EP-99 减阻耐磨涂层管与 8701 普通涂层管相比，其输气量增加 2.0%。

(c) 对于实际输气管线（$\phi = 1118$mm，厚 16.2mm，$Re = 4.32 \times 10^7$），采用 EP-99 减阻耐磨涂层管与采用无涂层普通工业管相比，其沿程驱动功率减少 26.07%；采用 EP-99 减阻耐磨涂层管与 8701 普通涂层管相比，其沿程驱动功率减少 3.9%。

感谢 作者感谢中国石油天然气集团公司技术研究发展部的支持。

参 考 文 献

1 候晖昌. 减阻力学. 北京：科学出版社，1987. 26

2 郑勇刚，王明浩，毛洪光，曹玲. 四川油田输气管线摩阻系数计算公式. 石油学报，1999，20(6)：77~81

3 Sletfjerding，Elling etral. Friction factor in gas pipelines in the north sea. *Gas Technology Symposium*，2000. 459~467

4 窦国仁. 紊流力学 北京：高等教育出版社，1987. 25~32

5 Ben Asante. Justification for internal coating of natural gas pipeline. 1995 OMAE，V. *Pipeline Technology*，*ASME*，1995. 241~248

六线涡量探针和热线风速仪的研制及其实验测量结果[1)]

魏中磊　魏庆鼎　王凯建　毕卫涛　尹崇禄　林发布　翟建军
(北京大学湍流研究国家重点实验室，北京 100871)

摘要　介绍了有关六线涡量探针和六通道热线风速仪的研制等问题，并报导了应用该六线涡量探针，对复杂湍流场进行涡量分布实验测量的研究结果。
关键词　热线风速仪，涡量探针，涡量测量

引　言

大家知道，湍流场本身就是个涡量场，而反映湍流场内 Kolmogorov 湍能级串的传递效应的关键参量就是拟涡能 (Enstrophy)。此外，从描述湍流场的 N-S 方程可以看到，反映湍流场的非线性效应的主要参量是螺度 (Helicity)。湍流场内涡量分布，过去没有被系统的研究过，因此进一步研究湍流场内涡量、螺度和拟涡能的特性，可能会对三维拟序结构的形成和演化机理，提供一些新的线索。尽管涡量是流体实验中较难测量的湍流参量之一，但由于它对阐明湍流各种现象的重要性，要想深入研究湍流机理，就必须设法测量出湍流场内在时间上是非定常的、在空间上是非均匀的涡量强度这一参量。众所周知，用热线风速仪测量湍流参量的技术比较成熟，所以我們重点开展利用热线技术测量涡量的研究工作，以便能很快地解决这一问题。我们已自主研制成功六线涡量探针和相应的六通道热线风速仪，此探针可同时测量两个瞬时涡量强度分量ω_x和ω_z或ω_x和ω_y，以及三个瞬时速度分量及其速度梯度。由此就可用来测量湍流剪切层中的涡量强度，拟涡能和螺度等参量。本六线涡量探针探头分辨率可以达到泰勒(Taylor)尺度的量级空间。利用此六线涡量探针，我们开展了二维混合层、大攻角椭球体绕流、角区流动的复杂湍流场的试验测量。

1　六线涡量探针的测量原理、结构特征和六通道热线风速仪的制造

涡量强度是个空间矢量，在直角座标系内每个分量由二个速度梯度组成，分别定义为

$$\omega_x=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\quad \omega_y=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\quad \omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

速度分量 u，v，w 由两对 X 型探针测定，速度梯度 $\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z},\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial u}{\partial y}$ 需要以探针的几何特征来确定。而速度梯度 $\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ 用泰勒假设来近似求其值，即：$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{U_t}\frac{\partial v}{\partial t}$；$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{U_t}\frac{\partial w}{\partial t}$。时间序列的间隔为$\Delta t$，$U_t$是传递速度，它一般选择瞬时对流速度$U_c$或局部速度平均值$\overline{U}$。

1) 国家科委攀登计划基金资助项目

我们研制成功的六线涡量探针，实质上是由六根斜向热丝，两两成对组成四个 X 型探针。它有 2 个 X 型探针平行于 xz 面，还有一个 X 型探针在 xy 平面内，所有的热线都与主流方向成 45° 角。主流方向是沿 x 轴方向，在 xz 平面内热线间距为 1 mm。在 xy 平面内热线间距为 2 mm，空间分辨率为 2 mm×2 mm。探针用钨丝做敏感元件。每根热线中间是热线感受部分约是 1.0 mm，直径为 5 μ m.。长径比 l/d ~260。此探针有足够高的分辨率，可用在具有 Taylor 微尺度 λ_f，λ_g 量级的湍流实验研究。目前，已制成的三个热线探针，其中 #1 号，热丝直径为 2.5 μ m，#2 和 #3 号，热丝直径为 5 μ m。本文作者发展成功的六线涡量探头和六通道热线风速仪的外形照片，如图 1 和图 2 所示，



图 1　六线涡量探头

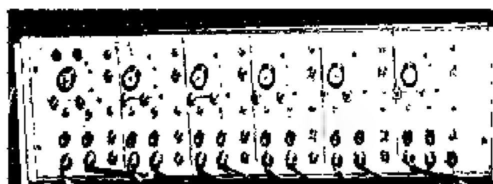


图 2　六通道热线风速仪的外形照片

我们发展研制的六通道热线风速仪的电桥桥路，采用恒温法。恒温法的原理是在电路上，时时保持通过桥路的热线那一臂的电阻为恒定值，即热线的温度保持恒定。这时通过热线的电流，和热线两端的电压，随流场的速度变化而变化，由此可测出瞬时速度。

1.1 探针热线的有效冷却速度与流场瞬时速度分量的关系

要测定 ω_x 和 ω_z，探针的 4 根热线平行 xz 平面（热线号 1，2，3，4）；2 根热线平行于 xy 平面（热线号 5，6）。在 xz 平面内的 4 根热线有相同的的间距，为 1mm，并组成了四个 X 探针（热线号 1 和 2，热线号 2 和 3，热线号 3 和 4，热线号 1 和 4）。前三个相互间距为 1mm，后一个(热线号 1 和 4）间距为 3 mm，在 xy 平面形成了一个 X 探针（热线号 5 和 6），间距为 2mm，这种布局形成了一个 2×2 mm 的平面单元。探针的每根热线的有效冷却速度 $U_{ei}(i=1,\ldots,6)$ 为

探针的热线 1：$U_{e1}=[(u_1\cos\alpha+w_1\sin\alpha)^2+v_1^2]^{0.5}$ (1)

探针的热线 2：$U_{e2}=[(u_2\cos\alpha-w_2\sin\alpha)^2+v_2^2]^{0.5}$ (2)

探针的热线 3：$U_{e3}=[(u_3\cos\alpha+w_3\sin\alpha)^2+v_3^2]^{0.5}$ (3)

探针的热线 4：$U_{e4}=[(u_4\cos\alpha-w_4\sin\alpha)^2+v_4^2]^{0.5}$ (4)

探针的热线 5：$U_{e5}=[(u_5\cos\alpha+w_5\sin\alpha)^2+v_5^2]^{0.5}$ (5)

探针的热线 6：$U_{e6}=[(u_6\cos\alpha-w_6\sin\alpha)^2+v_6^2]^{0.5}$ (6)

其中，$u_i,v_i,w_i(i=1,\ldots,6)$ 为相对于探针的 i 号热线探针的瞬时速度分量。α 为热线与主流方向所成的角度，对探针的所有热线来说都为 45°。对于公式(1)，在 xy 平面上，速度 v_1 的方向垂直于热线 1；而在 xz 平面上，速度 u_1,w_1 的方向以 α 角斜吹向热线，故有(1)式。对公式(2)而言，热线 2 与热线 1 成 90° 角，所以 $u_2\cos\alpha$ 与 $w_2\sin\alpha$ 之间为负号，而 $u_1\cos\alpha$ 与 $w_1\sin\alpha$ 之间为正号。热线 3 与热线 4，和热线 5 与热线 6 也有上述类似关系。

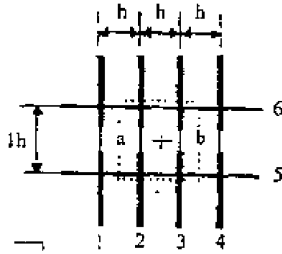


图3　六线探头热丝的前视图（流向方向）

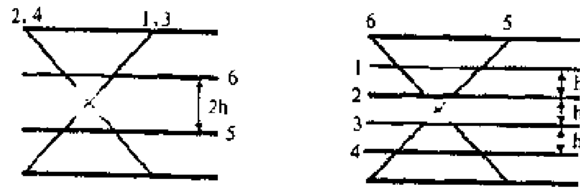


图4　六线探头热丝的顶视和侧视图

1.2 测定相应的速度分量和测定速度梯度

用探针的热线 2 和热线 3 测定u_0和w_0。对公式(2)和(3)，假设$u_2=u_3=u_0$，$v_2=v_3=v_0$，$w_2=w_3=w_0$。由于$\alpha=45^\circ$，再假定$u_0^2>>v_0^2$，上述二式就可近似转化为如下形式：

$$U_{e2}\cong\frac{1}{\sqrt{2}}(u_0-w_0)；\quad U_{e3}\cong\frac{1}{\sqrt{2}}(u_0+w_0)$$

若$P_i(E_i)$是探针的相应i号热线测得的电压，令U_2，$P_2(E_2)$，U_{e2}有关系

$$U_2=P_2(E_2)=\sqrt{2}U_{e2}；\quad U_3=P_3(E_3)=\sqrt{2}U_{e3}$$

U_2和U_3是对应于探针的 2 号和 3 号热线的线性速度。最后求得

$$u_0=\frac{U_3+U_2}{2},\qquad w_0=\frac{U_3-U_2}{2}$$

测定a和b两点间的速度梯度$\frac{\partial u}{\partial y}$和$\frac{\partial w}{\partial y}$。首先测定$a$和$b$两点上的$u$和$w(u_a,w_b;u_b,w_b)$，然后再求其差值。由热线 1 和 2 构成的 X 型热线探针测点对应于a点，由热线 3 和 4 构成的另一个 X 型热线探针测点对应于b点。最后得到

$$U_1=P_1(E_1)=u_a+w_a,\quad U_2=P_2(E_2)=u_a-w_a$$

$$U_3=P_3(E_3)=u_b+w_b,\quad U_4=P_4(E_4)=u_b-w_b$$

由此得到在a和b两点的速度分量

$$u_a=(U_1+U_2)/2,\quad w_a=(U_1-U_2)/2,\quad u_b=(U_3+U_4)/2,\quad w_b=(U_3-U_4)/2$$

最后求得速度梯度$\frac{\partial u}{\partial y}$和$\frac{\partial w}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cong\frac{\Delta u}{\Delta y}=\frac{u_b-u_a}{2h}=\frac{U_3+U_4-U_1-U_2}{4h}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}\cong\frac{\Delta w}{\Delta y}=\frac{w_b-w_a}{2h}=\frac{U_3-U_4-U_1+U_2}{4h}$$

要完整地求出涡量分量ω_x和ω_z，还必须确定速度分量v_0以及主流方向(x轴)上的速度梯度和z轴上的横向速度梯度。因此必须利用探针的 5 号热线和 6 号热线，热线 5 和 6 同样也组成一个 X 型探针，最后得到下列公式

$$U_5=\left(u_0+\frac{\partial u}{\partial z}h\right)+\left(v_0+\frac{\partial v}{\partial z}h\right),\quad U_6=\left(u_0-\frac{\partial u}{\partial z}h\right)-\left(v_0-\frac{\partial v}{\partial z}h\right)$$

由上述两个等式相加得到速度梯度 $\partial v/\partial z$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=(U_5+U_6-2u_0)/2h;\qquad v_0+\frac{\Delta u}{2}\cong(U_5-U_6)/2h$$

1.3 确定流向速度梯度

利用泰勒假设来求沿主流方向上速度梯度

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{U_t}\frac{\partial v}{\partial t},\qquad \frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{1}{U_t}\frac{\partial w}{\partial t}$$

上式的 Δx 是利用在主流方向上的瞬时对流长度 $\delta x(t_i)$ 取和求得的。而此 $\delta x(t_i)$ 是由 t_i 和 t_{i-1} 之间的时间差和传递速度 U_t 的乘积取极限得到的。U_t 选择瞬时对流速度 U_c 或局部速度平均值 $\overline{U}$ 皆可，本文取局部速度平均值 $\overline{U}$。当给定时间序列 t_i 的 $U(t_i)$ 后，定义对流速度

$$U_c=[U(t_i)+U(t_{i-1})]/2$$

对应于时间 t_i 和 t_{i-1} 之间的对流长度 δx 为

$$\delta x(t_i)=U_c(t_i)(t_i-t_{i-1})=U_c(t_i)\Delta t$$

对 $\delta x(t_i)$ 一直取和到 $\Delta x=\Delta y=2$ mm

$$\Delta x(\tau_j)=\sum_{i=1}^{n_j}\delta x(t_i)$$

其中 n_j 值的大小，是取多少个 $\delta x(t_i)$ 等于 Δy 时的数值；为了得到最佳极限值，必须有足够大的 n_j，所以要求较高的扫描频率。本文硬件系统的采样频率为 100 kHz，分配到每个通道的扫描频率为 16.6 kHz/每一通道。此外。n_j 的数值大小也与流场的速度大小有关，平均速度大则 n_j 值小。本文试验取三个 $\delta x(t_i)$ 时，就达到 $\Delta x=\Delta y=2$ mm 了，所以 n_j=3。

2 涡量强度热线的实测结果举例

本文作者对三种不同的湍流场，即二维混合层、绕椭球体分离流和柱体平面角区流场的涡量分布进行了测量，最后的试验测量结果令人非常满意。

(1) 在二维混合层内测得的 ω_x 分布，如图 5 所示；在自相似区内测的无量纲 ω_x 值与 Kim & Fiedler (TU Berlin)[4]结果的比较，见图 6，由图可见二者非常吻合。

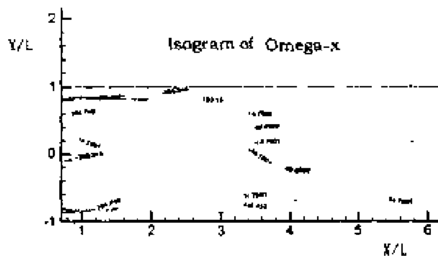


图 5 二维混合层内的 ω_x 分布

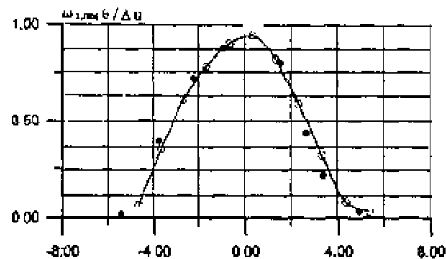


图 6 无量纲 ω_x 值与 Kim & Fiedler 结果的比较

(2) 绕椭球体分离流实验是在低湍流风洞完成的。该风洞实验段宽 0.3m，高 0.8m，长 3.0m 实验段内自由来流速度的变化范围 0.1 ~20 m/s，自由来流速度的湍流度低于 0.08%。4:1 椭球体模型的长轴 $2a$ 为 240mm，短轴 $2b$ 为 60mm，模型的试验攻角为 $\alpha=30°$。在绕椭球体分离

流内，测得的 ω_x 分布，如图 7 所示，截面 A-A 上附着涡外缘轮廓[5]，如图 8 所示，截面 A-A 上附着涡外缘轮廓照片，如图 9 所示。

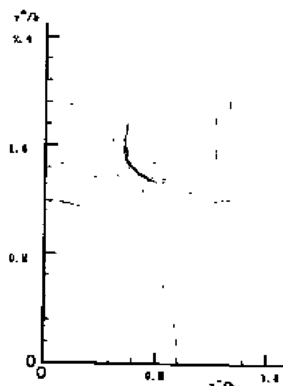


图 7　截面 A-A 上 ω_x 的分布

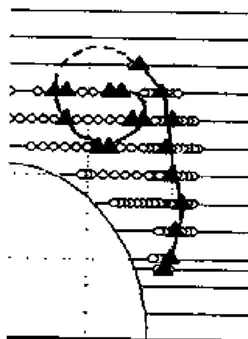


图 8　截面 A-A 上附着涡外缘轮廓



图 9　截面 A-A 上附着涡外缘轮廓照片

(3) 对（5:1）椭圆柱垂直于平板上所构成的角区流场，利用该探头测量了流场的速度场和涡量强度，进而求得了角区流场内的拟涡能和螺度的分布等。在截面 x/c=0.18 上的涡量场 ω_x 分布，如图 10 所示，在截面 x/c=2.5 上的涡量场 ω_x 分布，如图 11 所示。

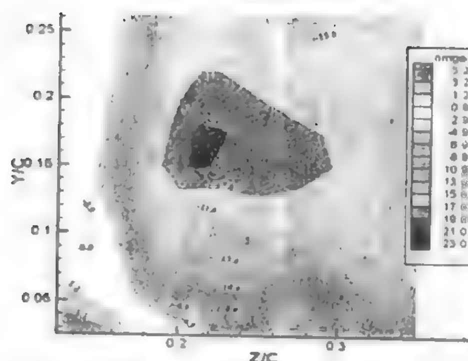


图 10　角区流动在 $x/c=0.18$ 截面上 ω_x 分布

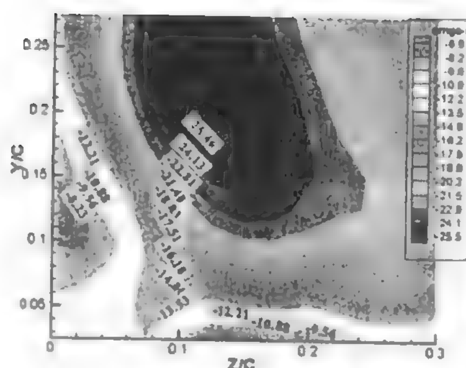


图 11　角区流动在 $x/c=2.5$ 截面上 ω_x 分布

3 展　望

本文介绍了有关六线涡量探针和六通道热线风速仪的研制等问题，并报导了复杂湍流场的涡量分布的实验研究结果，以便使对热线技术感兴趣研究人员、博士生和硕士生，能立足于国内技术，很快进入这一领域，自己动手建立热线测量系统，并把节约下的有限资金和外汇，切实用于实验研究工作。

参　考　文　献

1　魏中磊，魏庆鼎，王凯建，徐诚. 热线风速仪和其探针的发展及其在湍流实验研究上的贡献. 见：湍流理论新进展及其应用，上海：上海大学出版社，2000. 135~138

2　林发布，康红文，魏中磊. 角区流动内涡量分布的实验研究. 力学与工程应用. 北京：中国林业出版社，2000，33~36

3　Wang Kaijian，Lin Fabu，Wei Zhonglei，Kang Hongwen and Zhao Feng. Vortices behavior in wing-body junction turbulence flow. In: Proc of 4th Inter Conference on Hydrodynamics，Yokohama，7-9 Sept. 2000. 381~385

4　Kim JH. Wirbelstaerkemessungen in einer turbulenten scherschicht. [Ph D Thesis]，TU Berlin (in Germany)

5　曹露洁. 椭球体分离流动特性及其控制. [硕士学位论文]，北京大学，1999

周期性人工扰动在湍流边界层沿法向的衰减[1)]

王　昕　姜　楠　舒　玮
(天津大学力学系，天津 300072)

摘要　在开口式循环水槽中引入周期性人工扰动，利用 X 型热膜探针对下游扰动进行测量。研究了湍流边界层中周期性扰动对湍流结构的影响，获得了人工扰动在湍流边界层中沿法向的衰减趋势。

关键词　湍流边界层，周期性人工扰动，衰减

引　言

参考层流失稳的实验方法将人工扰动引入湍流实验，很多研究者研究了湍流边界层中的扰动对相干结构猝发过程的影响以及扰动本身在流场中的衰减特性。文献[1]采用电磁激振的方法，研究了不同频率的人工扰动信号沿流向的发展，得到沿流向高频信号衰减快，低频信号衰减慢的结论；文献[2]用机械振动方法在水槽实验中引入人工有序扰动，研究了低频扰动波沿流向的发展和演化过程，以及湍流边界层外层扰动对内层猝发的影响。本文希望继续前人的工作，对湍流边界层外层所施加的周期性扰动对流场的影响及扰动沿法向的衰减特性进行研究。

对人工扰动信号在流场中发展的特性研究，虽然不能直接去揭示猝发形成与演化机理，但是所得到的扰动在湍流中的发展与演化规律将有助于对猝发的产生、影响因素、及其在流场中发展过程的认识。

1　实验装置及测量方法

实验在开口式循环水槽中进行，采用 X 型热膜探针进行测量。考虑实验在水中进行，又是用热膜探针进行测量，不宜加入电磁方式周期性扰动，所以采用机械方式引入周期性扰动。扰动装置如图 1 所示。该装置以微型直流电机为动力，通过直流脉宽调速器进行调速。传动导轨将偏心的圆周运动转换为上下方向的直线运动，本装置的振动带的运动从理论上讲是简谐运动。该装置可以产生 5~20Hz 连续可调的周期振动，误差在±0.15Hz 范围内。从数字转速表对电机转速的实时测量以及对所测结果的功率谱分析都证明了这一点。振动带采用硬质聚乙烯材料。宽 3mm，厚 0.3mm，用拉紧螺杆拉紧，平展度较好。振幅在 0~3mm 范围内连续可调。

振动带安置在距离水槽收缩段出口 450mm，法向与槽底距离 0.3 倍边界层厚度处，属于边界层外层。测点位置的选取考虑了人工扰动与基本流场的充分混合需要一定的距离，即测点距振动带不宜太近，同时兼顾扰动沿流向的衰减程度，经多次实验确定测点为振动带下游 15mm 处。探针在边界层内可以沿法向移动。实验中采用的振动带振幅为 0.5mm，较脉动速度约小一个量级。实验采用 TSI-1243 型号的 X 型热膜探针，该探针可同时测得流向和法向的速度信号。使用前用 TSI 公司的 10180 型水探头校准器进行了标定。实验采用 TSI 的二通

1) 国家自然科学基金重点项目（19732005）的一部分

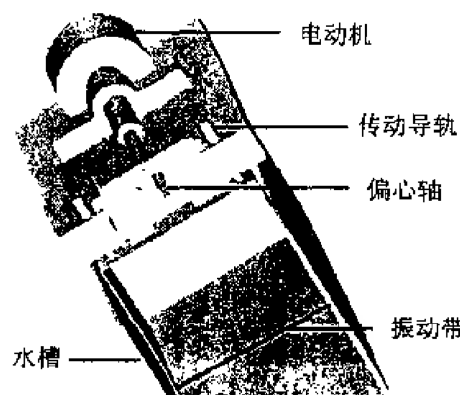


图 1 机械振动装置

道 1050 型热线/膜探针测速仪进行测量，采集软件用本实验室的 HWADAP 软件。实验中引入振动频率较流场基频高一个量级以内的 10Hz，15Hz，20Hz 周期性扰动，在振动带下游沿法向进行了测量，采样频率为 1kHz。文件长度 30K。由于采用了脉宽调速器来控制电机转速，这样可以使人工扰动频率在长时间内保持不变，满足了本实验研究一固定频率扰动沿法向衰减的需要。

2 实验结果

2.1 自相关函数分析结果

为了研究湍流边界层在引入不同频率周期扰动后的反映，本文首先对于引入周期扰动前后的流场流向脉动速度信号在时域进行自相关分析。图 2 所示的是位于 $y^+=100$ 处测点加扰前后脉动速度信号的自相关分析。从(a)图可以看出，未加扰时，该点脉动速度信号的自相关系数在趋于零的同时存在着很小幅值较低频率的上下波动，这与文献[4]的结论一致，即：相

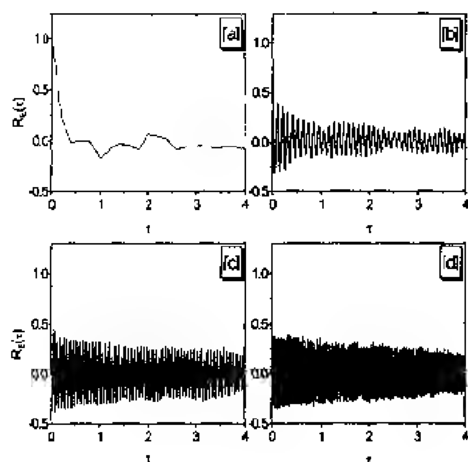


图 2 加扰前后脉动速度自相关分析
(a) 未加扰流场，(b) 加扰 10Hz 流场
(c) 加扰 15Hz 流场，(d) 加扰 20Hz 流场

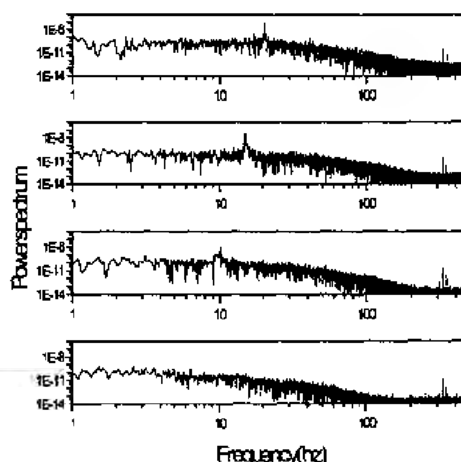


图 3 加扰前后脉动速度功率谱
（从下至上依次为：基本流场，加扰 10Hz、15Hz、20Hz）

对于各向同性湍流来说，壁湍流的脉动速度自相关系数延迟时间增加在趋于零的同时，表现出明显的大尺度低频波动。由信号处理理论可知周期信号的自相关函数仍是周期函数，所以在引入周期性扰动后，脉动速度信号自相关系数其周期性十分明显，而且振动周期与引入扰动周期吻合。与一般周期信号自相关函数曲线不同的是，随着延迟时间的增加，其振动幅值呈波动性的衰减趋势，特别在低频($f=10\,\mathrm{Hz}$，$f^{+}=0.3\,\mathrm{Hz}$)尤为明显。这说明了引入流场的周期扰动已与边界层中的原有大尺度涡结构掺混、耦合，特别对于低频扰动，相互作用得更充分。考虑本流场基频在1~2Hz，则频率与基频接近的周期扰动与流场涡结构作用更强，是合理的。

2.2 功率谱分析结果

对于周期性扰动，频域分析更容易得出定量的结果。图 3 为对应图 2 中脉动速度所做出的功率谱分析。从频域对同样的速度信号进行观察，我们可以发现：第一，流场中引入的是周期性的扰动，表现为对应扰动频率的谱线尖峰；第二，加扰后边界层中高频分量即小尺度结构增多，说明由于扰动有利于小尺度结构的形成，从而导致了高频能量的增加；第三，高频扰动（20Hz）较低频扰动（10Hz）更加剧了高频能量的增加，即高频扰动使小尺度涡结构能量较低频扰动时增强很多。

2.3 主流对边界层内扰动的接收

对距底壁不同距离测点引入周期扰动后的流向脉动速度进行功率谱分析，可以得到不同扰动频率下的脉动速度功率谱分析图（图 4，图 5），这里定义 $y_\delta = y/\delta_y$（δ_y 为边界层名义

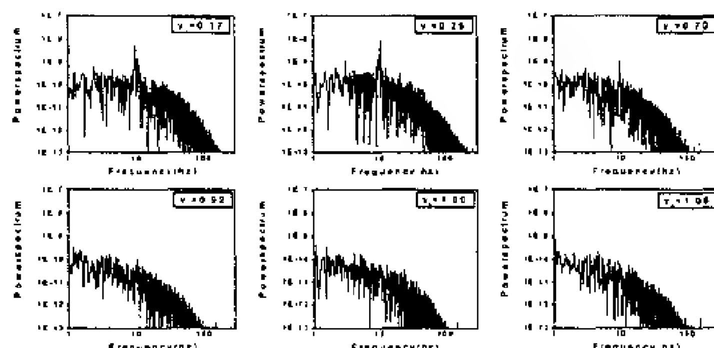


图 4　加扰 10Hz 脉动速度沿法向不同位置的功率谱图

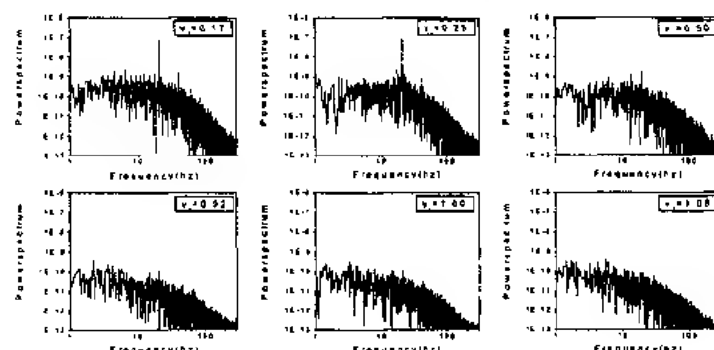


图 5　加扰 20Hz 脉动速度沿法向不同位置的功率谱图
（以上二图，$y_\delta = y/\delta_y$，δ_y 为边界层名义厚度）

厚度）为无量纲的法向距水槽底壁距离。从中可以看出，对应于不同频率周期扰动（10Hz，

20Hz）的功率谱值尖峰随 y_δ 的均呈衰减趋势，在接近边界层边缘附近($y_\delta=0.92$)，其谱值尖峰已很难分辨，可见周期扰动已经基本衰减掉了。另外，比较两图中 $y_\delta=0.92$，$y_\delta=1.0$ 与 $y_\delta=1.08$ 的功率谱图，二者功率谱值的包络形状基本一致，都不存在明显的谱值尖峰，说明边界层的边缘附近已感受不到该扰动的影响。对于 15Hz 的周期扰动，也存在着同样的衰减趋势（从图 6 中可以看出）。由此可知，对于本实验在 0.3 倍边界层厚度处引入的周期扰动，不能穿过边界层的边缘而影响主流；换句话说，主流接收不到边界层内该位置引入的周期扰动。

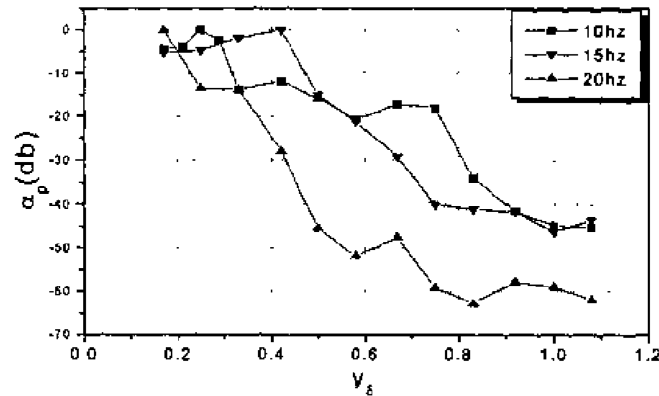


图 6 不同扰动频率功率谱峰值沿法向衰减

2.4 扰动沿法向的衰减

从引入周期扰动后的脉动速度功率普图中单独抽出周期扰动对应的功率谱值，可以得到引入不同频率周期扰动后，脉动速度功率谱中扰动对应的功率谱峰值沿法向的衰减曲线，见图 6，其中 $\alpha_p=20\log\left(\dfrac{pow_u(f_p)}{pow_{u\max}(f_p)}\right)$（$f_p$ 为扰动频率），表示周期扰动功率谱值衰减程度，单位是分贝（dB）。由图 6 并参考图 4，图 5 可知，当流场中引入周期扰动后，对应 10Hz，15Hz 扰动，功率谱峰值表现为随 y_δ 的增加先上升后衰减；而对应更高频率的 20Hz 扰动，谱峰值几乎一直下降，而且衰减程度较大。也就是说，对于不同频率的周期扰动，存在着在边界层内沿法向高频扰动衰减快低频扰动衰减慢的特点。这种规律性，和文献[1]沿流向考察人工扰动衰减所得结论一致。

3 结 论

本文通过在湍流边界层外层采用机械激振的方式引入周期性人工扰动，在扰动源下游，应用 X 型热膜探针及热膜测速仪对引入不同频率周期扰动后的流场瞬时速度进行测量，使用自相关和功率谱分析方法，分析了不同频率周期扰动对边界层中湍流结构的作用以及边界层内不同频率周期扰动沿法向的衰减情况，实验结论如下：

1) 不同频率的周期扰动与流场湍流结构的作用程度不同，频率与流场基频接近的低频扰动与湍流结构的耦合程度较相对的高频扰动强。

2) 扰动使边界层中小尺度结构增多，高频扰动在这一点上作用更明显。

3) 在湍流边界层内 0.3 倍边界层厚度处引入的周期扰动不能到达边界层边缘传递到边界

层外，即影响主流的流动。

4) 在湍流边界层外层引入的不同频率的周期扰动，都存在着沿法向衰减的趋势，而且具有高频扰动衰减快低频扰动衰减慢的规律。

参 考 文 献

1 王立坤，舒玮 人工扰动信号在湍流边界层中的衰减. 实验力学，1999，12(14)：433

2 么胜洪，舒玮 壁湍流外层周期扰动对内层脉动特性的影响. 中国科学（A 辑），1991，23(4)：385

3 Hussain AKMF，Reynolds WC. The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Part2.Experimental results. *J Fluid Mech*，1972，54：241

4 Kim HT，Kline SJ，Reynolds WC. The production of turbulence near wall of a smooth wall in a turbulent boundary layer. *J Fluid Mech*，1971，(50)：133

旋转斜压流体中急流演化的实验研究

魏　岗*,**　苏晓冰**　马晨明*
*(上海大学应用数学和力学研究所，上海 200072)　**(解放军理工大学，南京 211101)

摘要　根据斜压不稳定的一般理论，以 Burger 数作为斜压不稳定临界判据，实验结果与理论分析基本一致；通过实验，探讨了旋转流体斜压波中表面波状急流及急流三维温度结构的演化规律。

关键词　斜压不稳定，旋转流体，急流

引　言

急流(jet stream)是一种大气运动的典型特征形式，转环系统内斜压流体中的急流结构与IMO（国际气象组织高空技术委员会）定义的急流具有极其相似的特征，同时它也是判断这一非线性系统中各平衡态和非平衡演化的主要特征形式。

在实验室模拟方面，早期的工作有对表面稳定的急流的研究[1~3]；对负径向温度梯度下急流的研究[4]，但未涉及急流的内部结构；对表面不稳定波状急流的振荡研究[5]；对急流频谱分析的研究[6~8]；文献[9]用实验获得了表面急流温度分布的精细结构，此外，还有考虑 Ekman 效应，β 效应等更接近实际的实验模拟。但其对急流影响的研究亦只限于对表面特征变化的讨论。

本文通过实验方法探索了具有负径向温度梯度下转环系统中表面急流演化的一般特征，由精细地测量对流槽中的三维温度，研究了急流的三维温度结构的演化规律。根据斜压不稳定的一般理论，将 Burger 数做为旋转斜压流体中急流不稳定临界判据的实验参数。

1　实验装置和方法

实验装置同文献[13]。表面急流的速度场测量由双光束型二维激光多普勒（LDV）测速仪采用后向接收完成，急流温度场的测量由多探头自动检测温度仪完成，测量方法同文献[9]。

2　实验的数学模型

2.1 流体运动的基本假设

根据旋转斜压流体实际运动特点，引入下列假设：

(1) 考虑不可压缩的 Boussinesq 流体，其密度满足 $\rho=\overline{\rho}+\rho'=\overline{\rho}\left[1-\alpha(T-\overline{T})\right]$，$\alpha$ 为热膨胀的常系数，$\overline{\rho},\overline{T}$ 分别为平均密度和平均温度。

(2) 考虑对流室的宽度远小于其平均半径，即，此时忽略曲率的几何效应，极坐标可变换为笛卡尔直角坐标，即：$(x,y,z)=\left[\dfrac{1}{2}(b+a)\phi,\quad -\left(r-\dfrac{1}{2}(b+a)\right),\quad z\right]$

(3) 考虑稳态密度 $\rho_0(y,z)=Ay+Bz$，其中，$A=\partial\rho_0/\partial y$，$B=\partial\rho_0/\partial Z$ 为常数。

(4) 忽略内区的黏性效应$(\nu=0)$和热传导效应$(\kappa=0)$，但需考虑边界的 Ekman 效应。

(5) 考虑小扰动假设，对物理量 $f(r,t)=f_0(r)+f_1(r,t)$ 有：$f_0(r)>>f_1(r,t)$。

2.2 运动方程和边界条件

根据上述假设，描述旋转斜压流动运动基态和扰动方程[11]可化为

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial z}=0 \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}=0$$

$$2\Omega v_0=\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial p_0}{\partial x} \qquad \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}+w_1\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}z}-2\Omega v_1=-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial p_1}{\partial x}$$

$$r\Omega^2+2\Omega u_0=-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial p_0}{\partial y} \qquad 和 \qquad \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}+2\Omega u_1=-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial y_1}{\partial y}$$

$$0=-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial p_0}{\partial z}-g \qquad \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial p_1}{\partial z}-\frac{\rho_1}{\overline{\rho}}g$$

$$u_0\frac{\partial \rho_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial \rho_0}{\partial y}+w_0\frac{\partial \rho_0}{\partial z}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}\rho_1}{\mathrm{d}t}+v_1\frac{\partial \rho_0}{\partial y}+w_1\frac{\partial \rho_0}{\partial z}=0$$

其中 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+u_0\frac{\partial \rho_0}{\partial x}$。考虑侧边界的无滑移条件和上、下底边界的Ekman抽吸效应，则有边界条件

$$y=\pm\frac{1}{2}(b-a), \quad u_0=v_0=w_0=0$$

$$z=-\frac{1}{2}\mathrm{d}, \quad w_0=0, \quad w_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\Omega}\right)^{1/2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)$$

$$z=\frac{1}{2}\mathrm{d}, \quad w_0=0, \quad w_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\Omega}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)$$

引入无量纲的热力Rossby数(RO_T)，Burger数(B)和Tayler数(Ta)为

$$Ro_T=g\mathrm{d}\frac{(\partial\rho_0/\partial y)}{4\Omega^2\overline{\rho}(b-a)}, \quad Ta=\frac{4\Omega^2(b-a)}{dv^2}, \quad B=-g\mathrm{d}^2\frac{(\partial\rho_0/\partial z)}{4\Omega^2\overline{\rho}(b-a)}=\frac{\mathrm{d}^2}{(b-a)}\frac{N^2}{f^2}$$

其中 $N=\left[-g\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\right)\Big/\overline{\rho}\right]^{1.2}$ 为B-V频率，$f=2\Omega$ 为地转参数，无量纲参数 RO_T, Ta 在实验中的物理含义在文献[9]中已给出，无量纲参数B反映了重力分层在旋转流体中对斜压不稳定的作用。

2.3 斜压不稳定的讨论

将方程和边界条件无量纲化，根据实验中测量的平均结果 $Ro_T\approx 0.2$，它可作为摄动参数，则各物理量可展开为 $f_1(r,t)=f_{(0)}+f_{(1)}Ro_T+f_{(2)}Ro_T{}^2+\cdots$，由此可获得 Ro_T 的各阶方程，其中 $O(1)$ 阶方程满足严格的地转关系即：$v_0=\partial p_0/\partial x,\ u_0=-\partial p_0/\partial y$，而由 $O(Ro_T)$ 阶方程和稳定性的一般分析可获得临界的 B 数 $B_{cr}\approx 0.581$，当 $B>B_{cr}$ 时，系统是稳定的，反之，系统处于不稳定状态。

3 测量结果和分析

3.1 斜压不稳定性的分析

表1为以B数作为斜压不稳定分析的实验数据，表中 B_{cr} 大致在0.36~0.50附近，与理论分析基本一致。其物理图象可理解为：随着水平径向温度梯度的增大，将形成速度在铅直方向上强烈的切变，使系统向斜压不稳定方向发展，最终导致斜压波的形成；另一方面，速度在

表1

实验内容	B	Ω	N	T_b-T_a	m
1	0.814	0.246	0.465	10.9	对称
2	0.782	0.382	0.399	10.2	对称
3	0 714	0.246	0.443	9 9	对称
4	0.739	0.246	0.443	10.0	对称
5	0.504	0.244	0.205	2 8	对称
6	0.361	0.568	0.403	9.6	5
7	0.315	0.694	0.410	10.7	6
8	0.257	0 694	0.416	10.3	7
9	0.250	0 568	0.336	5.8	8
10	0.184	0 959	0.487	13.0	10
11	0.155	1.091	0.570	14.0	10
12	0.152	1.237	0.571	15.3	10
13	0.124	0.959	0.399	9.7	9
14	0.049	1.237	0.324	3.3	不规则
15	0.035	0.909	0.212	3.2	不规则

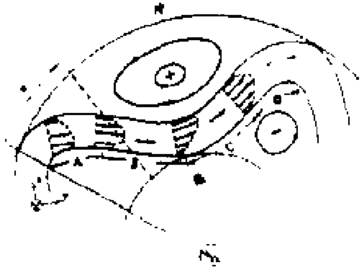


图1 表面波状急流的速度分布剖面图

铅直方向上的切变有助于重力稳定性发展，因为若转速不变，B 增大，则N相应增大，当N^2足够大时，重力稳定作用将抑制斜压不稳定，从而使斜压波消失，导致对称流形。

3.2 表面波状急流演化的一般特征

在具有负径向温度梯度的转环系统中，由于强烈的热对流及科氏力和黏滞力的作用，当无量纲状态参数(Ro_T,Ta)在一定范围内时，紧靠内壁(热源)和外壁(冷源)附近会产生一对负、正热力涡旋，它们将维持一条具有一定宽度、呈波状的切变流动，即表面波状急流。当转台以角速度Ω 逆时针旋转时，表面波状急流会以角速度ω 相对于转台作顺时针漂移。

图1是本文用LDV对具有负径向温度梯度的旋转系统中稳定的表面波状急流的速度分布测量的结果的剖面示意图。根据地转关系，其急流剖面减速段是由于两边界对急流产生阻滞作用，使之处于逆压状态所至。若考虑带状急流边缘与内、外壁接触点附近为热交换域，则急流剖面的加速段是由于热力作用的结果。

表面急流温度分布的主要特点为[9]：急流的边缘附近具有较大的温度梯度；沿急流运动方向，急流中心的平均温度在流向内、外壁时，由小逐渐变大，在从内、外壁流出时，则由大逐渐变小。它表明：表面热量的输送主要靠带状急流完成。

当改变实验条件，急流的宽度W和漂移角速度ω 亦将发生改变。实验表明：急流的相对宽度$W/(b-a)$和相对平均漂移角速度$\overline{\omega}/\Omega$ 与热力Ro_T数无单调关系，但均随Ta数的增大而减小，如图2。由此可见，急流的相对宽度与平均漂移角速度之间具有近似线性的依赖关系，根据Ta数具有“旋转雷诺数”的物理意义，因此科氏力与黏性力的相对比值成为决定上述两特征变化的重要因素。

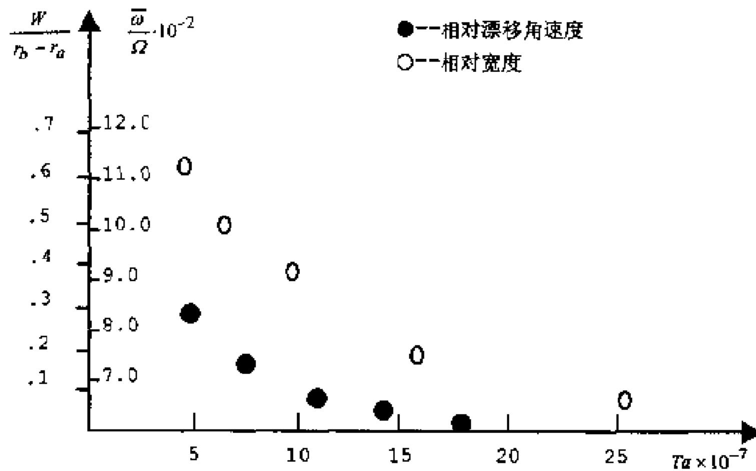


图2 急流相对宽度和相对漂移角速度随Ta数的变化

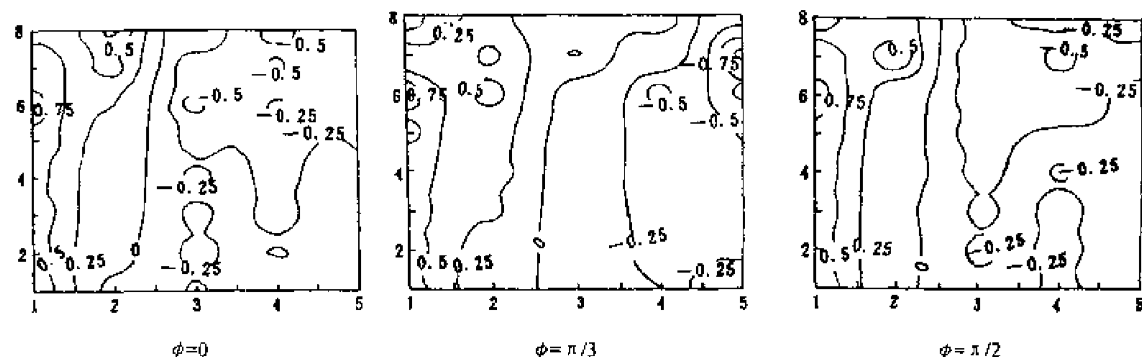
3.3 急流的三维温度结构的演化

Hide等[7]利用彩色拖影法观察了旋转环中对流系统不同高度处的运动情况，Hide[7]、魏岗[9]

等分别实验证明了表面规则波状急流的速度分布和取周向平均的扰动温度结构特征一直延伸到对流槽的底部。为了研究急流的三维演化结构，本文考虑径向平均的扰动温度 $T_r'(r,\varphi,z)=T(r,\varphi,z)-\overline{T}_r(\varphi,z)$ 在水平面和径向垂直平面上的分布。

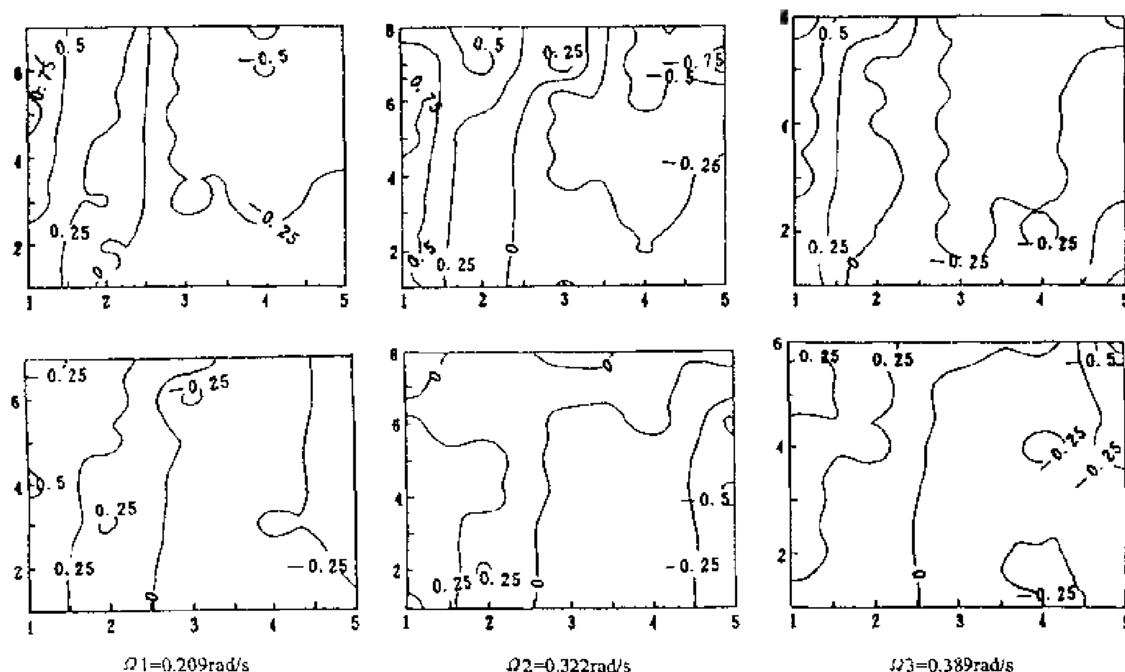
图3是实验给出的稳定的3波态 $T_r'(r,\varphi,z)$ 在径向垂直平面上的分布。图中为对应图2的在不同周向角 $\varphi(0\sim 2\pi/3)$ 处的分布，其具有明显的周期性，且热力涡旋可延伸至底部。紧靠热源（内壁）正的热力涡旋强度明显强于紧靠冷源（外壁）负的热力涡旋强度。正热力涡旋（紧贴内壁）中上部具有较高的强度，这亦进一步验证了[13]中结论。

图4为当转速 Ω 增加时，保持水平径向温度梯度不变，$T_r'(r,\varphi,z)$ 在径向垂直平面上的演化，图中正热力涡旋($\varphi=0$)的强度随 Ω 增加而减弱，负热力涡旋($\varphi=\pi/3$)的强度随 Ω 增大而增强。表明热力能量随着转速增加是沿正热力涡旋向负热力涡旋方向输送。



$\phi=0$　　$\phi=\pi/3$　　$\phi=\pi/2$

图3　波状急流的径向扰动在径向垂直平面上沿周向的分布



$\Omega1=0.209$rad/s　　$\Omega2=0.322$rad/s　　$\Omega3=0.389$rad/s

图4　径向温度扰动在径向垂直平面上随转速的变化（上图 $\phi=0$，下图 $\phi=\pi/3$）

4　主要结论

(1) Burger数B 同时描述了分层和旋转对斜压不稳定的影响，其实验结果与理论分析基本

一致。

(2) 在沿径向的垂直面上，正热力涡旋强度随转速增加而减弱，负热力涡旋强度随转速增加而增强。表明热力能量主要在正、负热力涡旋之间传输。

参 考 文 献

1 Hide R. An experimental study of theormal convection in a rotating fluid. *Phill trans Roy Soc*, Japan, 1958, A205: 441~478

2 Fultz D etc. Studies of thormal convection in a rotating cylinder with some implication for large-scal atmospheric motions. *Meteor Monographys*, 1959, 4: 1~104

3 Fultz WW and Hide R. Thormal convection in a rotating annulus of liquid: Effect of viscosity on the transition between axisymmetric and nonaxisymmetric flow regime. *J Armos Sci*, 1965, 22 : 541~558

4 Koschmider EL. Convection in a rotating annulus with a negative redical temperative gradient. *Graphs Astrophys Fluid Dynamics*, 1978, 10: 157~173

5 Hide R. Some laboratory experiments on free thormal convection in a rotating fluid subject to a horizontal temperature gradient and their relation to the theory of the global atmospheric circulation. London Royal Meteorogical Society Cited as, Rev, 1969

6 Pfeffre R etc. Synoptic features and energetics of wave-amplitude vacillation in a rotating differentially-heated fluid. *J Atm Soc*, 1974, 31

7 Hide R etc. Thermal convection in a rotating fluid subject to a horizontal temperature gradient: spatial and temperoral characteristics of fully developed baroclinic wave. *J Atm Sci*, 1977, 34

8 Katsumi T etc. Radial heat transport and azimuthally averged temperature fields in a differentially heated rotating fluid annulus undergoing amplitude vacillation. *J Met Soc*, Japan, 1985, 63(2)

9 魏岗等. 旋转流体斜压波三维温度结构实验研究. 力学学报, 1994, 26

10 Rogers RH. The effect of viscosity near the cylindrical bounderies of a rotating fluid with a horizontal temperature gradient, Contract, No. AF.61(052)-216, 1961

11 Hide R. Some laboratory experiments free thermal convection in a rotating fluid subject to a horizontal temperature gradient and their relation to the theoy of the global atmospheric circulation, *LABORATORY EXPERIMENTS*, 1970, 551.513.1: 532.5

12 林卫金，魏岗. 旋转系统流动现象实验研究的某些进展. 水动力学研究与进展, 1997, 12(1)

13 Su Xiaobin, Wei Gang. An experimental study on 3D structure of baroclinic wavy jet stream in a rotating annulus subject to a horizontal radial temperature gradient. *Research and Development of Hydrodynamics*, 2000 (to be published)

超大型海洋浮体水弹性响应研究概况 1)

崔维成* 吴有生** 李润培*

*(上海交通大学船舶与海洋工程学院，上海 200030) **(中国船舶科学研究中心，无锡 214082)

摘要 超大型海洋浮式结构物在未来的海洋资源开发和海洋空间利用方面有重要应用前景，但它在波浪中的水弹性响应是该结构物设计过程中所遇到的一个重要技术问题，国际上在这方面已做了大量的研究工作。对国内外关于 VLFS 在波浪中的水弹性响应的研究现状作一简要介绍。

关键词 超大型海洋浮式结构物，水弹性响应，非均匀海洋环境

引 言

21 世纪人类将全面步入海洋经济时代，海洋开发将形成如海洋油气工业、海洋化学工业、深海采矿业等一批新兴产业。面对这一形势，国际海洋工程界从 80 年代后期掀起了研究超大型海洋浮式结构物（Very Large Floating Structures 简称 VLFS）的热潮，已经召开了三次专门主题的国际研讨会[1~3]，同时它也是其它一些著名国际学术会议如 ISOPE[4]，OMAE[5]，ICHMT[6]的主要议题，现在国际上每年在学术刊物和会议上发表的针对超大型海洋浮式结构物的研究论文要超过百篇。

所谓超大型海洋浮式结构物是指那些尺度以公里计的海洋浮式结构物，以区别于目前尺度以百米计的船舶和海洋工程结构物，如海洋平台等。一般而言，VLFS 可以以沿海岛屿或岛屿群为依托，带有永久或半永久性，具有综合性、多用途的功能。它的设置将对某一区域的社会、经济活动乃至政治、军事格局发挥决定性的影响。

与一般的海洋工程结构物相比，VLFS 的水平尺度与高度的比值非常大，是一个极为扁平的柔性结构物，它在海洋环境中的弹性变形与刚体位移是同量级的，这样，在计算流体载荷时不能将弹性变形的影响忽略，必须要考虑结构与流体之间相互耦合作用。因此，超大型海洋浮式结构物在波浪中的响应是一个典型的流固耦合问题，必须要采用 60 年代初期发展起来的水弹性理论（Theory of Hydroelasticity）加以解决。

国际上在这方面已做了大量的研究工作，在消化有关资料的基础上，本文对国内外关于 VLFS 在波浪中的水弹性响应的研究现状作一简要介绍，对今后需要开展的研究工作的方向提出作者们的看法，以供交流。

1 超大型海洋浮式结构物水弹性响应的研究现状

对超大型海洋浮式结构物水弹性响应的研究可能开始于 80 年代后期，到 90 年代初陆续有论文发表[7]。1991 年在美国夏威夷召开了首届超大型浮式结构物的国际专题研讨会[1]，会上有一多篇相关论文发表。随后，在其它一些大型国际学术会议如 ISOPE[4]，OMAE[5]以及相关专业学术期刊上均有论文发表[8]，数量逐年增多。也正是对超大型海洋浮式结构物的水弹

1) 国家自然科学基金（50039010），上海市科技发展基金（00XD14015）和上海交大“985”联合资助项目

性响应研究，促进了水弹性学科的发展并引起船舶与海洋工程界的广泛重视。1994 年国际上又出现了一个“海洋技术中的水弹性”（ICHMT）系列国际会议[6]。目前，VLFS 的水弹性响应研究在 ITTC [8] 和 ISSC[9]中均有相当高的地位。

超大型海洋浮式结构物有两种结构型式：厢式和半潜式。厢式浮体构造简单，维护方便，日本的“Mega-float”就采用这种形式。半潜式浮体虽然构造比较复杂，但水动力性能更佳，适宜在较为恶劣的海洋环境中生存。美国的移动式海洋基地（Mobile Offshore Base，简称 MOB）就是采用立柱下体混合支撑式的 VLFS。

VLFS 水弹性响应的分析方法大致分为直接法和模态分析法。绝大部分的研究均采用模态分析法。模态分析法可以大大地降低自由度数目，但一般来说仅适用于线性系统或特殊的非线性问题。模态分析法有干模态和湿模态两种。如果采用湿模态迭加法来计算 VLFS 的水弹性响应，则湿模态频率和振型的计算就十分重要。在这一计算中关键是要确定附加质量分布和静水刚度矩阵。Hamamoto 等人[10]给出了一组简化的解析公式用于计算任意形状平板的附加质量分布，而 Riggs[11]推导了静水刚度矩阵的计算公式。

最近几年，直接法也逐渐被采用。第一个进行直接法计算的是 Mamidipudi and Webster[12]。他们采用中心有限差分法直接求解耦合的水弹性方程组。Hermans[13]推导了柔性平台在波浪中挠度响应的三维积分-微分公式，并讨论了二维方程的求解问题。他发现采用正交函数展开法是不收敛的，因而也采用了有限差分法计算四阶导数。另一种方法是 Ohkusu and Namba[14]，他们将结构当作一块平板，通过一定的量级分析，忽略小量，最后求解一个六阶微分方程。Kashiwagi[15]提出了另一种时域分析方法。流体仍用压力分布法而结构用振动微分方程。为了避免求解高阶微分方程，他们将挠度和压力化为一组线性代数方程进行求解。Ohmatsu[16]基于正、逆傅里叶变换求响应的时间历程。Kashiwagi[17]比较了直接法和模态分析法的计算结果。数值收敛测试表明这两种方法基本上差不多，给出的预报结果都与试验结果有较好的吻合。结构模型从简单到复杂有梁模型，板模型和三维有限元模型，下面予以分别介绍。

1.1 梁模型的发展

当入射波的方向与 VLFS 的长度或宽度方向一致时，平板可以简化为一根梁来处理。Aoki[18]采用梁模型研究了浅水效应对 VLFS 水动力系数的影响。他发现这一影响是很显著的，尤其是对弹性变形模态附加质量的影响。Fujikubo 等[19]用一维梁有限元模型研究了质量分布、弯曲刚度和入射波幅值沿结构的衰减对结构响应的影响，并讨论了如何通过改变结构参数来改进结构的响应。

Lee and Newman[20]采用板条梁模型分析了多模块铰接的 VLFS 在波浪中的水弹性的重要性。他们定义了一个无量纲刚度参数 S，当 $10^{-6}<S<10^{-2}$ 时，水弹性效应是明显的，当 $S>10^{-2}$ 时，结构可以当作刚体。当 $S<10^{-6}$ 时，结构完全弹性，当吃水也为零时，结构与波浪一起变形。但当吃水不为零时，他们发现有放大系数。他们的结果表明，简单地把 VLFS 简化成无厚度的板有可能出现偏危险的结果。

Masaoka 等[21]的方法更简单，除了结构用梁模型简化外，他们采用线性水波理论假定，直接给出速度势与板的挠度的关系式，他们认为这一简化方法给出的结果是可以接受的。但作者采用他们的公式进行编程计算，发现得不到他们的结果。作者认为，他们只考虑速度势的稳态项而忽略其它项，有可能会有较大的误差，但这一简化方法的思想值得吸取。

Riggs and Ertekin[22]采用“纵荡力”用 Morison 公式修正的切片理论和梁模型分析了分别有 5 个模块和 16 个模块连接而成的 VLFS 的动响应，并与三维分析方法作了对比，发现二维的简化方法尽管对单个模块的运动可以作出较好的预报，但实际上并不能精确地预报连接之间的载荷。

1.2 板模型的发展

Ohkusu and Nambu[14]将势流理论与平板方程相结合，通过量级分析，忽略高阶小量，获得了一个六阶微分方程，将流体域分成两个区，用协调条件进行直接求解。为了考虑剪切变形的影响，Sim and Choi[23]采用 Mindlin 平板一阶剪切理论研究了斜浪中 VLFS 的水弹性响应。

绝大部分的研究把 VLFS 简化为均匀各向同性平板，而 Endo and Yoshida[24]推导了正交各向异性板的 Timoshenko 振动方程，并用它来研究弯曲刚度、剪切变形(Shear Deformation)和转动惯量 (Rotary Inertia) 的影响。他们发现，对于一般的浅吃水 VLFS，剪切变形和转动惯量对 VLFS 弹性响应的影响可以忽略，但当水深增加或有效剪切墙变小时，它们的影响将变得重要。 Webster 也采用正交各向异性板的模型来探讨 VLFS 的优化结构型式。Mikami 等[25]研究了各向异性刚度对 VLFS 水弹性响应的影响。平板模型还被其他人用来研究防波堤、近海岸、短峰不规则波对 VLFS 水弹性响应的影响

在用平板模型计算得到规则波作用下的 VLFS 的弯矩传递函数基础上，Endo and Yago[26]也采用短期预报和长期预报的方法研究了 VLFS 的设计载荷和它的不确定性。他们发现用两种不同的长期预报的方法给出的极限载荷是相近的，但用短期预报推断出的极限载荷比用长期预报推断出的极限载荷更保守。

1.3 有限元模型的发展

Goo and Yoshida[7]用三维源分布法和有限元法分析了环状半潜式浮体，理论与试验结果吻合良好。在用边界元求解速度势时通常采用定常面元法 (constant panel method)，但 Newman[27]等人发现采用高阶边界元来计算 VLFS 的水弹性响应更有效。基于这样的思想，Hamamoto[28]提出了有限元和边界元混合的方法，Kashiwagi[15]等提出了采用高阶 B 样条函数用于离散结构的挠度和流体压力，并用伽辽金法将高阶微分方程转化为线性代数方程。Seto and Ochi[29]提出了有限元与无限元相结合的混合方法。

1.4 提高计算效率的措施

如何减少结构湿表面的面元数量是提高计算效率的一个重要措施，在这一方面，吴有生和他的同事利用左右舷及前后的双对称性，提出了双复合奇点分布法[30]，仅在流场和结构的 1/4 区域内求解全部流场和结构的水弹性问题。

精确而又快速地求得时域格林函数及其导数的值是用时域格林函数法求解线性和非线性水动力学问题的关键，黄德波[31]针对无限水深情况时域格林函数的数值计算问题，推导了有关的简化计算公式，同时采用双参数制表插值方案，大大地提高了计算效率。Wang 等[32]利用格林函数和它的导数随距离（kR）迅速衰减的特点，引进了一个临界值γ，当$kR>\gamma$时，他们将格林函数和它的导数设置为零，这样大大地减少了格林函数及其导数的计算次数。采用这一措施带来的另一个好处是使得系数矩阵更加稀疏。利用稀疏矩阵的迭代求解法还可以提高随后的线性代数方程的求解效率，使得分析实际 VLFS 成为可能。

Kagemoto 等[33]总结了他们组提出的三种提高 VLFS 水弹性响应计算效率的方法。第一

种方法称为模态分析加速法。对于长或宽的均匀结构，中间绝大部分区域的奇异点分布规律可以假定为已知的，此时面元可以划得很大，只有在边缘附近由于变化剧烈，才需要小单元，这样可以大大地减少面元的数量，提高计算效率。第二种方法称为子结构分析法。把 VLFS 划分成几个子结构，再把每个子结构分成多个小结构单元。每个小结构单元的垂向变形看作是小结构的刚体运动，结构之间的约束用附加恢复力来处理。第三种方法是专门针对多立柱支撑式的 VLFS 提出的。由于立柱的数量非常多，达上万个，而且相互之间是相互干扰的，这样用严格的面元法来计算根本不可能。Kagemoto 等[13]发现，只要保持波的渗透率（Permeability of waves）相同，其计算出的水动力响应是很接近的，这样可以将多立柱支撑的 VLFS 等效成只有几个立柱支撑的 VLFS，可以大大地减少计算工作量。Kashiwage[15]将这一方法发展成为层次相互作用理论（Hierarchical Interaction Theory）。在 HIT 方法中，大量的立柱被组合成几个虚拟的结构，每个虚拟结构中的大量柱子又可以组合第二层次上的几个虚拟结构，这个过程可以重复到任意层次，在每个层次上考虑结构之间的相互作用，相互作用的信息可以在上下层次之间相互传递。而 Iijima 等人[34]则采用完全子结构法来处理立柱支撑式的 VLFS。将 VLFS 分成几个子结构，每个子结构由一组立柱，称为组体（Group Body），支撑。每个组体被当成一个物体，用一般的奇异分布法计算。然后将每个子结构的自由度区分为内部自由度和界面自由度，采用自由度凝聚的方法消去内部自由度只将包含界面自由度的各个子结构集成起来，这样整体系统的自由度数目大为减少。这种方法可以看作是对 Kagemoto et al.[33] 第二种方法的改进，理论上来说，对于任意结构系统的分析都适用。

2 超大型海洋浮式结构物水弹性响应研究的发展方向

2.1 非均匀海洋环境的影响研究

非均匀海洋环境的问题在第一届国际 VLFS 研讨会[1]的讨论中就有专家提出，其主要的考虑是，常规的海洋工程结构物因所占海洋面积非常小，一般都是假定它们处于一个均匀的随机海洋环境中，因而所有海浪谱均是用波高和周期两个参数来描述的。而 VLFS 从一端至另一端要跨越数公里，这么长的距离还假定海洋是均匀的，就有可能与实际情况发生很大的差异。因此，需要建立一种新的随位置缓变的海浪谱，用于作为 VLFS 水弹性响应的激励。但至今为止，这方面研究的报道还很少。其主要原因是一旦采用这样的海浪描述方法，传统的势流理论到底是否还适用就是一个疑问。即使还适用，考虑最简单的推广，将常规的规则波的幅值或频率假定为随位置渐变的空间函数，则入射波的速度势公式就要重新给出，目前还没有这方面的报道。其次，如果再考虑时间上的随机性，如何建立随位置渐变的局部海区的海浪谱，其难度就更大。即使给出了海浪谱，传统的谱分析理论是否适用，也需要研究。一旦采用这样的新谱，过去的水弹性基本方程都得重新修改，此时响应如何计算又是一个全新的数学问题。这种非均匀波浪场对 VLFS 的水弹性响应甚至结构的安全性又带来什么样的的影响等等，都需要重新研究。因此，对于 VLFS 这样一种特殊的海洋工程结构物，为了比较精确地求解它在海浪中的水弹性响应，有一系列理论问题需要解决，对于这些理论问题包括数值计算问题的研究可能给学科的发展带来意想不到的好处。

2.2 提高计算效率的措施研究

从前面的分析中可以看出，VLFS 水弹性响应计算的最关键之处就在于数值计算的精确和快速。这两个要求本身是一对矛盾，有时需要作出合理的平衡。在 2.4 节中比较详细地介

绍了已经提出的几种提高计算效率的措施。通过我们的分析，认为下列这几方面应作为首选研究方向。

(1) 格林函数及其导数的快速求解方法。黄德波只推导了无限水深的格林函数，而对于VLFS 来说，经常位于浅水区，因此，有限水深的格林函数更加符合实际，相似的研究需要开展，能否找到适用于任意水深的格林函数也值得探讨。

(2) 动态子结构法与层次相互作用理论相结合，如何引入并行计算的方法，充分利用计算机软硬件的能力，提高计算效率和解题规模。

(3) 对某些耗时较多的复杂运算，通过大量的预先计算，建立回归公式代入计算方法，从而可以节省实际结构分析的时间。

Kashiwagi[15]曾对 VLFS 的水弹性响应研究现状作了回顾，结合他自己的工作经历，他认为层次相互作用理论是今后的一个重要研究方向。

2.3 非线性因素的影响研究

目前绝大部分的 VLFS 水弹性响应研究都是采用单向的规则或不规则波，而 Maeda 和他的同事[35]研究了两个方向的规则波或不规则波的相互作用，并且采用 Ohmatsu 提出的正反傅里叶变换的方法研究了二阶波浪力和飘移力。缪泉明等[36]采用 Adams 预报-修正方法在时域中求解基于 Cummins 脉冲响应概念的运动方程，考虑了二阶波浪飘移力和非线性系泊力。吴有生等比较系统地研究了柔性浮体的二阶水动力问题。

厢式 VLFS 的结构模拟通常采用平板模型，目前采用的均是等效的各向同性或正交各向异性，而实际的加强筋是离散的，因此，比较真实的模拟是采用加筋板格模型。在考虑横向剪切变形方面，目前用到的是 Mindlin 一阶剪切理论，这方面还有 Reddy 高阶剪切理论可以选用。因此，在描述结构响应方面也还有一些改进余地，当然这样处理后问题也变成非线性了。

2.4 适用于设计阶段性能估算的简化方法研究

与对其它复杂工程问题的研究一样，对 VLFS 水弹性响应研究也应该采取两条腿走路的方法，一方面在理论上要进一步深化，使得对实际问题的描述更真实，从而使计算结果更精确。但这往往是以牺牲大量计算时间为代价的。如果一种计算方法需要的计算时间很长，则在设计过程中往往无法使用。因此，从实用角度来说，我们还需要有一定精度但能很方便使用的估算方法，目前这方面的研究工作也有一些，但还远远不够。最近，Masaoka 等人[21]提出的利用线性水波理论假定，直接给出速度势与板的挠度的关系式的方法，可以大大地简化速度势的求解。他们只研究了梁模型，如何将它推广到正交各向异性板模型值得作更深入的研究，从而为建立简化方法开辟一条新的道路。

参 考 文 献

1 Ertekin RC and Riggs HR. Proceedings of the First International Workshop on Very Large Floating Structures-VLFS'91, Honolulu, Hawaii, USA, April 24-26, 1991

2 Proceedings of the Second International Workshop on Very Large Floating Structures-VLFS'96, Hayama, Japan, November 25-28, 1996

3 Ertekin RC and Riggs HR. Proceedings of the Third International Workshop on Very Large Floating Structures-VLFS'99, Honolulu, Hawaii, USA, 1999

4 Proceedings of the International Offshore and Polar Engineering Conference. Annual Conference Series (ISOPE) from 1991~1999

5 Proceedings of the International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering. Annual Conference Series (OMAE) from

1991~1999

6 Kashiwagi M, Koterayama W and Ohkusu M Proceedings of the Int Conf on Hydroelasticity in Marine Technology(ICHMT), 1st, edited by Faltisen O. 1994, Trondheim, Norway; 2nd, Fukuka, Japan, December 1-3, 1998

7 Goo JS and Yoshida K. A numerical method for huge semisubmersible responses in waves. SNAME Transactions, 1990, 98, 365~384

8 Proc of the 22nd International Towing Tank Conference, Soeul and Shanghai, September 8-12, 1999

9 Proc of the 14th International Ship and offshore Structures Congress, Nagasaki, Japan, October 2-6, 2000

10 Hamamoto T and Sekine S. Simplified equation for estimating added mass distribution over large floating structures. ISOPE2000, 2000. 57~64

11 Riggs HR. Hydrostatic stiffness of flexible floating structures. VLFS'96, 1996. 229~234

12 Mamidipudi P and Webster WC. The motions performance of a mat-like floating airport. ICHMT'94, 1994. 363~375

13 Hermans AJ. A boundary element method to describe the excitation of waves in a very large floating flexible platform. ICHMT'98, 1998. 69~76

14 Ohkusu M and Namba Y. Hydroelastic behavior of a large floating platform of elongated form on head waves in shallow water. ICHMT'98, 1998. 177~184

15 Kashiwagi M. Research on hydroelastic responses of VLFS: Recent progress and future work. ISOPE'99, 1999, 1: 17~26

16 Ohmatsu S. Numerical calculation of hydroelastic behavior of VLFS in time domain. ICHMT'98, 1998. 89~98

17 Kashiwagi M Direct method versus a mode-expansion method for calculating hydroelastic response of a VLFS in waves. ISOPE'98, 1998, 1: 215~222

18 Aoki SI. Shallow water effect on hydrodynamic coefficients of very large floating structures. The Proc of the 7th International Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE'97), 1997, 1: 253~260

19 Fujikubo M, Yao T and Oida H Dynamic response analysis of very large floating structures in waves using one-dimensional finite element model. OMAE'97, 1997, 6: 107~114

20 Lee CH & Newman JN. An assessment of hydroelasticity for very large hinged vessels. ICHMT'98, 1998. 27~36

21 Masaoka K, George T, Tsubogo T, Okada H and Kakita T. A simplified estimation method for the dynamic response and strength of long barge structures under extreme wave loads. OMAE99, 1999

22 Riggs HR and Ertekin RC. Approximate methods for dynamic response of multi-module floating structures. VLFS'91, 1991. 333~354

23 Sim IH & Choi HS An analysis of the hydroelastic behavior of large floating structures in oblique waves. ICHMT'98, 1998. 195~200

24 Endo H and Yoshida K. Timoshenko equation of vibration for plate-like floating structures. ICHMT'98, 1998. 255~264

25 Mikami T, Kobayashi M, Shimada K, Miyajima S, Kashiwagi M and Ohkusu M The response of VLFS with anisotropic rigidity in waves. ICHMT'98, 1998 247~254

26 Endo H and Yago K. Long-term prediction of the wave load for VLFS OMAE'97, 1997, 6: 271~279

27 Newman JN, Maniar HD and Lee CH. Analysis of wave effects for very large floating structures. VLFS'96, 1996. 135~142

28 Hamamoto T. 3D hydroelastic analysis of module linked large floating structures using quadratic BE-FE hybrid model. ICHMT'98, 1998. 37~46

29 Seto H & Ochi M A hybrid element approach to hydroelastic behavior of a very large floating structure in regular waves. ICHMT'98, 1998 185~194

30 Wu YS, Wang DY, Riggs HR and Ertekin RC. Composite singularity distribution method with application to hydroelasticity. *Marine Structures*, 1993a, 6(2&3): 143~163

31 黄德波. 时域格林函数及其导数的数值计算 中国造船, 1992, 33(4): 16~25

32 Wang SQ, Ertekin RC and Riggs HR. Computationally efficient techniques in the hydroelasticity analysis of very large floating structures. *Computers and Structures*, 1997, 62(n): 603~610

33 Kagemoto H, Fujino M, Murai M & Zhu T. Some efficient calculation techniques for hydroelastic analyses of a very large floating structure in waves. ICHMT'98, 1998a 201~210

34 Iijima K, Yoshida K, Suzuki H. Hydrodynamic and hydroelastic analyses of very large floating structures in waves. OMAE'97, 1997, 6: 139~145

35 Maeda H, Masuda K and Ikoma T. Hydroelastic responses of pontoon type very large floating offshore structure (The 3rd report). The effects of 2nd-order wave loads. *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, 1997, 182: 319~328

36 Miao QM, Du SX, Dong SY and Wu YS. Hydrodynamic analysis of a moored very large floating structure. VLFS'96, 1996. 201~208

绕二维翼型空泡流的研究

吴　磊　鲁传敬　薛雷平

（上海交通大学建筑工程与力学学院，上海 200240）

摘要　研究了黏性、非定常空泡流。应用两相流模型数值求解层流、中等 Reynolds 数、小攻角二维翼型空泡流的 Navier-Stokes 方程。利用水汽物理性质建立水相、汽相以及水汽相变的密度和压力间本构方程；同时假设密度的人工过渡区以数值模拟空泡面。本研究采用有限体积数值方法，具有良好的向三维空泡流问题的扩展性。

关键词　两相流，空泡

引　言

空化现象普遍存在于液体中；在流场中，通常首先在固壁附近，当流动导致局部压力低于水（本文研究的流质）的饱和蒸汽压时，就会发生空化现象，微小的气核发展成肉眼可见的气泡（空泡），甚至发展为成片的附着于物体表面的空泡。在水下航行体、水下推进器、高速泵以及喷管中可以观察到大量空化现象。空化导致固体表面剥蚀，产生噪声，空泡的存在影响流体动力特性。

目前空泡流求解方法可主要归纳为两类：边界元法和求解 Navier-Stokes 方程方法。前者基于势流理论，在边界上布置源汇或涡，同时假设空泡尾流模型；忽略或简化黏性效应。Kinnas[1, 2]和 Lee[3]等用此方法进行了大量研究。这类方法数值模拟简单，并能在合理的闭合模型下获得与实验数据吻合的结果；所不足的是它对空泡初始点位置、空泡尾流模型等提出较高要求，同时三维应用较困难。后者应用两相流理论建立黏性流场的 Navier-Stokes 方程，同时建立密度和压力之间的辅助关系封闭方程组。

Kubota et al[4]基于 Rayleigh-Plesset 方程建立 BTF (Bubble Two-phase Flow)方法；此方法适合云雾空泡研究。Chen & Heister[5]依据空泡内压力等于水的饱和蒸汽压 P_V 的一般假定，提出辅助关系：$D\rho/Dt = C(P - P_V)$，$P < P_V$；C 为非常大的常数（如 5000，50 000）以保证泡内压力等于饱和蒸汽压。Delannoy et al[6]假设汽化和凝结瞬态发生，建立密度和压力的函数关系

$$\rho = \begin{cases} \rho_l & P > P_v + \Delta P \\ \rho_v & P < P_v - \Delta P \\ \rho_v + \Delta\rho\left[1 + \sin\left(\dfrac{P - P_v}{\Delta\rho\, a_{\min}^2}\right)\right] & \text{elsewhere} \end{cases} \tag{1}$$

式中 $a_{\min}$ 为最小声速，$\Delta\rho = 1/2(\rho_l - \rho_v)$，$\Delta P = 1/2\pi a_{\min}^2 \Delta\rho$，$\rho_l$ 和 ρ_v 分别为水和汽的密度。Reboud & Delannoy[7]进一步引入湍流模型计算非定常空泡流。Ventikos & Tzabiras[8]通过求解能量方程，依靠水汽性质的大量实验数据，获得密度、黏性、温度、热传导率以及定压

比热随压力和焓的变化关系，求解定常或非定常空泡流问题；Reynolds 数取10^3量级；汽相在空泡流研究中的地位得到进一步肯定。

在本文中，我们忽略温度场的细微变化，根据水汽变化的等温变化曲线建立密度和压力的辅助关系；在全流场建立 Navier-Stokes 方程，求解定常和非定常黏性空泡流。由于空泡面附近的高马赫数，整个流场是局部可压缩的；另一方面，可压缩系数 $k=\partial\rho/\partial p$ 在空泡面附近（过渡区）取较高值，在其它区域取较低值或零。这样我们得到整个流场的四个区域：泡内区，高可压缩过渡区，低可压缩区和不可压缩区。

1 控制方程和求解过程

1.1 控制方程

守恒型 Navier-Stokes 方程具有以下偏微分形式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j u_i)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(e_{ij}-\frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij}\right)\right] \tag{3}$$

其中 $e_{ij}=\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$

采用积分形式并化简，可得

$$\int_V\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\mathrm{d}V+\oint_{\partial V}(\rho\boldsymbol{u}\phi)\cdot\delta\boldsymbol{A}-\oint_{\partial V}(\Gamma\nabla\phi)\cdot\delta\boldsymbol{A}=S_\phi \tag{4}$$

其中 $\phi=(1\quad u\quad v)^{\mathrm{T}}$，$\Gamma=(1\quad\mu\quad\mu)^{\mathrm{T}}$，$S_\phi$为源项。

密度和压力间的本构关系通过等温（20℃）条件下水和水蒸汽物理性质表[9]获得。可压缩区与不可压缩区的划分目前还没有统一标准；Hoeijmakers 等[10]假定如果在一个时间步长内局部压力 $p>p_v+\Delta p+0.1\times(1/2\rho_l U_\infty^2)$，那么可以认为在这一时间步结束时物理性质保持不变。依此假设，可以得到

(1) 在泡内区($p<p_v-\Delta p$)，本构关系满足 $p/\rho=RT=\mathrm{const}$，$k=\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}p=1/RT\approx0$；

(2) 在高可压缩过渡区($p_v-\Delta p\le p\le p_v+\Delta p$)，这里假定是线性过渡，斜率 $k=\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}p$，理论上越大越符合物理实际，本文中取 $k=1000$，密度由压力插值获得；

(3) 在低可压缩区 $(p_v+\Delta p<p<p_v+\Delta p+0.1\times(1/2\rho_l U_\infty^2))$，$\rho=\rho_l$，$k$ 取小值；本文中取 k 等于 0.1，0.01 和 0.001，计算结果没有明显区别。

(4) 在不可压缩区 $(p\ge p_v+\Delta p+0.1\times(1/2\rho_l U_\infty^2))$，$\rho=\rho_l$，$k=0$。

1.2 求解过程

本文采用有限体积法离散方程组，建立 C-型正交网格系统，求解量统一安排在控制点上。空间上采用迎风格式，时间上二阶离散化，可推导出以下形式离散方程

$$\left(\frac{3\phi-4\phi_P^{n-1}+\phi_P^{n-2}}{2\Delta t}\right)\Delta V_P+A_P\phi_P=A_N\phi_N+A_S\phi_S+A_E\phi_E+A_W\phi_W+S_\phi \tag{5}$$

最终可得

$$\left(\frac{3\Delta V_P}{2\Delta t}+A_P\right)\phi_P = A_N\phi_N + A_S\phi_S + A_E\phi_E + A_W\phi_W + \left(S_\phi + \frac{\Delta V_P}{2\Delta t}\left(4\phi_P^{n-1}-\phi_P^{n-2}\right)\right) \tag{6}$$

其中，Δt 为时间步长，ΔV_p 为控制体体积，A_i 组成系数矩阵，上标 $n-1$ 和 $n-2$ 表示前二个时间步的解，S_ϕ 为源项。

采用 SIMPLE 型压力修正方法叠代求解方程组，具体数值求解过程如下

(1) 初始化变量。

(2) 新时间步。

(A) 外叠代过程。

(B) 压力和密度作为已知值，求解动量方程。

(C) 内叠代过程。

(a) 求解压力修正方程。

(b) SIMPLE 法修正压力、速度。

(c) 根据本构关系修正密度、黏性和 k 等。

(d) 回到(a)

(D) 回到(A)

(3) 回到(2)，进入下一时间步，重复叠代过程直到收敛。

数值计算选用 NACA 翼型，网格数分别为 197×50 和 297×50，时间步长 Δt 选取 0.01，0.005 和 0.001，Reynolds 数为 10^6 量级，空泡数约为 0.7。计算中，以全湿绕流结果为初始值。

2 算　例

2.1 定常空泡

首先，我们采用伪时间步方法计算定常空泡；当时间步足够大时，结果收敛为定常解。

第一个算例我们选用 NACA0009 翼型，网格数为 197×50，时间步长 Δt 选取 0.01，Reynolds 数为 2.8×10^6，空泡数约为 0.7。

结果如图 1 和图 2 所示。

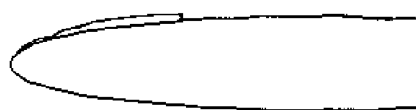


图 1　等密度线，NACA0009 翼型，$\alpha=2.5°$

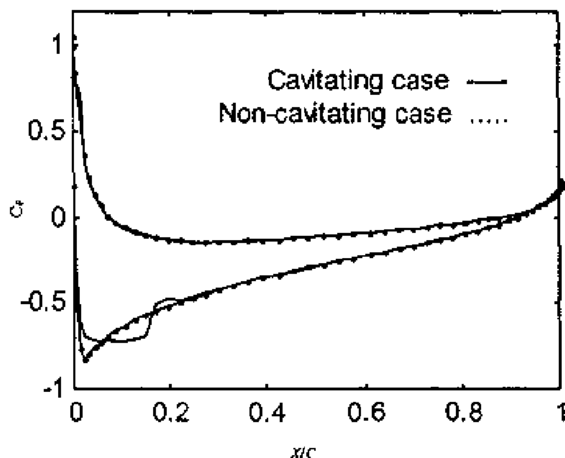


图 2　压力系数曲线

第二、三个算例我们选用 NACA0012 翼型，网格数为 297×50，时间步长 Δt 选取 0.01，Reynolds 数为 3.0×10^6，空泡数约为 0.7。攻角选取 2° 和 3°。

结果如图 3~图 6 所示。

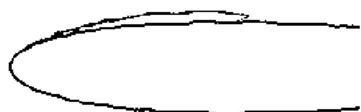


图 3 等密度线，NACA0012 翼型，$\alpha=2^{\circ}$

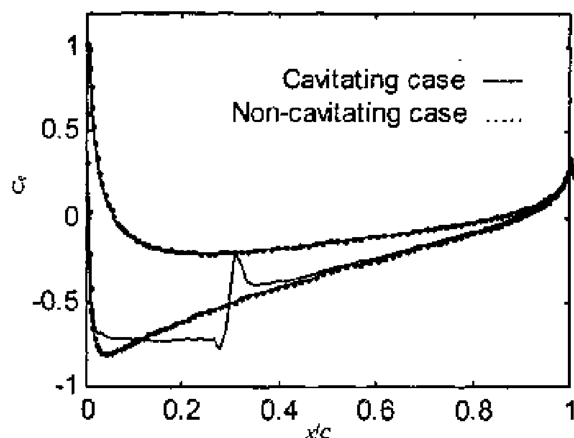


图 4 压力系数曲线

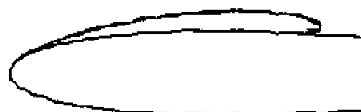


图 5 等密度线，NACA0012 翼型，$\alpha=3^{\circ}$

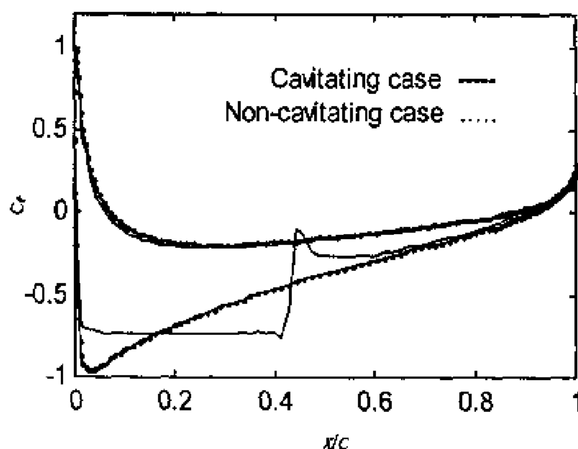


图 6 压力系数曲线

2.2 非定常空泡

对非定常研究，我们以翼型摆动为研究对象。数值实验条件与第二、三组算例相同。翼型从 2° 摆动到 3°，摆动角速度为 0.33rad/s。结果如图 7 和图 8 所示。



图 7 摆动过程空泡泡形变化图

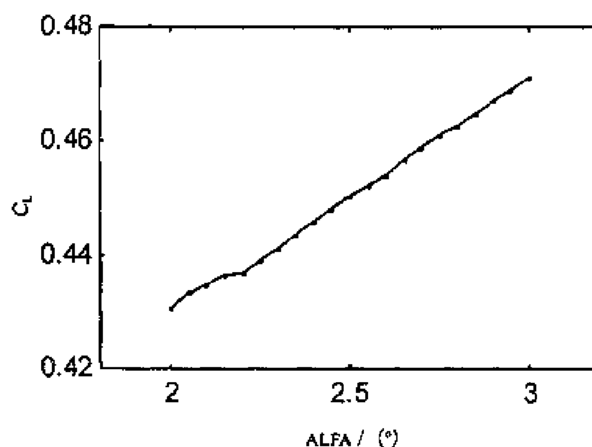


图 8 升力系数与攻角关系图

3 结束语

本文研究了二维翼型黏性、非定常空泡的 Navier-Stokes 方程解。算法建立在可变密度 Navier-Stokes 方程求解以及水汽本构关系的基础上。数值算例表明本算法能良好的计算空泡面形状和翼面压力分布；摆动现象研究清晰的显示了空泡的发展过程和出现的回射流现象。采用有限体积法，具有研究空泡断裂、溃灭、脉动现象的能力，以及向三维问题扩展的优势。这也成为下一步研究的重点。此外，引入湍流模型研究大 Reynolds 数条件下空泡流也将是未来研究的课题之一。

参 考 文 献

1 Kinnas SA，Fine NE. A numerical non-linear analysis of the flow around two- and three-dimensional partially cavitating hydrofoils. *J Fluid Mech*，1993，254：151~181

2 Kinnas SA，Mishima S & Villeneuve RA. A viscouse/inviscid analysis method for cavitation flows on two and three dimensions. In:CAV'95 International Conference，Deauville，France. 1994

3 Lee CS，Kim YG & Lee JT. A potential-based panel method for the analysis of a two-dimensional super- or partially-cavitating hydrofiol *J Ship Rec*，1992，36：168~181

4 Kubota A，Kuto H & Yamaguchi H. A new modeling of cavitating flows: a numerical study of unsteady cavitation on a hydrofoil section. *J Fluid Mech*，1992，240：59~96

5 Chen Y & Heister S. Two-phase modeling of cavitating flows. *Computer and fluids*，1995，24(7)：799~809

6 Delannoy Y & Kueny JL. Two phase flow approach in unsteady cavitation modelling. In：ASME Cavitation and Multiphase Flow Forum，Toronto，June 1990

7 Reboud JL & Delannoy Y. Two-phase flow modelling of unsteady cavitation. In: The Second International Symposium on Cavitation，Tokyo，Japan，April 1994

8 Ventikos Y & Tzabiras G. A numerical method for the simulation of steady and unsteady cavitating flows. *Computer & Fluids*，2000，29：63~88

9 国际单位制的水和水蒸气性质. 北京：水利电力出版社，1979

10 Hoeijmakers HWM，Janssens Me & Kwan W. Numerical simulation of sheet cavitation. In: Third International Symposium on Cavitation，Grenoble，France，April 1998

二维柱体-弹簧系统的涡激振动和声辐射

缪国平　余志兴　刘晓宙　刘应中
(上海交通大学船舶与海洋工程学院，上海 200030)

摘要　采用 NS 方程数值模拟了圆柱、圆柱震荡、圆柱-弹簧系统的耦合运动，再现了锁定现象。对大攻角的二维翼型、振荡翼型和翼型-弹簧系统耦合运动的涡分离进行了计算，证实了在一定条件下，也会产生类似的节拍和共振现象。并利用 Lighthill 的声比拟理论计算了它们的声辐射，得到了一些有益的结论。

关键词　计算流体力学，涡激振动，振荡体，涡声理论，涡激噪声，Lighthill 声比拟理论

引　言

在船舶与海洋工程中，舰艇附件和海洋结构部件在黏性流体中运动时，引起分离和生成旋涡，造成涡激振动，发出噪声，可能导致结构破坏和丧失隐蔽性。有大量文献报道过圆柱体的试验结果，包括涡激振动和声辐射，但用计算再现这类现象者为数不多，特别是振荡圆柱的声辐射问题为数更少。对舰艇附件中经常用到的稳定翼、舵、鳍等机翼剖面引起的涡激振动和声辐射则鲜有报道。

本文采用 NS 方程数值模拟了圆柱、圆柱振荡、圆柱-弹簧系统的耦合运动，再现了锁定现象。对大攻角的二维翼型、振荡翼型和翼型-弹簧系统耦合运动的涡分离进行了计算，证实了在一定条件下，也会产生类似的节拍和共振现象。并利用 Lighthill 的声比拟理论计算了它们的声辐射，得到了一些有益的结论。

在声辐射的计算中，我们重新推导了有均匀来流的波动方程的格林函数，建立了三维的声辐射公式，从此三维公式出发，建立了二维、低马赫数下物体振荡的声辐射的近场和远场公式，并利用远场公式作了计算。

1　问题的数学模型

1.1　流动计算模型

翼型表面是复杂的曲线，物理空间的计算网格是不均匀的，所以采用曲线坐标系；由于翼型可以运动，故需采用运动网格。本文应用逆变速度通量表达不可压缩的 NS 方程

$$\frac{\partial U^j}{\partial \xi^j}=0 \tag{1}$$

$$J^{-1}\frac{\partial S_i U^i}{\partial \tau}=\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}+\boldsymbol{R} \tag{2}$$

其中

$$\boldsymbol{C}=-\frac{\partial}{\partial \xi^j}[(U^j-V^j)\boldsymbol{u}],\quad \boldsymbol{D}=\frac{\partial}{\partial \xi^j}(\upsilon \boldsymbol{S}^j\cdot\nabla \boldsymbol{u}),\quad \boldsymbol{R}=-\frac{\partial}{\partial \xi^j}(\boldsymbol{S}^j p)$$

分别是对流项、扩散项和压力项。

动量方程的时间离散采用 Adams-Bashforth/Crank-Nicolson 半隐式格式处理；对流项采用 van Leer 的 MUSCL 迎风格式；扩散项用高斯公式转化为单元边界上的速度值；用投影法进行压力和速度的耦合，代数方程用 GMRES 方法和不完全的 LU 分解(预优)相结合的叠代法。简化的结构-弹簧系统则用熟知的 Newmark- β 方法求解。详见文献[1，2]。

1.2 声辐射计算模型

我们重新推导了有均匀来流条件下波动方程的格林函数，用这个格林函数推广了 Ffowcs-Williams-Hawkings 方程，并把它转化为二维的。其结果是[5]

$$
\begin{aligned}
\rho' = & \frac{1}{2\pi c^4}\int_0^\infty \mathrm{d}\xi\, A_i A_j \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\int_A T_{ij}'\mathrm{d}S + \frac{1}{2\pi c^3}\int_0^\infty \mathrm{d}\xi\, A_i \frac{\partial}{\partial \tau}\int_{S(\tau)} f_i\,\mathrm{d}s + \\
& \frac{1}{2\pi c^3}\int_0^\infty \mathrm{d}\xi\, A_i \frac{\partial}{\partial \tau}\int_{v_c(\tau)} \rho a_i\,\mathrm{d}S + \frac{U}{2\pi c^3}\int_0^\infty \mathrm{d}\xi\, A_1 \frac{\partial}{\partial \tau}\int_{S(\tau)} \rho V_n'\mathrm{d}s + \\
& \frac{1}{2\pi c^4}\int_0^\infty \mathrm{d}\xi\, A_i A_j \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\int_A \rho V_i' V_j \mathrm{d}S
\end{aligned} \tag{3}
$$

式中：ρ' 是密度的振荡，c 是声速，$A_i = \frac{x_i}{r}\cosh\xi - M\delta_{i1}$，$x_i$ 是直角坐标分量，$r = |x_i|$，M 是马赫数，δ_{ij} 是 Dirac 的 delta 函数，$c(t-\tau) + Mx_1 = r\cosh\xi$，$T_{ij}'$ 是 Lighthill 张量，f_i 是边界 $S(\tau)$ 上的流体应力，下标 A 是二维的积分域，a_i 和 V_i' 分别是物体上任意点的速度和加速度在笛卡儿坐标系上的分量。V_n' 是物体表面上相对来流的速度在表面法线上的投影，v_c 是物体内部所包围的面积。

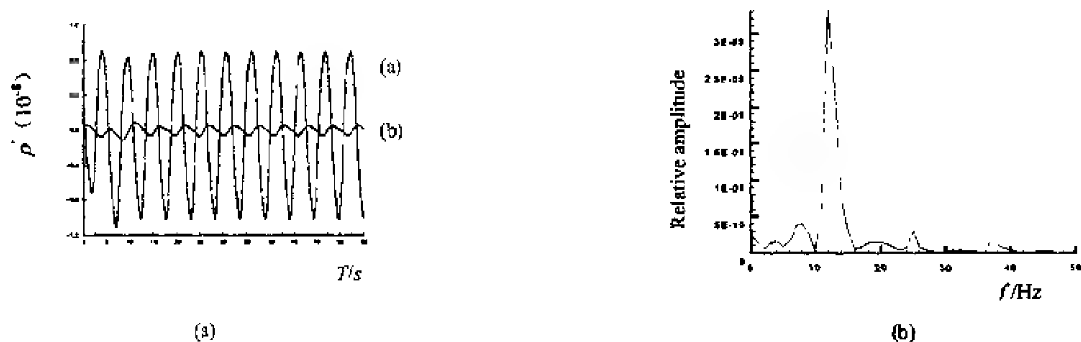
上式中包含了三类噪声源：第一项为体积四极子，来源于物体的不稳定尾流区；第二项为表面偶极子，来源于物面所受的流体应力；后三项来源物体的运动，他们分别是偶极子和四极子项。若物体不动，只有前两项；若忽略 M 的一次项，得到

$$
\begin{aligned}
\rho' = & \frac{1}{2\pi c^4}\frac{x_i x_j}{r^2}\int_0^\infty \cosh(2\xi)\mathrm{d}\xi \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\int_A T_{ij}'\mathrm{d}S + \\
& \frac{1}{2\pi c^3}\frac{x_i}{r}\int_0^\infty \cosh(\xi)\mathrm{d}\xi \frac{\partial}{\partial \tau}\int_{S(\tau)} f_i\,\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{4}
$$

式中第一项是四极子的贡献，第二项是偶极子的作用。

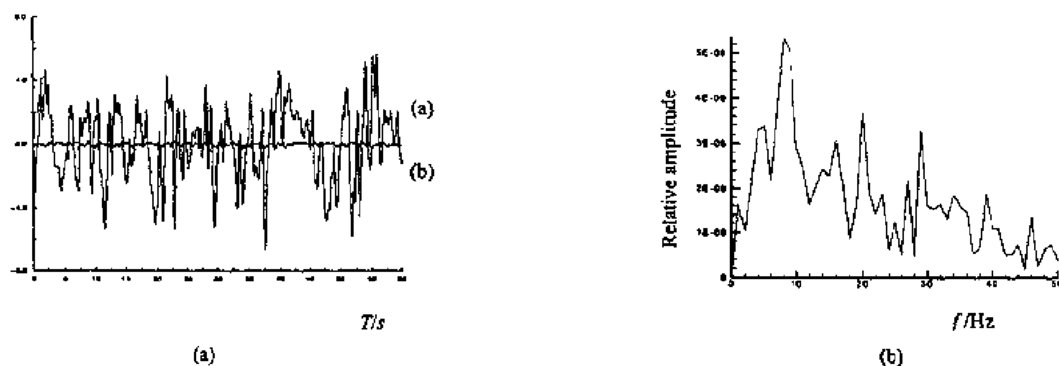
2 计算结果

本文采用前述的方法，对固定圆柱在均匀来流中的涡脱落进行了数值模拟，采用 81×61 的网格，无量纲的时间步长为 0.002。图 1 和图 2 分别给出 Re=100 和 7 519 情况下，位置在 (1 000，1 000) (圆柱半径取 1)处，声密度随时间的变化和相应的频谱。从图中可见：(1) 偶极子的贡献远大于四极子；(2) Re 小时波形规则，频谱集中在一个频率成分，高 Re 时波形和频谱都有明显的高频分量。



(a) (b)

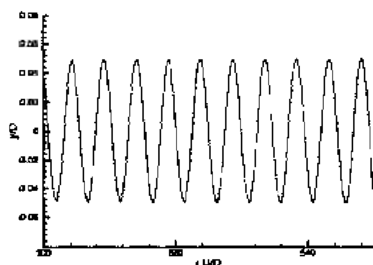
图 1 声密度随时间的变化及频谱，Re=100，(a) 偶极子，(b) 四极子



(a) (b)

图 2 声密度随时间的变化及频谱，Re=7519，(a) 偶极子，(b) 四极子

对圆柱，我们还计算了圆柱振荡和圆柱-弹簧系统的耦合运动的情形，限于篇幅，这里只给出后者的计算结果。圆柱 弹簧系统的耦合运动中，会出现锁定和非锁定状态。在锁定状态，涡脱落频率和系统自振频率一致，圆柱振荡位移(图 3)、升力系数变化的频率都是单一的。在非锁定状态，存在两种不同的频率，圆柱的振荡位移呈节拍现象(图 4)，此时升力基本上是单一频率的。



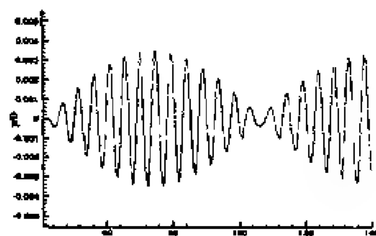


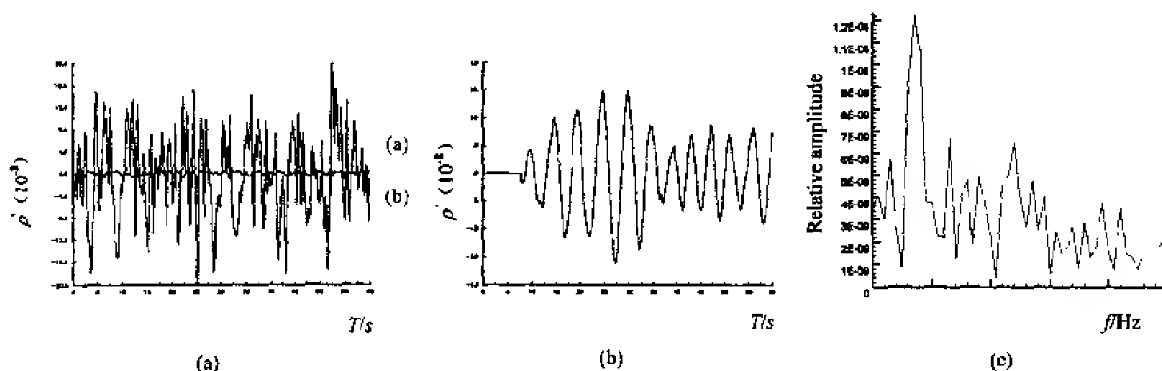
图 3 锁定状态的圆柱位移变化

图 4 非锁定状态的圆柱位移

对应的声密度变化及频谱见图 5。其中(a)为偶极子、(b)为四极子、(c)为物体运动的贡献。由图可见：在圆柱运动的情况下，偶极子和四极子对声密度贡献有所增加，特别是物体运动的贡献不能忽略，在锁定情况下物体运动对声密度变化的贡献最大。

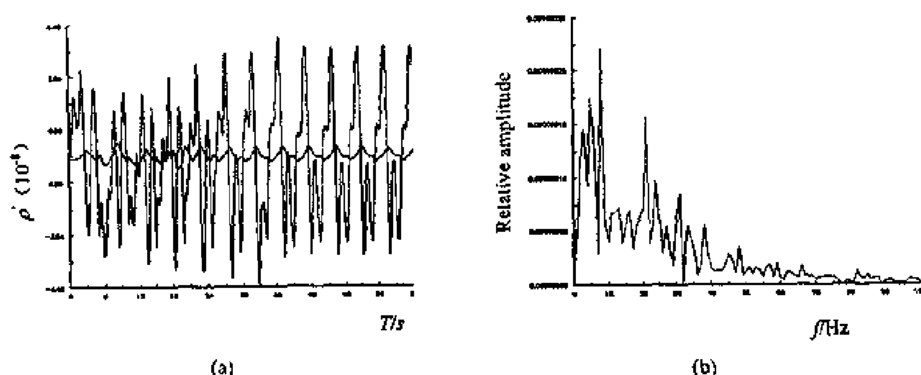
对翼型绕流的系列计算表明，当攻角为 6° 和 12° 时，翼型表面并无显著的分离发生，而当攻角达到 30° 时，翼型表现出和圆柱类似的涡脱落现象，此时 Strouhal 数约为 0.29。通过对 Re =1 000、攻角为 30° 时 NACA0012 翼型受力的时间历程的计算，发现经过一定的过渡时间以后，翼型受力呈稳定的周期现象，反映了涡的周期性脱落。不过这时流体动力的变化与圆柱受力的类似正弦变化不同，表现出更强的非线性。图 6 是位于(1 000，1 000)处声密

度的时变曲线，同样是不很规则，而且声密度从开始到达稳定所需要的过渡时间也较长。



(a) (b) (c)

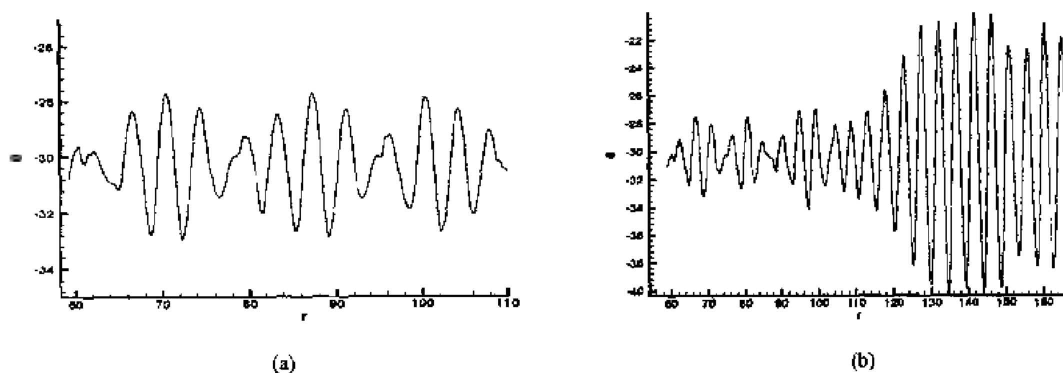
图5　锁定状态圆柱的声辐射，Re=7519



(a) (b)

图6　在(1000，1000)处声密度的时间历程 (a) 偶极子，(b) 四极子

图7是我们计算的二维机翼-弹簧系统，自由度是2，分别为上下振荡和绕弹性中心的转动。我们选择两个自由度振动的频率相等，对应于两自由度影响最大的情形。图 7(a)和(b) 分别为结构频率为 1.15 s^{-1} 和 1.05 s^{-1} 时翼型位移的时变曲线。计算中 Re =1 000，平均攻角为 30°。从图 7，我们看到了翼型扭振的节拍现象，是涡脱频率和自振频率共存的局面，而平移振荡的节拍现象不明显。当自振频率为 1.05 s^{-1} 时，我们发现，随着时间的增长，系统的振动会有节拍逐渐发展到一种共振状态，振幅明显增大，并存在于平移和扭转的自由度中，其振幅在阻尼作用下局限于一定范围内，这可能也是一种锁定现象。



(a) (b)

图7　翼型弹簧系统在自振频率 (a) 1.15 s^{-1} 和 (b) 1.05 s^{-1} 时的位移变化，Re=1000，攻角-30°

3 结 论

计算揭示了水下涡激噪声的一些发声机理以及涡的演化发展与声辐射之间的关系。当物体在流场中运动时，用动网格技术是求解此类问题的好方法。圆柱-弹簧系统以及翼型-弹簧系统耦合运动的涡分离在一定条件下，都会产生类似的节拍和共振现象。其声场的计算结果表明，单极子项不容忽略；偶极子和四极子对声密度的贡献在系统接近共振状态时最大，而在非锁定时则比较小。由于翼型-弹簧系统耦合运动的复杂性，在大雷诺数增大时，声密度会出现不规则性，其中单极子项的贡献不容忽略。这些对于涡激振动和声辐射的进一步研究具有重要的指导意义。

参 考 文 献

1 余志兴. 黏性流场中的水弹性计算.[博士论文]. 上海交通大学，1999

2 Yu ZX，Liu YZ. Hydro-elastic calculation of viscous flow aroud a cylinder-spring system. Proc ISOPE-2000，Seattle，USA，May，2000

3 余志兴，刘应中，缪国平. 二维机翼弹簧系统的涡激振动. 已提交 2001 PRADS 会议

4 刘晓宙，缪国平等. 黏性流体通过圆柱的声辐射研究. 船舶力学，2001(已接受)

5 刘应中，刘晓宙，缪国平等. 均匀流场中运动物体的声辐射公式. 第一届全国船舶和海洋工程学术会议论文集，上海，2000

6 刘晓宙，缪国平等. 振动圆柱绕流的发生机理. 第一届全国船舶和海洋工程学术会议论文集，上海，2000

水波与透水性建筑物相互作用的直接模拟

余锡平
（上海交通大学建筑工程与力学学院，上海 200030）

摘要　描述了水波与透水性建筑物相互作用的直接模拟方法。基本方程能统一描述透水性建筑物内外的流体运动。数值计算基于 SMAC 方法实现演进过程。需要进行空间离散处理的基本方程实质上是一组关于运动量、湍流脉动能量和湍流脉动能量耗散的对流扩散方程和一个关于压力的泊松方程。均在非对称矩形网格上用有限差分方法求解。自由水面的描述利用了 VOF 函数的概念，并按照 Donor-Acceptor 方法对自由水面运动学条件进行离散处理。还讨论了水波与透水性建筑物的相互作用。

关键词　水波，透水性建筑物，数值方法

前　言

透水性建筑物是海岸工程中常见的一类建筑物。其消波特性通常是显著的。由于透水介质内部流体运动规律的复杂性，通常，即使在透水介质的空隙率等参数给定的条件下，要准确地估计这类建筑物的消波特性仍然存在着很多困难。主要困难之一就是透水介质中流体运动规律在细观上的复杂性及其在宏观上的不确定性。

鉴于计算流体力学中有关具有自由水面的不可压流体运动计算方法的迅速发展，建立一个将透水介质中流动的细微结构考虑在内的直接数值方法，并将其用来研究水波与透水性建筑物的相互作用问题，在理论上已没有障碍。尽管如此，将其用于解决工程问题还有待于计算工具性能的进一步改进。因此，在透水介质固体骨架受流体作用而不致产生显著变形的情况下，沿用经典渗流力学的概念，把讨论的对象局限于流体相，而将固体相对流体运动的作用进行概化的方法仍然有着广泛的实用意义。

将透水介质固体骨架对流体运动的作用进行概化，实际上就是将透水介质固体骨架对流体空间平均运动的影响用两个体积力来代替，其中一个体积力表示固体骨架作用于单位质量流体的阻力，另外一个体积力则表示固体骨架对其周围做加速运动的流体所产生的附加惯性力。前者与流体运动的速度有关，后者则是正比于流体质点的加速度。

讨论水波与透水性建筑物的相互作用的论文很多。Sollitt 和 Cross[1] 建立了一个特殊的势函数理论，并探讨了具有矩形断面的透水性防波堤的反射和透射特性。Kondo 和 Toma[2] 以及 Ijima 等[3] 分析了透水性建筑物防长波的效果，其结果得到了实验的验证。Madsen[4] 也给出了矩形断面透水性防波堤的反射和透射特性。Yu 和 Chwang[5] 讨论了透水介质中水波运动的一些基本特征，并给出了透水性矩形潜堤存在的情况下相应波浪场的解析方法。Sulisz[6] 提出了适用于具有任意断面的透水性防波堤情况的数值方法。

1　基本方程

假设流体是不可压的，透水介质在流体的作用下也不发生变形，于是，我们可用以下基本方程来统一描述透水介质内外的流体运动

$$\nabla\cdot(\gamma\boldsymbol{u})=0 \tag{1}$$

$$\lambda\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\nabla\cdot(\lambda\boldsymbol{u}\boldsymbol{u})=-\frac{\gamma}{\rho}\nabla p-\boldsymbol{R}+\nabla\cdot(\gamma\nu_e\boldsymbol{E}) \tag{2}$$

其中，式(1)是连续方程，式(2)是运动方程；$\boldsymbol{u}$ 是流速，p 是动压力，$\boldsymbol{E}$ 是变形率张量，ρ 是

流体的密度，γ是透水介质的空隙率；$\lambda=\gamma+(1-\gamma)C_M$ 为惯性系数（C_M 表示透水介质骨架的附加质量系数）；$\boldsymbol{R}=C_D(1-\gamma)|\boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}/d$ 表示透水介质中流体受到的介质骨架的阻力（C_D 是阻力系数，d 为骨架构成元素的几何尺度）；ν_e 是涡动粘性系数。按照 k-ε 湍流模型，涡动粘性系数可表示为

$$\nu_e=C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon} \tag{3}$$

其中，k 是单位质量流体所具有的湍流脉动动能，ε是湍流脉动能量耗散率，C_μ 为常数。在标准 k-ε 湍流模型中，$C_\mu=0.09$。k 和ε分别满足以下对流扩散方程

$$\gamma\frac{\partial k}{\partial t}+\nabla\cdot(\gamma\boldsymbol{u}k)=\nabla\cdot(\gamma\nu_k\nabla k)+\gamma S-\gamma\varepsilon \tag{4}$$

$$\gamma\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\nabla\cdot(\gamma\boldsymbol{u}\varepsilon)=\nabla\cdot(\gamma\nu_\varepsilon\boldsymbol{E})+\gamma C_1S\frac{\varepsilon}{k}-\gamma C_2\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{5}$$

其中，$\nu_k=\nu_e/\sigma_k$，$\nu_\varepsilon=\nu_e/\sigma_\varepsilon$，$S=1/2\nu_e\boldsymbol{E}:\boldsymbol{E}$。各经验系数的值按照标准 k-ε 湍流模型的建议取为：$\sigma_k=1.00$，$\sigma_\varepsilon=1.30$，$C_1=1.44$，$C_2=1.92$。值得指出的是，如果在式(1)，(2)，(4)和(5)中令$\gamma=1$，则这些方程准确地还原为通常的流体运动基本方程。

为了便于数值处理，我们将自由水面运动学边界条件用 VOF 函数 F 表示。VOF 函数定义为单位空隙体积内流体体积所占的比例。它必须满足以下对流方程

$$\gamma\frac{\partial F}{\partial t}+\nabla\cdot(\gamma\boldsymbol{u}F)=0 \tag{6}$$

自由水面的动力学条件为大气压条件。用动压表示则有

$$p=p_a+\rho g\eta \tag{7}$$

其中，η为自由水面相对于参考平面的高度，p_a为大气压。

2 数值方法

在数值计算中，我们通过 SMAC 方法实现演进过程。即，我们用以下显式差分方程给出速度矢量 $\boldsymbol{u}$ 在计算时刻的预测值 $\boldsymbol{u}'$

$$\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{u}^n+\frac{\Delta t}{\lambda}\left[-\frac{\gamma}{\rho}\nabla p^n+\boldsymbol{G}^n\right] \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{G}=-\nabla\cdot(\lambda\boldsymbol{u}\boldsymbol{u})-\boldsymbol{R}+\nabla\cdot(\gamma\nu_e\boldsymbol{E})$，$\Delta t$ 是时间步长，上标 n 表 $n\Delta t$ 时刻的值。于是，连续方程(1)要求

$$\nabla\cdot\left(\frac{\gamma^2}{\lambda}\nabla\psi\right)=-\nabla\cdot(\gamma\boldsymbol{u}') \tag{9}$$

其中，$\psi=-\Delta t(p^{n+1}-p^n)/\rho$ 为一与压力增量相关的变数。求解(8)即可得ψ。这样，计算时刻的速度和压力便可通过以下关系式得到

$$\boldsymbol{u}^{n+1}=\boldsymbol{u}'+\frac{\gamma}{\lambda}\nabla\psi \tag{10}$$

$$p^{n+1}=p^n-\frac{\rho}{\Delta t}\psi \tag{11}$$

空间微分算子的离散在非对称的矩形交错网格上进行。对于对流扩散方程(4)，(5)和(7)我们应用有限体积法，使格式保持二阶精度，同时，对对流项进行适当的迎风处理以改善计算格式的稳定性。对于泊松方程(8)我们应用传统的五点各式进行离散，并通过共轭梯度法求解差分矩阵方程。

自由水面的运动学条件(6)按照 Donor-Acceptor 方法进行离散处理。该方法严格保证流体质量的守恒，且仅要求处理自由水面附近的计算域，同时能确保 VOF 函数的阶跃性质不因数值扩散而逐渐被平滑从而使得自由水面的位置难于准确判断。

3　水波与透水性潜堤的相互作用

以上描述的方法可用来计算透水性潜堤附近由于水波引起的流场时空变化规律。我们考虑如图 1 所示的问题。图中左边界为造波边界。造波边界上的流速值按斯托克斯波理论给出。计算域在水平方向上的范围为 900m，在垂直方向上的范围为 25m。静水深为 20m。透水性潜堤长 20m，高 10m，居中置于水平底面上。入射波的周期为 8s，相应的深水波长约为 100m。入射波的波高给定为 2m。

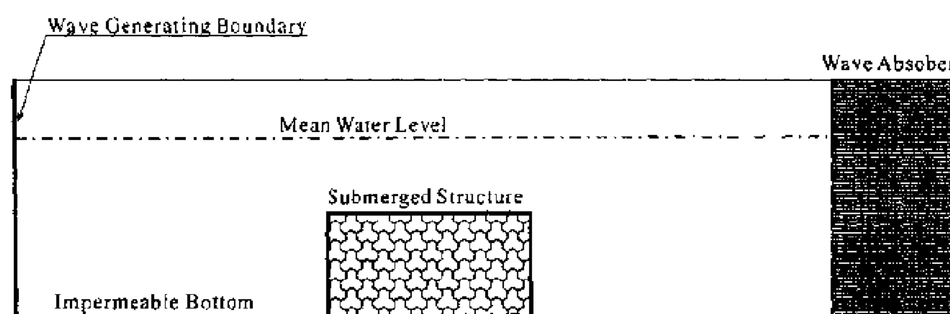


图 1　计算域示意图

图 2 是离开造波边界 100m 处水位随时间的变化规律与造波边界处按斯托克斯波理论给出的波形的比较。排除初始条件的影响，两处的水位过程实际上只存在相位上的差异。而相位差源于地点的不同。这说明计算结果的精度是可信的。

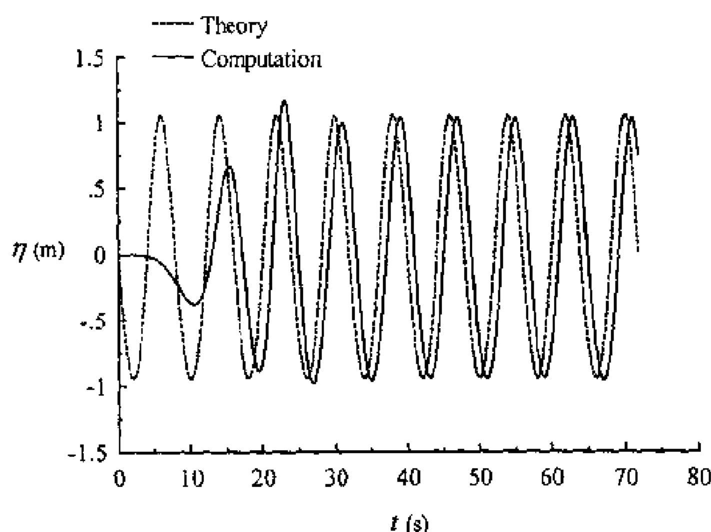
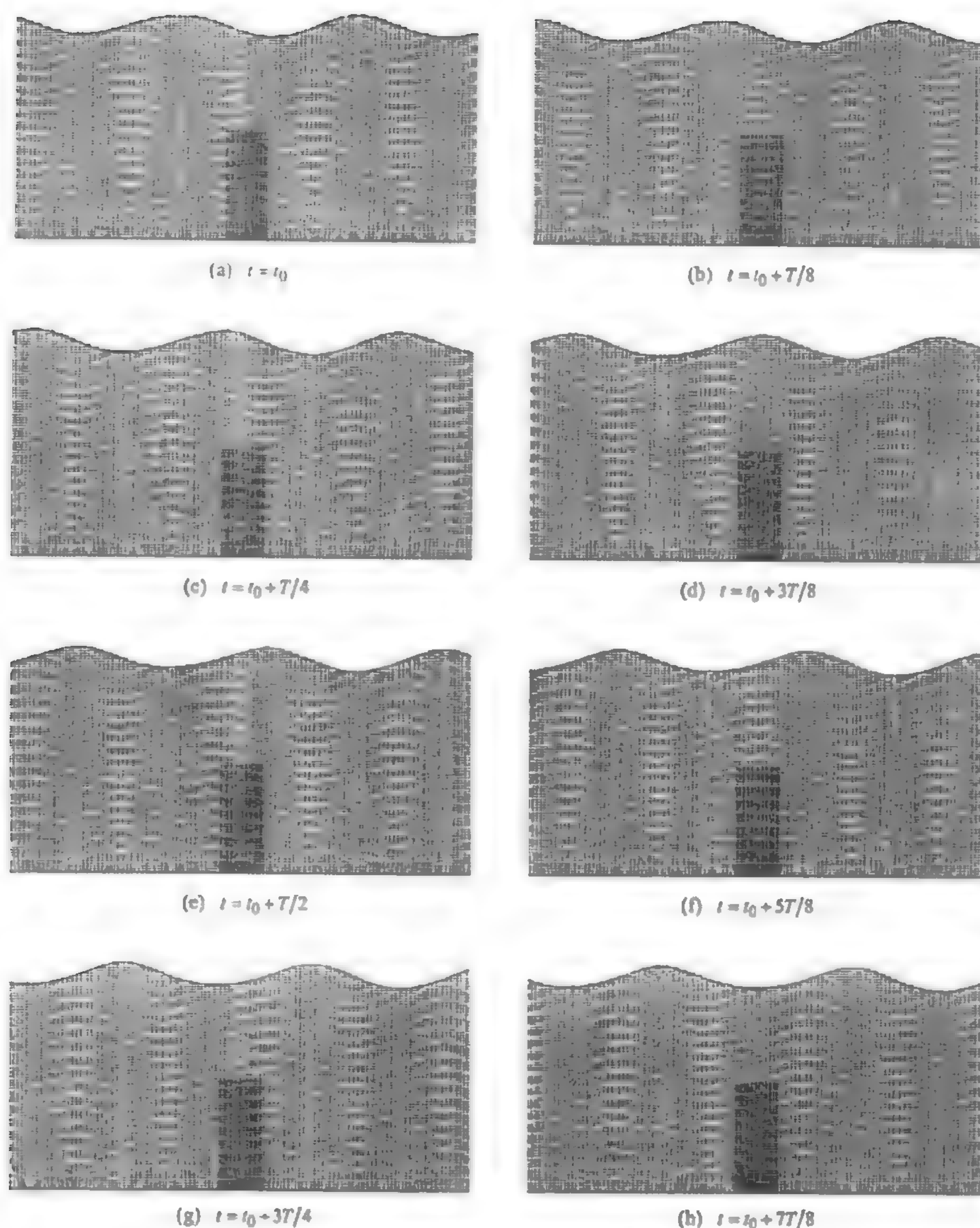


图 2　造波边界和距其 100m 处的水位过程

图 3 给出了潜堤附近流场在一个周期内的变化规律。为了图示的清楚起见，作图时水平方向和垂直方向采用了不同的比尺。潜堤的空隙率给定为 0.5，相应的介质参数取为

$C_M = 0.5$，$C_D = 1.0$。通过分析潜堤前后的水位变化过程我们可以看到，潜堤有明显的防波效果。



(a) $t = t_0$　(b) $t = t_0 + T/8$

(c) $t = t_0 + T/4$　(d) $t = t_0 + 3T/8$

(e) $t = t_0 + T/2$　(f) $t = t_0 + 5T/8$

(g) $t = t_0 + 3T/4$　(h) $t = t_0 + 7T/8$

图 3　潜堤附近流场的时空变化规律

4 结　论

本文描述了水波与透水性建筑物相互作用的直接模拟方法。透水性建筑物内外的流体运动得以统一描述。数值计算基于 SMAC 方法实现演进过程。空间离散基于有限体积法。自由水面的运动学边界条件用 VOF 函数表示，并按照 Donor-Acceptor 方法进行离散。数值方法被用于求解透水性潜堤对波浪的作用，得到了令人满意的计算结果。

致谢　本文是教育部回国人员研究启动计划和高等学校骨干教师资助计划研究成果的一部分。

作者还感谢东京大学的 M Isobe 教授和日本运输省港湾技术研究所的高级研究官员 S Takahashi 博上联合多家单位组织的数值波浪水槽的开发和应用研究小组的合作。

参 考 文 献

1 Sollitt CK，Cross RH. Wave transmission through porous breakwaters. In：Proc 13th Conf on Coastal Engrg，ASCE，1972. 1827~1846

2 Kondo H，Toma S. Reflection and transmission for a porous structure. In：Proc 13th Conf on Coastal Engrg，ASCE，1972. 1847~1866

3 Ijima T，Tanaka E，Okuzono H. Permeable seawall with reservoir and the use of warock. In：Proc 15th Conf on Coastal Engrg，ASCE，1976. 2623~2642

4 Madsen OS. Wave transmission through porous structures. *J Wtrwy，Harb and Coast Engrg Div，ASCE*，1974，102(1)：169~188

5 Yu X，Chwang AT. Wave motion through porous structures. *J Engrg Mech，ASCE*，1994，120(5)：989~1008

6 Sulisz W. Wave reflection and transmission at permeable breakwaters of arbitrary cross-section. *Coastal Engrg*，1985，9：371~386

防波堤前短峰波引起的底床失稳

林　缅

（中国科学院力学研究所工程科学部，北京 100080）

摘要　分析了波浪斜入射时防波堤前土床所可能发生的破坏区域及破坏深度，分别针对两种工程中最常见的粗砂质底床和细砂质底床，讨论了土层中的液化和剪切破坏随入射角、加载波周期、水深的变化，为工程应用提供参考。

关键词　防波堤，短峰波，底床失稳

引　言

预防防波堤失稳是沿岸工程设计中一个重要问题。长期以来，关于防波堤的失稳，人们一直把研究重点放在冲刷所造成的防波堤失稳，而忽视了对波浪作用下堤前土层中应力状态的研究。我们知道，建筑物的存在往往改变了其周围波浪和水流的动力学特征，同时也改变了土床中应力场的分布，所以研究防波堤前土层的应力状态是非常有必要的。在大多数情况下防波堤和入射波成一定角度，这样防波堤前形成短峰波系。因此，本文将就短峰波作用下，防波堤前底床中产生的液化势及剪切破坏进行仔细地探讨，预测堤前可能发生的破坏区域及破坏深度。

1　建立模型

假设坐标系的原点在堤上，x 轴平行于堤坝，y 轴是堤的法向，z 轴在水土交界面上，向上为正，入射波和 x 轴成一夹角。L_x 和 L_y 分别为波长和波峰间距，L 是入射波和反射波的波长，θ 为入射角。当入射角为 0° 时，堤前形成驻波，入射角为 90° 时，堤前产生行波。我们考虑非全反射情况（图 1)。

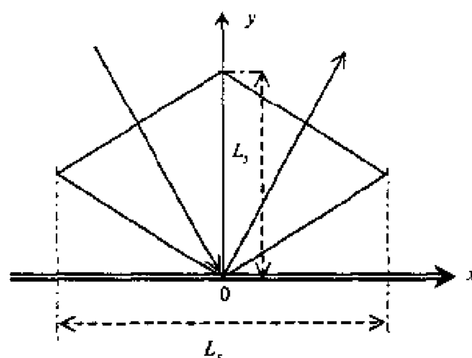


图 1　短峰波波系平面图

考虑三维情况。假设波面方程为

$$\eta = a_t e^{i(\omega t - \tilde{k}_x x - \tilde{k}_y y)} + K_r a_t e^{i(\omega t - \tilde{k}_x x + \tilde{k}_y y)}$$

a_i 为入射波波幅，$K_r = a_t / a_r$ 为反射系数，a_r 为反射波波幅，$\tilde{k}_x = \tilde{k}\sin\theta$，$\tilde{k}_y = \tilde{k}\cos\theta$。那么上层波浪速度势满足

$$\nabla^2\phi = 0$$

考虑一阶短峰波，利用自由面 $z=h$ 上边界条件

$$\eta = -\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t},\quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t}$$

得到

$$\phi = ia_i\frac{g}{\omega}\left\{\cosh\tilde{k}(z-h) + \frac{\omega^2}{\tilde{k}g}\sinh\tilde{k}(z-h)\right\}[(1+K_r)\cos\tilde{k}_y y - i(1-K_r)\sin\tilde{k}_y y]e^{i(\omega t - \tilde{k}_x x)}$$

在交界面 $z=0$ 上满足

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}=\frac{\partial u_z}{\partial t}+\frac{\partial w_z}{\partial t}, \qquad p=-\rho_f\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\tau_{zz}+p=0, \qquad \tau_{xz}=\tau_{yz}=0$$

在床底 $z=-d$ 上满足

$$u=w=0, \qquad \partial p/\partial z=0$$

海洋土看作为具有库仑摩擦的多孔弹性介质，土骨架和孔隙水的运动方程为[1]

$$\widetilde{\mu}\nabla^2 u+(\widetilde{H}-\widetilde{\mu})\nabla e-\widetilde{C}\nabla\zeta=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho u+\rho_f w)$$

$$\nabla(\widetilde{C}e+\widetilde{M}\zeta)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_f u+mw)+\frac{\eta_f}{k_s}\frac{\partial w}{\partial t}$$

利用边界条件可以得到以下关系式

$$\widetilde{p}=\{(\widetilde{a}_{11}e^{\widetilde{\lambda}_1 z}+\widetilde{a}_{12}e^{-\widetilde{\lambda}_2 z})[\widetilde{C}+\widetilde{c}_1\widetilde{M}]\widetilde{k}_1^2+(\widetilde{a}_{21}e^{\widetilde{\lambda}_2 z}+\widetilde{a}_{22}e^{-\widetilde{\lambda}_2 z})[\widetilde{C}+\widetilde{c}_2\widetilde{M}]\widetilde{k}_2^2\}$$
$$[(1+K_r)\cos\widetilde{k}_y y-\mathrm{i}(1-K_r)\sin\widetilde{k}_y y]e^{\mathrm{i}(\omega t-\widetilde{k}x)}$$

$$\widetilde{\tau}_{xx}=\{(\widetilde{a}_{12}e^{\widetilde{\lambda}_1 z}+\widetilde{a}_{12}e^{-\widetilde{\lambda}_1 z})[-(\widetilde{H}+\widetilde{c}_1\widetilde{C})\widetilde{k}_1^2-2\widetilde{\mu}\widetilde{\lambda}_3^2+2\widetilde{\mu}\widetilde{k}_y^2]+$$
$$(\widetilde{a}_{21}e^{\widetilde{\lambda}_2 z}+\widetilde{a}_{22}e^{-\widetilde{\lambda}_2 z})[-(\widetilde{H}+\widetilde{c}_2\widetilde{C})\widetilde{k}_2^2-2\widetilde{\mu}\widetilde{\lambda}_3^2+2\widetilde{\mu}\widetilde{k}_y^2]-$$
$$(\widetilde{a}_{31}e^{\widetilde{\lambda}_3 z}-\widetilde{a}_{32}e^{-\widetilde{\lambda}_3 z})2\mathrm{i}\widetilde{\mu}\widetilde{k}_x\widetilde{\lambda}_3\}[(1+K_r)\cos\widetilde{k}_y y-\mathrm{i}(1-K_r)\sin\widetilde{k}_y y]e^{\mathrm{i}(\omega t-\widetilde{k}x)}$$

$$\widetilde{\tau}_{yy}=\{(\widetilde{a}_{12}e^{\widetilde{\lambda}_1 z}+\widetilde{a}_{12}e^{-\widetilde{\lambda}_1 z})[-(\widetilde{H}+\widetilde{c}_1\widetilde{C})\widetilde{k}_1^2-2\widetilde{\mu}\widetilde{\lambda}_1^2+2\widetilde{\mu}\widetilde{k}_x^2]+$$
$$(\widetilde{a}_{21}e^{\widetilde{\lambda}_2 z}+\widetilde{a}_{22}e^{-\widetilde{\lambda}_2 z})[-(\widetilde{H}+\widetilde{c}_2\widetilde{C})\widetilde{k}_2^2-2\widetilde{\mu}\widetilde{\lambda}_2^2+2\widetilde{\mu}\widetilde{k}_x^2]-$$
$$(\widetilde{a}_{31}e^{\widetilde{\lambda}_3 z}+\widetilde{a}_{32}e^{\widetilde{\lambda}_3 z})2\mathrm{i}\widetilde{\mu}\widetilde{k}_y\widetilde{\lambda}_3\}[(1+K_r)\cos\widetilde{k}_y y-\mathrm{i}(1-K_r)\sin\widetilde{k}_y y]e^{\mathrm{i}(\omega t-\widetilde{k}x)}$$

$$\widetilde{\tau}_{zz}=\{(\widetilde{a}_{12}e^{\widetilde{\lambda}_1 z}+\widetilde{a}_{12}e^{-\widetilde{\lambda}_1 z})[-(\widetilde{H}+\widetilde{c}_1\widetilde{C})\widetilde{k}_1^2+2\widetilde{\mu}\widetilde{k}^2]+$$
$$(\widetilde{a}_{21}e^{\widetilde{\lambda}_2 z}+\widetilde{a}_{22}e^{-\widetilde{\lambda}_2 z})[-(\widetilde{H}+\widetilde{c}_2\widetilde{C})\widetilde{k}_2^2+2\widetilde{\mu}\widetilde{k}^2]-$$
$$(\widetilde{a}_{31}e^{\widetilde{\lambda}_2 z}+\widetilde{a}_{32}e^{-\widetilde{\lambda}_3 z})2\mathrm{i}\widetilde{\mu}\widetilde{k}_x\widetilde{\lambda}_3\}[(1+K_r)\cos\widetilde{k}_y y-\mathrm{i}(1-K_r)\sin\widetilde{k}_y y]e^{\mathrm{i}(\omega t-\widetilde{k}x)}$$

$$\widetilde{\tau}_{xz}=\{-\widetilde{a}_{11}e^{\widetilde{\lambda}_1 z}+\widetilde{a}_{12}e^{-\widetilde{\lambda}_1 z})2\mathrm{i}\widetilde{\mu}\widetilde{k}_x\widetilde{\lambda}_1+(-\widetilde{a}_{21}e^{\widetilde{\lambda}_2 z}+\widetilde{a}_{22}e^{-\widetilde{\lambda}_2 z})2\mathrm{i}\widetilde{\mu}\widetilde{k}_x\widetilde{\lambda}_2+$$
$$(\widetilde{a}_{31}e^{\widetilde{\lambda}_3 z}+\widetilde{a}_{32}e^{-\widetilde{\lambda}_3 z})(-\widetilde{k}_x^2-\widetilde{\lambda}_3^2)\widetilde{\mu}\}[(1+K_r)\cos\widetilde{k}_y y-\mathrm{i}(1-K_r)\sin\widetilde{k}_y y]e^{\mathrm{i}(\omega t-\widetilde{k}x)}$$

$$\widetilde{\tau}_{yz}=\{(\widetilde{a}_{11}e^{\widetilde{\lambda}_1 z}-\widetilde{a}_{12}e^{-\widetilde{\lambda}_1 z})2\widetilde{\mu}\widetilde{k}_y\widetilde{\lambda}_1+(\widetilde{a}_{21}e^{\widetilde{\lambda}_2 z}-\widetilde{a}_{22}e^{-\widetilde{\lambda}_2 z})2\widetilde{\mu}\widetilde{k}_y\widetilde{\lambda}_2-$$
$$(\widetilde{a}_{31}e^{\widetilde{\lambda}_3 z}-\widetilde{a}_{32}e^{-\widetilde{\lambda}_3 z})\mathrm{i}\widetilde{\mu}\widetilde{k}_x\widetilde{k}_y\}[\mathrm{i}(1-K_r)\cos\widetilde{k}_y y-(1+K_r)\sin\widetilde{k}_y y]e^{\mathrm{i}(\omega t-\widetilde{k}x)}$$

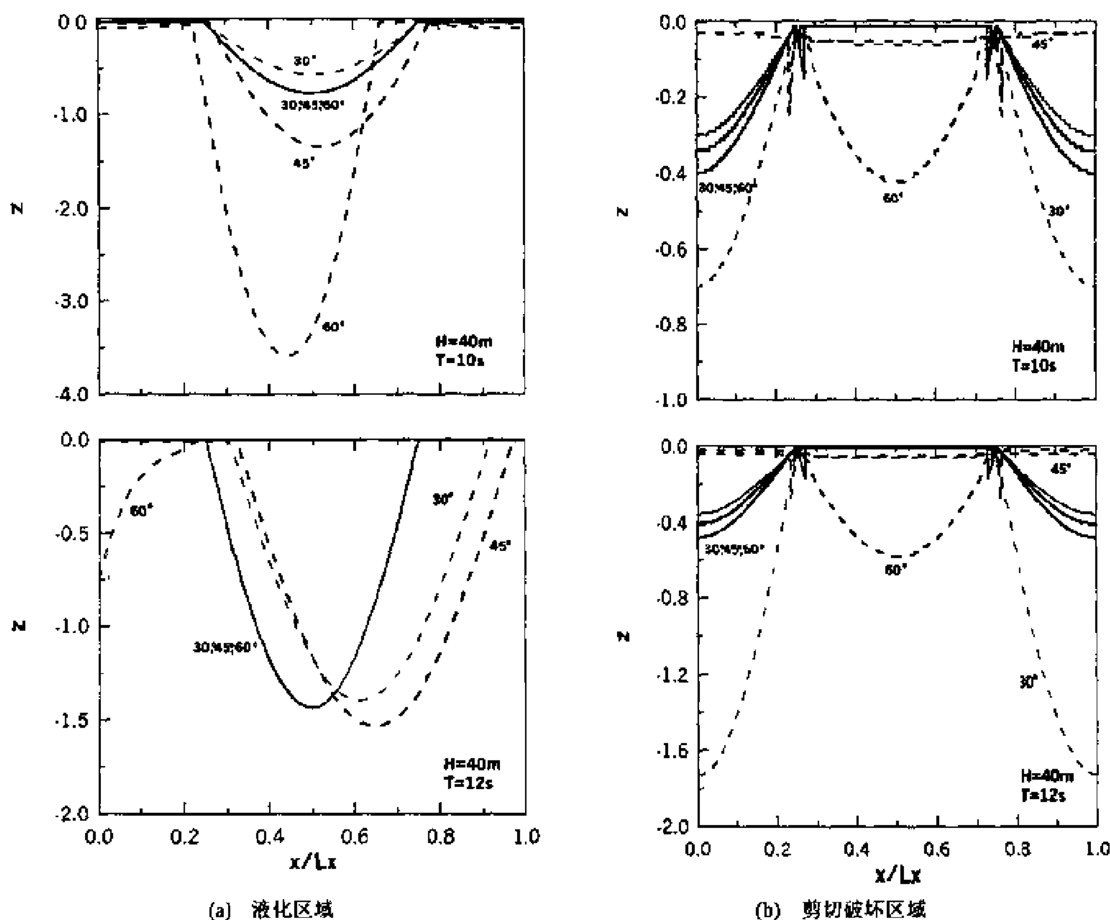
$$\widetilde{\tau}_{xy}=\{-(\widetilde{a}_{11}e^{\widetilde{\lambda}_1 z}+\widetilde{a}_{12}e^{-\widetilde{\lambda}_1 z})2\mathrm{i}\widetilde{\mu}\widetilde{k}_x\widetilde{k}_y-(\widetilde{a}_{21}e^{\widetilde{\lambda}_2 z}+\widetilde{a}_{22}e^{-\widetilde{\lambda}_2 z})2\mathrm{i}\widetilde{\mu}\widetilde{k}_x\widetilde{k}_y\}$$
$$[\mathrm{i}(1-K_r)\cos\widetilde{k}_y y-(1+K_r)\sin\widetilde{k}_y y]e^{\mathrm{i}(\omega t-\widetilde{k}x)}$$

其中系数$\widetilde{a}_{1n},\widetilde{a}_{2n},\widetilde{a}_{3n}$ $(n=1,2)$可参看文献[1]。下面我们将利用以上关系式对防波堤前土床内可能的破坏状态进行分析，并和已有的一些实验结果进行比较。

2 计算结果及分析

利用三维土层液化准则[2]及 Mohr-Coulomb 破坏准则，针对两种不同砂质土床一粗砂和细砂，讨论两方面的问题，其一，堤前的破坏区域；其二，最大破坏深度。整个计算中取防波堤的反射系数为 0.8。

首先，我们来看一下一个波长内土床可能发生破坏的区域。考虑入射角分别为 30°，45°，60° 三种情况下。沿 x 方向液化区域的分布如图 2(a)所示（图中实线为粗砂底床，虚线为细砂底床）。当水深为 40m，加载波周期分别为 10s 和 15s 时，粗砂底床在一个波长内的液化区域均发生在 $0.25< x/L_x<0.75$ 之间，不随入射角变化。在细砂底床中，加载波周期及入射角的变化使得底床的液化区域也随之而变。对不同入射角下，一个波长内剪切破坏区域的计算结果分析发现(图 2(b))，粗砂底床的剪切破坏区域不随入射角的不同而有所变化。这和液化情形一样，不同的是此时剪切破坏深度随入射角变化。而细砂底床的剪切破坏区域完全取决于入射角的大小，比如：入射角为 30° 时破坏区域为 $0< x/L_x<0.26$ 和 $0.74< x/L_x<1.0$。



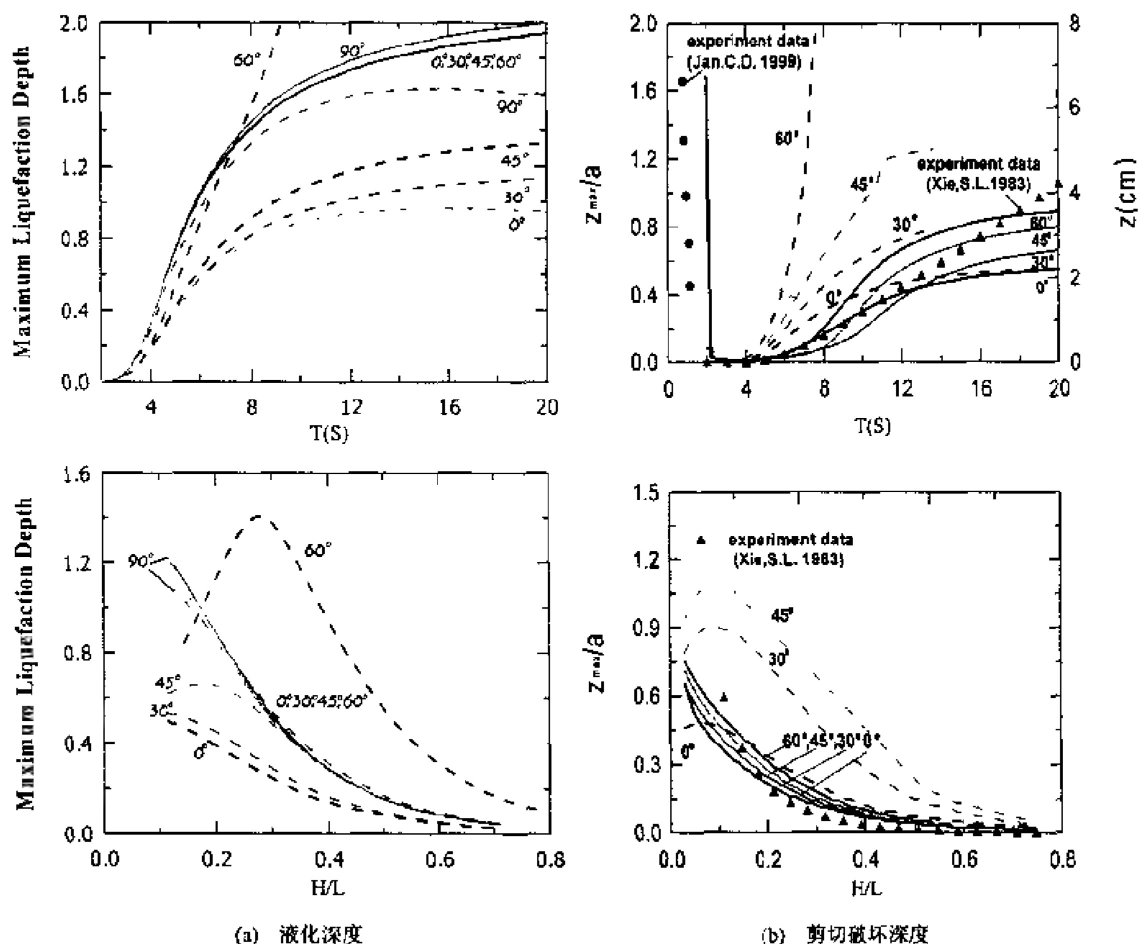
(a) 液化区域　　　　(b) 剪切破坏区域

图 2　不同入射角下破坏区域

然后，计算了最大破坏深度随加载波周期和水深的变化（图 3)。为便于比较我们还增加

了入射角为 0° 和 90° 两种情况。很明显，随着加载波周期的增加无论是粗砂底床还是细砂底床的液化深度都随之而增加。在粗砂底床液化深度不随入射角而变，Jeng(1997)[3]也得到同样的结论。在细砂底床，液化深度随入射角而变。当入射角为 90° 时，液化深度小于入射角为 60° 的情况，这说明当入射角比较大时，在细砂底床中短峰波所造成的破坏深度要大于行波情况。对剪切破坏来说，不同入射角下粗砂底床的最大剪切破坏深度略有不同，入射角增加时破坏深度加深；而细砂底床下的破坏深度随入射角变化非常剧烈，入射角为 60° 时，破坏深度最大。另外从破坏深度随加载波周期变化曲线我们发现，当 T<2s 时，破坏深度随周期的增加而减少，T>2s 破坏深度随周期的增加而增加，这一结果与谢世楞(1983)[4]和 Jan(1999)[5](图 3(a)，Jan 的实验结果依赖于右坐标轴)的实验结果比较，发现实验曲线和计算结果变化趋势基本吻合。

同时我们还注意到，随着相对水深 H/L 的增加，粗砂底床的液化深度单调减少，而细砂底床液化深度随水深的变化不是单调的，在一定水深下有峰值。比较而言，当入射角小于 45° 时，粗砂底床的液化深度比细砂底床要大，但是当入射角为 60°，T>6.6s 或 H/L>0.18 时，细砂底床中产生较大的液化势，其液化深度大于粗砂底床，所以在工程中要特别注意。从图 3(b) 中还可以看到，在粗砂底床中最大剪切破坏深度随着水深的增加而减少，而细砂底床，破坏深度随水深的变化不是单调的。当 H/L~0.1，破坏深度达到最大。



(a) 液化深度　　(b) 剪切破坏深度

图 3　不同入射角下最大破坏深度随加载波周期和水深变化曲线（虚线为粗砂底床、实线为细砂底床）

3 小　结

归纳起来，防波堤前的粗砂底床有以下几个特点：破坏区域不随加载波周期和入射角变化；液化破坏深度不随入射角而变；剪切破坏深度随着入射角的增加而增加；破坏深度随加载波周期的增加而增加，随着水深的增加而减少；当 $T<2s$ 时，剪切破坏深度随着加载波周期的增加而减少。

而在细砂底床则有：入射角的变化影响着破坏区域；在不同的入射角下，加载波周期的增加导致液化深度增加，入射角越大液化深度也越大；水深的增加引起底床破坏深度变化是非单调的，入射角越大这一现象越明显。

参　考　文　献

1 林缅. 海床对水表面波动态响应的研究. 博士论文，中国科学院力学研究所，2000

2 Zen K，Yamazaki H. Wave-induced liquefaction in a permeable seabed. Report of the Port and Harbours Research Institution，Japan，1993，31. 155~192

3 Jeng DS. Wave-induced seabed instability if front of a breakwater. *Ocean Engng*，1997，24 (10)：887~917

4 谢世楞. 直立堤前的冲刷形态及其对防波堤整体稳定的影响.海洋学报，1983，5(6)：808~823

5 Jan CD，Lin MC. Bed forms generated on sandy bottom by oblique standing waves. *Journal of Waterway，Port，Coastal and Ocean Engineering*，1998，124(6)：295~302

数学粗糙度函数及其降噪研究

高丽瑾　周连第　朱德祥
（中国船舶科学研究中心上海分部，上海 200011）

摘要　基于快速涡方法，在无滑移边界条件中引入了数学粗糙度函数。其值等于 0 对应于无黏不可穿透边界；其值等于 1 对应于黏性流动中常规壁面无滑移条件。数值模拟表明其值大于 0 小于 1，可以部分地抑制涡和降噪，相当于某种程度的光滑壁面。其值大于 1，涡和噪声都增强，相当于在壁面上有某种程度的粗糙度。文中还从实验和数值模拟计算证实了，数学粗糙度物理上是可以实现。借助于数学粗糙度函数可以寻求经济、实用的涡控和降噪途径。数值计算还发现，负的数学粗糙度，也可以抑制旋涡和降噪，但其力学机理和物理实现尚有待研究。

关键词　数学粗糙度，壁面粗糙度，快速涡方法，快速多级展开方法

引　言

壁面粗糙度对于流体的流动状态，特别是旋涡结构，有着至关重要的影响。早在三四十年代，国际上已有人尝试从试验和数值模拟两方面入手，研究壁面粗糙度对流体流动状态的影响，但他们都是从尽量使物体表面光滑的角度出发。有研究表明，潜艇表面粗糙度达到 10μm 就能通过减少能量消耗而降低阻力和水动力噪声，这是进行水流控制的一种措施。因为在壳体表面光滑的情况下，其它边界层技术就能收到更好的效果。资料表明，现在美国的潜艇表面粗糙度为 200μm，作为提高潜艇隐身综合研究工作的一个组成部分，美国把开发所需光滑度的新材料与开发吸声涂层的工作协调发展作为 2020 年的重点项目来研究。国内也有一些工作者从事这方面的研究，但也都是从尽量使物体表面光滑的角度出发的，与国外的研究并没有本质的区别。在实际应用中，船舶（潜艇）壁面的粗糙度不可能做到尽量光滑且它们的速度当然是越快越好，因此以上的研究工作在实际中的应用中受到限制。本论文就是从实际应用的角度出发，既然物体表面的粗糙度是不可能无限降低，那么是否可以从在物体的某些位置有意识地布置不同的粗糙度，使其流动状态得以改善和控制，阻力减小，噪声降低。

1　数值模拟方法

1.1 快速涡方法

二维不可压黏性流体的不定常流动可通过变形的 N-S 方程来确定

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\omega=\nu\nabla^2\omega \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{u}(x,t)$ 表示流体速度，ω 表示涡，ν 表示运动黏性系数。对于以 $\boldsymbol{U}_b(t)$ 运动的钝体，其周围的流场在物体表面的速度可以用下式表示

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_s,t)=\boldsymbol{U}_b(t) \tag{2}$$

在无穷远处有

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\to\boldsymbol{U}_\infty \qquad 当 \quad |\boldsymbol{x}_s|\to\infty \tag{3}$$

这儿，$\boldsymbol{U}_\infty$ 是无穷远处的自由来流速度。运用涡量的定义和连续性方程($\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$)，有如下的表

示速度 u 和涡量 ω 的泊松方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{u} = -\nabla \times \omega \tag{4}$$

这个速度与涡量的公式把未知的压力项从方程中去掉。然而，对有限域来说，它因加入了附加的运动学边界条件，需要把速度边界条件转化为涡的形式。本论文所用的数值计算方法是以拉格朗日的观点用涡方法把上面的方程离散化。在这个方法中，将用到如下公式

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_a}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_a, t) \\ \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= \nu \nabla^2 \omega \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{x}_a$ 是携带涡量的流体单元。用积分算子代替公式（5）右边的部分，即有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_a}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{2\pi} \int K(\boldsymbol{x}_a - \boldsymbol{y}) \times \omega \mathrm{d}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{U}_0(\boldsymbol{x}_a, t) \\ \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &\approx \upsilon \int G(|\boldsymbol{x}_a - \boldsymbol{y}|)[\omega(\boldsymbol{x}_a) - \omega(\boldsymbol{y})]\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \upsilon \int H(\boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{y}) \frac{\partial \omega}{\partial n}(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} \end{aligned} \tag{6}$$

其中，$U_0(\boldsymbol{x}, t)$ ——附加有不可穿透边界条件的调方程的解；$K(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{Z} / |\boldsymbol{Z}|^2$；$G(\boldsymbol{x}, t)$ ——无边界域格林函数的内核；$H(x_z, t)$ ——物体边界对流场的影响函数。

在涡方法之中，整个涡场可以被看作是由许多单个质点涡形成的离散涡场所组合而成，每一个质点涡场的半径为 ε，强度为 $\Gamma(t)$，且涡场分布服从 η 函数，即

$$\omega(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i(t) \eta(\boldsymbol{x}, t) \tag{7}$$

其中

$$\eta = \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} \exp\left(-|\boldsymbol{x}|^2 / \pi\varepsilon^2\right)$$

在这儿需特别提出的是：η 一般取为定义在非标准分析空间上的广义 Dirac Delta 函数，在全场积分为 1。用积分算子替代公式（5）的右边部分，并进行离散化得到公式（8）

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_i}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N(t)} \Gamma_j K_\varepsilon(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j) + U_0(\boldsymbol{x}_i, t) \\ \frac{\mathrm{d}\Gamma_i}{\mathrm{d}t} &= \nu \sum_{j=1}^{N(t)} [\Gamma_j - \Gamma_i] G_\varepsilon(|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|) + \nu \sum_{m=1}^{M} H(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_m) \frac{\partial \omega}{\partial n}(\boldsymbol{x}_m) \\ \Gamma_i(0) &= \omega(\boldsymbol{x}_i, 0) h^2 \qquad i = 1, 2, \cdots, N(t) \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $K_\varepsilon(x,t)$ 和 $G_\varepsilon(x,t)$ 是 K，G 与 η 的卷积。若直接计算方程（8）的右边部分，对 N 个涡元来说共需 $O(N^2)$ 工作量，在 N 很大的情况下，是一个巨大的工作量，有时候甚至不可实现，这将涉及到一个 N-质点问题。传统的 N-质点问题需要 $O(N^2)$ 计算量，Barnts-Hut 引进了树(tree)的概念，改进了 N-质点问题，使计算量大大缩减，需要 $O(N \log N)$。本文引进 FMM（Fast Mutipole Method）算法，使求和计算更快速有效，计算量只需 $O(N)$。因此基于 FMM 算法的涡方法构成了本数值研究的主框架，称之为快速涡方法，此种方法在文献[1]中首次引入。

涡方程采用了分裂算法（Fractional Step），方程的对流部分和黏性部分在每个时间步分别附加相应的运动学边界条件（不可穿透条件）和动力学边界条件（不可滑移条件）予以解决。可以简单地进行如下描述：

第1步（对流部分）

把涡场在$t-\delta t$时所得的涡量$\omega^n(\boldsymbol{x}^n,\delta t)$作为解决对流方程时的初始条件，同时附加不可穿透边界条件。采用面源法来附加不可穿透边界条件，求得满足不可渗透条件的泊松方程的解。在第一步结束时，可以获得质点在第 n+1 个时间步的空间位置。在下一个步骤（即第 2 步）中，通过修改质点的强度而不是位置来考虑黏性对整个流场的影响。

第2步（扩散和涡的产生）

在这一步骤中，把在上一步中建立的涡场作为初始条件，求解扩散方程，同时通过附加不滑移条件来确定壁面涡通量$(\partial\omega/\partial n)$，从而获得一个物体表面的 Neumann 型边界条件。考虑到涡层是切向速度的间断面，为了附加不可滑移条件，在机翼的表面附加一假想的涡层来平衡掉机翼边界上的切向速度，从而达到不可滑移的目的，涡层强度为$\gamma(s)$。涡通量可以通过以下式子来获得

$$\nu\frac{\partial\omega}{\partial n}(s)=-\frac{\gamma(s)}{\delta t} \tag{9}$$

一旦涡通量已经获得，它将被分配到流域中的质点上去，这样涡就进入了流体。本文通过求解一个具有齐次初始条件和纽曼边界条件的扩散方程来获得流域中涡质点的强度。

在第 1 步骤之后，在流场中ω_1'可以被获得。在第 2 步骤之后，涡场中ω_2'可以被获得，它将被附加在第1步骤之后产生的的涡场之上，从而获得在下一个时间步的涡场分布

$$\omega^{n+1}=\omega_1'+\omega_2' \tag{10}$$

关于涡方法的详情，请参见文献[2，3]。

1.2 水噪声计算

当潜艇高速巡航的时候，马赫数$M=u/C_0<<1$，可以运用 Powell 方程来预测压力脉动

$$\frac{1}{C_0{}^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\nabla^2 p=\rho_0\nabla\cdot(\omega\times\boldsymbol{u}) \tag{11}$$

同时定义物体表面压力脉动水平(PFL) 如下

$$PFL=10\log_{10}\left(\frac{p}{p_0}\right)^2 \quad (\text{dB}) \tag{12}$$

这儿p_0是在 1μPa 下的基本声压。关于水噪声的水动力机理可参见文献[4]。

2 数学粗糙度函数

2.1 定义和物理意义

公式（9）把涡层强度转化为涡通量，引入数学粗糙度函数$\alpha(s)$，就可考虑壁面粗糙度的影响了

$$
\nu \frac{\partial \omega}{\partial n}(s) = -\alpha(s)\frac{\gamma(s)}{\delta t} \tag{13}
$$

其中 s 表示物体表面的贴体曲线坐标。数学粗糙度函数取值的不同对应于不同的粗糙度状态，可以是连续函数、间断函数、常数、分段连续函数等各种状况。总的来说，根据数学粗糙度函数的在不同区间的取值状况反映不同的流动状态。可以用图 1 来粗略地表示数学粗糙度对流动状态的影响。

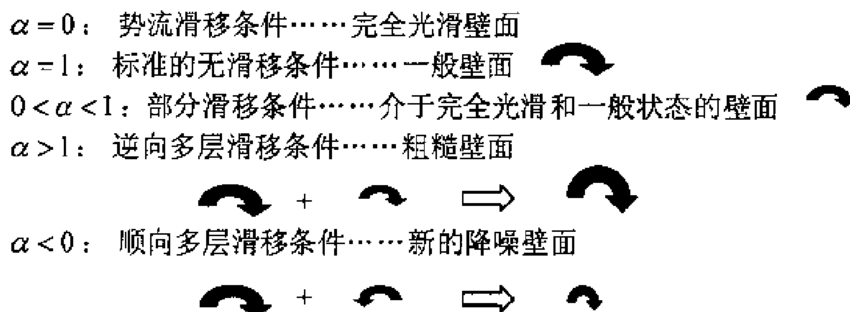


图 1 数学粗糙度，壁面和流动结构对应关系

2.2 数值研究

对二维圆柱绕流状态进行分析，在来流速度为 0.1m/s 状态下，展现圆柱在不同粗糙度情况下的流动情况。在无量纲 $T=U_{\infty}t/R$ 下显示各流动状态，其中 $CS=\alpha(s)$。图2~ 图5，在数学粗糙度 CS=1.0，0.5，2.0，－1.5 状态下，T=5.4 时刻的涡线图。图 6，在数学粗糙度 CS=1.0，0.5，2.0，－1.5 状态下的噪声图。

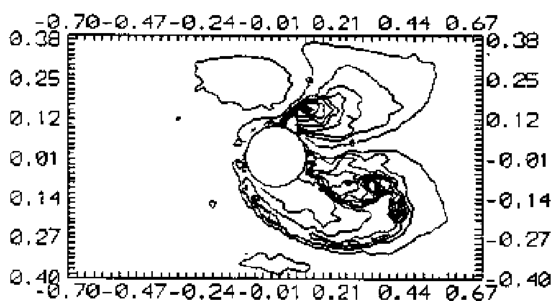


图 2 T=5.04，CS=1.0 涡线图

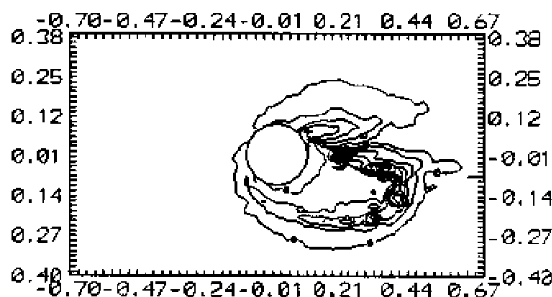


图 3 T=5.04，CS=0.5 涡线图

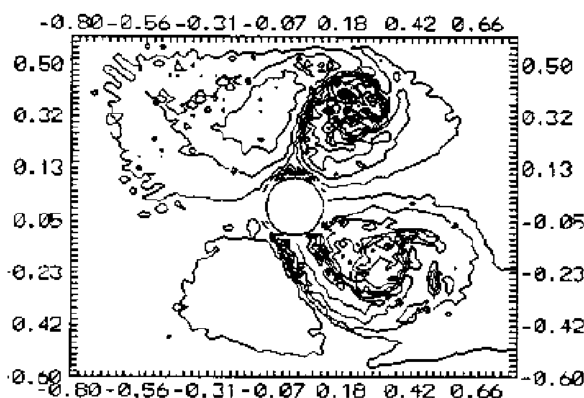


图 4 T=5.04，CS=2.0 涡线图

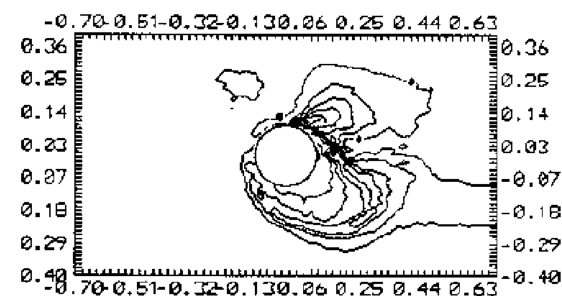


图 5 T=5.04，CS=-1.5 涡线图

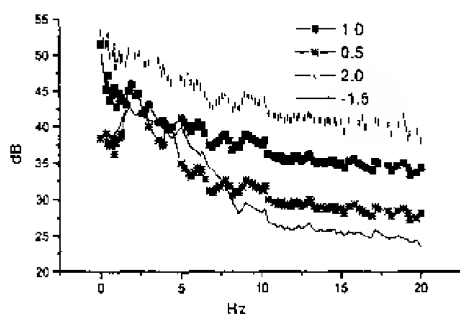


图6 不同 CS 下的水噪声

从图 2～图 6 可以看出，壁面粗糙度对流体的分离流动，特别是靠近壁面的旋涡结构，以及涡脱落的发生情况有着至关重要的影响。因而在不同数学粗糙度的影响下，我们可以看出：

(1) 无论在何种粗糙度的影响下，均会出现非对称的卡门涡，只是涡的增长程度和涡脱落的速度有所不同。以在完全无滑移的条件下，CS=1.0，出现的涡为标准，以下均以其为标准进行比较。

(2) 在附加向后多层滑移边界条件的时候，CS>1.0，涡脱落时间提前了，并且涡扩张速度也增加了，但总的说来，由于大粗糙度的影响，使得涡在没有完全生长成熟的情况下就发生了脱落。

(3) 在附加向前多层滑移边界条件的时候，即 CS<1.0，卡门涡的非对称性明显减弱，同时涡脱落的位置上移，且涡脱落的时间向后延迟。

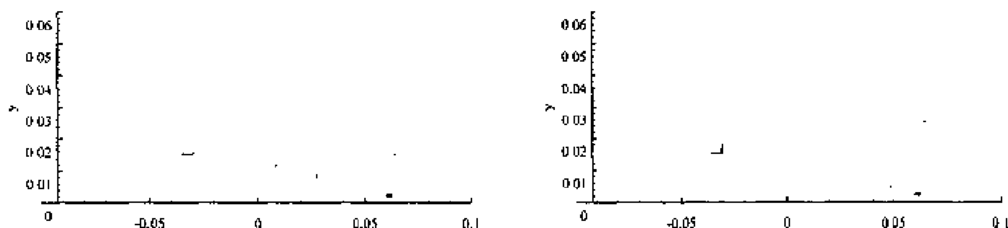
(4) 在不同的数学粗糙度的条件下获得的水动力噪声各不相同。在附加向前多层滑移边界条件，即 CS<0 的时候，水动力噪声有较大幅度的下降。

从以上的数值模拟可以看出，不同的粗糙度对流动结构，特别是近壁的旋涡结构有很大的影响。光滑壁面（0<CS<1）可以抑制旋涡和降噪，在顺向多层滑移条件下（CS<0）也可以抑制涡的脱落，从而可以降噪，是一个很有前景的新颖降噪手段，值得进一步深入研究。但对于如何在物理上实现顺向多层滑移条件，是一个新的有实用价值的研究方向，需要进行开拓性研究。

2.3 试验验证和物理实现

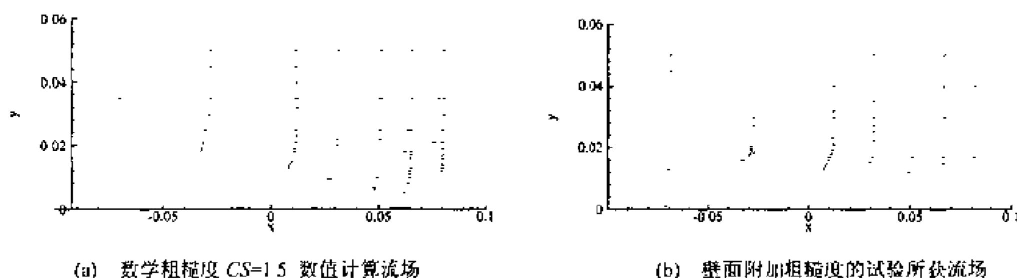
文献[5]研究攻角和粗糙度对边界层流动结构、边界层湍流结构和噪声的影响及其相关关系。在 NACA0020 机翼 0° 和 15° 攻角，一般翼面和加粗糙度翼面(在机翼表面有规律地黏贴直径为 2mm，高度为 1mm 的小圆柱)情况下，用 LDV 和水听器测量了 NACA0020 边界层流场、湍流强度、翼内噪声和远场噪声。本文将其有关流场试验结果与用数学粗糙度函数计算结果相比较 (图 7，图 8)。

由图 7，图 8 可见：用数学粗糙度计算的流场与实验结果吻合良好，表明本文发展的涡方法是有效的，数学粗糙度函数在物理上是可以实现的。



(a) 数学粗糙度 CS=1.0 数值计算流场　　(b) 具有常规壁面粗糙度的试验所获流场

图7 全翼 0° 攻角下的流场比较（常规壁面粗糙度）



(a) 数学粗糙度 CS=1.5 数值计算流场　　　(b) 壁面附加粗糙度的试验所获流场

图8 全翼0°攻角下的流场比较（壁面附加粗糙度）

3 结论和展望

3.1 结 论

通过数值计算和试验研究，文中引进了数学粗糙度函数$\alpha(s)$，在$\alpha(s)\geq 0$情况下有其现实的物理意义，且在物理上是可实现的，可以用它作为涡控和降噪的工具。

3.2 展 望

为使数学粗糙度函数，在实际降噪中得到应用，必须进行如下的研究发展工作：

(1) 对不同的物理粗糙度和光滑度，用平板或二元机翼进行二维流场试验，同时对平板或二元机翼进行数值计算，以建立数学粗糙度函数值与物理粗糙度、光滑度之间的对应关系。

(2) 对二元机翼或圆柱以数学粗糙度函数为工具，寻求涡控和降噪效果较好合适的数学粗糙度函数的分布规律。

(3) 对负的数学粗糙度函数值的力学机理和物理实现尚待研究，它也可能发展成为一种新的涡控和降噪技术。

(4) 开展三维快速涡方法的研究。

参 考 文 献

1 Gao Lijin，Li Ding，Zhou Liandi. Numerical study of the mechanism of water noise using fast vortex method. In：Proceedings of the Third International Conference on Hydrodynamics，Seoul Korea，Oct. 1998

2 Koumoutsakos P，Leonard A，Pepin F. Boundary condition for viscous vortex methods. *Journal of Computational Physics*，1994，113：52~61

3 Koumoutsakos P and Leonard A. High-resolution simulations of the flow around an impulsively started cylinder using vortex method . *J Fluid Mech*，1995，296：1~38

4 Powell A. Theory of vortex sound. *J Acoustic Soc Am*，1969，36：177~195

5 刘宇陆，罗柏华，周连第. 边界层湍流结构与噪声实验. 中国船舶科学研究中心科技报告，2000

斜向不规则波与直墙相互作用的实验研究

李玉成　孙昭晨　董国海　徐双全
（大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室，大连 116023）
牛恩宗　毛　恺
（中交水运规划设计院，北京 100007）

摘要　通过长峰不规则波和方向波谱对直墙相互作用的实验研究，分别给出了每延米斜向不规则波波浪力与正向力之比，方向波谱波浪力与斜向长峰不规则波波浪力之间的关系，并通过与规则波实验结果的比较给出了斜向规则波与不规则波波浪力之间的相对关系；还对斜向不规则波的反射系数与正向波时的变化作出了分析。这些结果对工程设计有重要应用价值。
关键词　斜向波，不规则波，直墙，波浪力

引　言

在海上经常出现的海浪与直墙的相互作用，多为斜向不规则波。然而，迄今的研究以及工程规范多数是就正向波情况，对斜向波特别是斜向不规则波的研究成果较少[1~5]，规范方法考虑斜向作用主要是日本的合田方法[1]。为了满足国内工程实际之需，九五攻关项目“深水防波堤建设技术”课题中列了一个子项目“斜向波与防波堤的相互作用”。其目的是要通过系统的规则波与不规则波的斜向波试验，对斜向波波浪力和反射特性提出可供工程实际应用的方法与建议；本文为该项系统试验研究中有关不规则波部分的成果。

1　试验条件

(1) 试验水深及堤身宽：堤前水深 d 为 15m，堤宽 18 m；

(2) 基床条件：分高低二种基床，基床上水深 d_1 分别为 7.5m 及 11.25m，基床顶总宽 34m（内、外肩宽各为 8m），边坡 1:2；

(3) 试验波况：频谱采用 JONSWAP 谱，谱峰升高因子 $\gamma=3.3$，有效波高 H_S 为 3m，4m 及 5.5m，谱峰周期为 7.0s，10.1s，12.4s 及 15.6s。长峰波的入射角(波向与堤轴线法线间的夹角)分别为：0°(正向)，15°，30°，45°，60° 及 90°(顺浪)。方向谱的主波向为 0° 及 30°，方向分布函数为 $G(f,\theta)=G_0\cos^{2s}(\theta/2)$，本次试验中取 S_{max}=10~25。长峰不规则波试验共有 108 种工况，方向谱试验有 24 种工况，每种工况至少重复 2 次，全部总测次超过 300。

2　实验测试内容

(1) 测定堤前波高，为分析方向谱的波能方向分布，采用五个波高仪的五角阵列法。通过入、反射波分离法[6]得出试验条件下的反射系数。

(2) 波压力测定：通过波压力测量值求得作用于堤身每延米长上的水平力及浮托力。

3　试验设备及试验方法

3.1 试验设备及测试仪器：

利用海岸和近海工程国家重点实验室的多功能水池（长 55m，宽 34m，深 1m），池中配有单板宽 0.4m，总长为 28m 的方向谱造波机。波高测量采用重点实验室研制的波高、应变、滤波三合一测试仪；波压力测量采用北京水利水电科研院生产的多测头压力仪。这些仪器经

多年使用证明性能良好，工作稳定。

3.2 试验方法：

·模型相似：按 JTJ301-88 波浪试验规程及设备条件，几何比尺取为 1:50，按重力相似律模拟。

·模型设计：根据相似准则，模型几何尺寸与原型相似。由于试验中模型只能取有限长度，为保证测试段不受堤头三维效应影响，模型总长取 9m，中间 1m 为测力段；该段模型由有机玻璃制成，共布置 5 个测压断面，其间距为 18cm，每个断面上侧向有 6 个测压点测水平波压力，底部有 4 个测压点测垂向浮托力。堤前布置五角阵列浪高仪阵(即 5 个浪高仪)，以测量堤前波高和分析多向波浪谱的能量方向分布函数及反射系数。基床由碎石按要求尺度堆砌而成。

·斜向波产生方法：在多数情况下(0°~60°)，由方向谱造波机直接产生不同角度的长峰斜浪，但对于 90°(顺浪)，只能改变堤轴线方位产生顺浪。为了对照，对于 45° 及 60° 二组斜浪，除直接由方向谱造波机产生斜浪外，还通过改变堤轴线方位的办法产生相同角度的斜浪，以校验二种斜浪产生效果的差异。

3.3 分析方法：

·波高、反射系数及方向谱的能量方向分布函数：原始波要素在放置模型前，在直墙测力段位置设放浪高仪测定。由浪高仪阵测得的波高按文献[6]方法分离入、反射波并求得反射系数，方向谱的能量方向分布按文献[7，8]方法计算。

·波浪力分析：由侧向水平力及底部浮托力的点压力过程线，可求得断面侧向总水平力及底部总浮托力的过程线以及它们相应的对堤前趾或后踵（波峰对后踵，波谷对前趾）的弯矩过程线，由过程线可分别求得波峰及波谷时的极值。资料分析表明，在本试验条件下水平力和浮托力的极值同步出现。在不规则波波列中对应每个波峰及波谷时的极值是不等的，按我国设计标准，直墙波浪力取波列中概率为 1%的力为设计值，本试验中取每次测值的 1%波力的均值为实验值，下述波浪力均换算为原型值表示。另外，根据 5 个断面的同步压力值可以分析对应于不同堤长（原型 1m，9m，18m 及 27m）的平均延米力（力矩），对于不同堤长可取不同断面资料的不同组合而得多组不同堤长平均延米力的测试值，取其均值为实验值。

4 不规则波斜向波作用力的试验结果及分析

4.1 斜向波作用力的比较方法

本研究中从几个不同角度讨论不规则波斜向作用于直墙时的作用力特性：一是长峰斜向波延米波浪力 F_θ 与正向波延米波浪力 F_0 相比的折减系数 $k_1 = F_\theta / F_0$，在工程上可由 k_1 值和正向波浪力值（由计算或实验得出）而求得斜向波每延米波浪力；二是考虑斜向波作用下沿堤不同位置有波面相位差，则单元堤身不同时，单元堤体的平均延米波浪力 F_x 将有变化，它与单位延米波浪力 F_1（即上述 F_θ）之比为考虑堤长影响的斜向波作用力折减系数 $k_2 = F_x / F_1$；三是长峰不规则波斜向波波浪力与相同条件下长峰规则波斜向波波浪力相比的差异性；四是方向谱波浪力与长峰不规则波波浪力之间的比较。

4.2 不规则波斜向波与正向波相比的作用力折减系数 $k_1 = F_\theta / F_0$

按照作者[9]对规则波斜向波作用力折减系数 k_1 分析所采用的方法，对于不规则波亦可设 $k_1 = (1 + \cos^n \theta)/2$，$\theta$ 为波向与堤轴线法线之间的夹角，通过实验数据拟合指数 n。按上式可得 $\lg(2k_1 - 1) = n\lg(\cos\theta)$，分析各测次的 $\lg(2k_1 - 1)$ 与 $\lg(\cos\theta)$ 的线性相关性：

$\lg(2k_1-1)=\alpha+\beta\lg(\cos\theta)$，拟合线性相关式中斜率 β 即为所求 n 值。实验资料的分析表明不同波要素对拟合关系影响不大，因而将按基床和波峰水平力与浮托力的不同拟合关系列于表 1 中上两列所示，将高低基床结果综合的结果列于表 1 中最下横列。由表 1 可见高、低基床所得 n 值有一定差异，这种差异对波浪力折减系数 k_1 的影响并不大（见表 2）。因此采用不分基床的综合公式更为简便，对于水平力 n 值还可简化为 1.0。则推荐采用不规则波斜向波与正向波相比的波浪力折减系数的计算式为

$$k_1=(1+\cos^n\theta)/2 \qquad (1)$$

对于水平力 $$n=1.0 \qquad (2)$$

浮托力 $$n=1.52 \qquad (3)$$

表 1　k_1 与 $(1+\cos^n\theta)/2$ 线性相关

基床条件	波浪力	相关方程*	相关系数 r	n 值
高基床	水平力	Y=1.17X+0.01	0.914	1.17
	浮托力	Y=1.34X+0.01	0.903	1.34
低基床	水平力	Y=0.91X−0.02	0.697	0.91
	浮托力	Y=1.64X−0.01	0.753	1.64
不分基床	水平力	Y=1.05X−0.01	0.806	1.05
	浮托力	Y=1.52X+0.003	0.799	1.52

* $Y=\lg(2k_1-1)$,　$X=\lg(\cos\theta)$

表 2　指数 n 变化对 k_1 值的影响

作用力	n 值	入射角 0°	15°	30°	45°	60°	90°
水平力	1.17(高基床)	1.00	0.98	0.92	0.83	0.72	0.50
	0.91(低基床)	1.00	0.98	0.94	0.86	0.77	0.50
	1.05(综合式)	1.00	0.98	0.93	0.84	0.74	0.50
	1.0 (简化)	1.00	0.98	0.93	0.85	0.75	0.50
浮托力	1.34(高基床)	1.00	0.98	0.91	0.82	0.70	0.50
	1.64(低基床)	1.00	0.97	0.89	0.78	0.66	0.50
	1.52(综合式)	1.00	0.97	0.90	0.80	0.67	0.50

4.3 考虑单元堤长影响的斜向波不规则波作用力折减系数 $k_2=F_x/F_1$

按照作者[9]对规则波所采用的分析方法，可认为不规则波的折减系数 k_2 也与单元堤长 l 与波长 L 之比 l/L 成线性相关，且其相关性不受波要素值的影响。对于五种不同入射角(15°，30°，45°，60° 及 90°) $k_2=\alpha+\beta l/L$ 的线性相关结果如表 3，其相关系数大部分在 0.7 以上，按回归方程的相关性要求，当数据点超过 120 时，要求相关系数应大于 0.23。

表 3　高基床时 $k_2(Y)$ 与 $l/L(X)$ 的相关关系

作用力	入射角	相关方程	相关系数 r
水平力	15°	Y=−0.37X+1.00	0.711
	30°	Y=−1.03X+1.01	0.913
	45°	Y=−1.20X+0.99	0.875
	60°	Y=−1.675X+0.97	0.881
	90°	Y=−1.97X+0.97	0.900
浮托力	15°	Y=−0.17X+1.00	0.659
	30°	Y=−0.32X+0.99	0.710
	45°	Y=−1.12X+0.99	0.938
	60°	Y=−1.67X+0.98	0.947
	90°	Y=−1.60X+1.00	0.964

表3中所有值均符合要求，绝大多数远大于此值，说明相关性良好。由表3可见线性相关方程

的斜率绝对值随入射角之加大而增大。进一步分析可见 k_2 值与 $l/L\sin\theta$ 的线性相关性良好：

对于水平力
$$k_2 = -1.67(l/L\sin\theta + 1) \tag{4}$$
$$r = 0.870$$

对于浮托力
$$k_2 = -0.99(l/L\sin\theta + 1) \tag{5}$$
$$r = 0.896$$

按回归方程的相关要求，当数据点超过 850 时，要求相关系数应大于 0.092，式(4)及(5)的相关系数均远大于此值，因而相关性甚好。

4.4 长峰不规则波斜向波波浪力与相同条件下规则波斜向波波浪力的比较

在正向波作用下，当波浪不破碎时，以 H_1%波高按规则波方法所得的波浪力和按不规则波方法计算（其 H_1%值与规则波相同）所得的概率为 1%的波浪力相同，这是基于波压力和波高成线性相关而得的结果。所以只要波浪不发生破碎，在正向波条件下，不规则波波浪力的分析可以用规则波计算结果替代，它在工程应用上十分简便。那么，在斜向波条件下上述结果是否仍然成立？

为了比较规则波与不规则波斜向波波浪力之间的数值关系，鉴于试验中相似工况实测波高与要求值不完全符合，必须将规则波与不规则波的实测斜向波波浪力与波高成正比的关系，按二者波高值的差异进行修正，即应在规则波波高值与不规则波波列中 H_1%值相等条件下来比较二者的波浪力，此时不规则波波浪力取 F_1%，规则波波浪力取实验平均值。将修正后的规则波波浪力除以同等条件下不规则波波浪力（F_1%）的比值列于表 4。

表 4 高基床规则波与不规则波相比的受力比值

入射角	波要素		水平力	浮托力
0°	H=3m	T=7.0s	1.41	0.93
	H=4m	T=10.1s	1.40	1.12
	H=5.5m	T=10.1s	0.75	0.93
	平均		1.19	0.99
15°	H=3m	T=7.0s	1.01	0.97
	H=4m	T=10.1s	1.24	1.12
	H=5.5m	T=10.1s	0.91	0.81
30°	H=3m	T=7.0s	0.91	1.13
	H=4m	T=10.1s	1.05	1.23
	H=5.5m	T=10.1s	0.88	0.73
45°	H=3m	T=7.0s	1.06	1.32
	H=4m	T=10.1s	0.96	0.59
	H=5.5m	T=10.1s	0.66	0.50
60°	H=3m	T=7.0s	1.03	1.15
	H=4m	T=10.1s	0.78	0.78
	H=5.5m	T=10.1s	0.54	0.58
	斜向波平均		0.92	0.91
	总平均		0.97	0.93
	标准差		0.247	0.254

由表 4 可见，二者的比值比较接近于1，数据有一定的离散性。而对照斜向情况(15°~60°)与正向情况(0°)的比值，高低基床表现的不同的对比关系，而从总体上看，高低基床平均，水平力比 0° 时为 0.99，斜向时为 0.94，浮托力比 0° 时为 0.91，斜向时为 0.94，它们都很相近，并接近于 1.0。因此，有理由认为在波浪不破碎条件下，斜向波情况下也类同于正向波情况，可近似地用规则波方法取 H_1%波高进行计算或试验以取得相应条件下不规则波对直墙的作用力。

4.5 方向谱波浪力与长峰不规则波波浪力之间的比较

方向谱对直墙作用的试验需有一定的设备条件，做起来困难较多，所需经费也大。其计算多是基于不同方向长峰不规则波作用的等价能量分布的线性叠加；对于方向谱对直墙的作用力，是否也具有这种线性叠加的关系？这是本节比较的目的所在。

线性叠加应进行两个修正：一是按能量的方向分布比例对长峰不规则波波浪力按不同方向的比值加以修正；二是方向谱与长峰不规则波二者实际波高不等而应做的修正。其结果如表 5 所示。表中所列比值为方向谱实测波浪力与长峰不规则波波浪力实测值按上述二种考虑进行修正与叠加结果之比。由表可见两个力的比值比较接近于 1。它证明，作为简化处理，方向谱对直墙的作用力可以通过不同方向长峰不规则波对直墙作用力计算的线性叠加而得。表 5 中 α 值为方向谱主方向与直墙法线方向间的夹角。

表 5　方向谱与长峰不规则波波浪力的比值

波要素			水平力		浮托力	
			高基床	低基床	高基床	低基床
H=3m	T=7.0s,	$\alpha=-15^\circ$	0.94	1.06	1.10	1.12
H=3m	T=7.0s,	$\alpha=+15^\circ$	1.06	0.89	1.06	1.07
H=4m	T=10.1s,	$\alpha=-15^\circ$	1.08	1.20	1.09	1.11
H=4m	T=10.1s,	$\alpha=+15^\circ$	1.06	1.04	1.06	1.08
H=5.5m	T=10.1s,	$\alpha=-15^\circ$	1.07	1.06	1.07	1.09
H=5.5m	T=10.1s,	$\alpha=+15^\circ$	1.10	1.08	1.11	1.13
平均值			1.05	1.06	1.08	1.10

5　斜向波条件下的反射系数

根据五角阵列浪高仪资料，按文献[6]的方法，选用五个浪高仪中两个浪高仪的恰当组合即可取得同一测次的几组分析结果。坐标原点在堤身测力段堤表面中心，本文分析时选用浪高仪 3 和浪高仪 1 组合（简称 3—1 组合）、3—4 组合、3—2 组合和 5—1 组合等四种组合；分析表明，不同组合分析值相近，取其均值为实验值。另外，分析表明，波要素的变化对反射系数影响不大，因而为了表述的简化，将反射系数的综合结果列于表 6。由表 6 可见反射系数基本上不受入射角的影响，即斜向不规则波的反射系数与正向波时相同。

表 6　反射系数 k_r

入射角 k_r	0°		15°		30°		45°		60°	
	高基床	低基床	高基床	低基床	高基床	低基床	高基床	低基床	高基床	低基床
0.96~1.00	18 次*	19	18	18	18	18	18	18	18	16
0.91~0.95	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
0.86~0.90	1	1	0	0	1	1	0	0	2	4
0.81~0.85	1	1	0	3	4	3	0	0	4	3
总次数	20	22	18	21	23	22	18	18	25	24
均值 k_r	0.984	0.979	0.999	0.975	0.964	0.970	0.999	0.999	0.959	0.954

*指在此 k_r 范围内出现次数

6　结　论

(1) 斜向不规则波作用下每延米波浪力 F_θ 与正向波每延米波浪力 F_0 之比，即斜向波浪力折减系数 $k_1=F_\theta/F_0$ 等于 $(1+\cos^n\theta)/2$，θ 为入射角。综合并简化后 n 值对水平力为 1.0，对浮托力为 1.52，该值与规则波时相应值很相近。

(2) 斜向不规则波作用下考虑单元堤长影响的波浪力折减系数与 $l/L\sin\theta$（l 为单元堤身，L 为波长）成线性相关，水平力与浮托力的相关值可由式(4)及(5)计算。

(3) 作为初步简化计算，当波浪不破碎时，长峰不规则波对直墙的斜向波浪力设计值可

由取 H_1%波高值按规则波考虑得出相应波浪力值。

(4) 作为简化分析，方向谱对直墙的波浪力可利用长峰不规则波按不同方向的能量比例由线性叠加原理相组合而得。

(5) 斜向不规则波的反射系数和正向波时相同。

参 考 文 献

1 合田良实. 港工建筑物的防浪设计(中译本). 北京：海洋出版社，1983. 114~118

2 交通部第一航务工程勘察设计院. 海港工程设计手册(中)，北京：人民交通出版社，1990. 40

3 Mallayachari V and Sunder V. Standing wave pressure due to regular and random waves on a vertical wall. *Ocean Engineering*，1995，22(8): 859~879

4 Franco C，Vander JW and Franco L. Multidirectional wave loads on vertical breakwaters. Proc of 25th ICCE，1996. 2008~2021

5 Hirashi T. Wave force on a vertical wall in directional seas. Proc of 9th ISOPE，1999，3：718~723

6 孙昭晨，王利生. 斜向入射波与反射波的分离. 海洋学报，1999，21(4)：114~120

7 柳淑学，俞聿修. 方向谱的分析方法. 第七届全国海岸工程学术讨论会论文集，1993. 919~926

8 Hashimoto N，Kobune K and Kameyama Y. Estimation of directional spectrum using the bayesian approach and its application to field data analysis. Report of Port and Harbour Research Institute，Ministry of Transport，Japan，1987，26 (5)：57~100

9 李玉成，孙昭晨，董国海，徐双全等. 斜向规则波与直墙相互作用的实验研究. 中国港湾建设，2001

带自由面三维船体周围黏性流场的数值模拟[1)]

张怀新　刘应中　缪国平

（上海交通大学船舶与海洋工程学院，上海 200030）

摘要　采用有限体积法通过求解不可压缩的雷诺平均（RANS）方程数值模拟了包括兴波的三维船体周围的黏性流场，湍流模式使用了子网格尺度模式(SGS)和 Baldwin-Lomax 模式相结合的混合模式。对于自由表面的处理，采用了任意拉格朗日-欧拉方法，网格为不仅与物体表面贴体，而且与自由表面贴体的动网格，即随着自由表面的变化要不断重新划分网格，虽然此方法需要很长的计算时间，但能较好的描述船体的兴波情况。计算了系列 60 船模在 Fn=0.316，Re=1.9×10^6 时带自由面的黏性流场，计算结果与试验结果吻合较好。

关键词　自由面，三维船体，黏性流场计算

引　言

精确预报阻力和船体周围的黏性流场在船舶设计中是非常重要的。但至今实船的阻力估算还是依赖于船模试验和将黏性阻力和兴波阻力分别估算的船模实船换算法。在实际流动中，黏性和兴波一般是同时存在并相互耦合的，只是由于该问题本身的复杂性以及计算条件所限，在过去很长时间内，人们往往把这个问题分开研究。在研究黏性流时，忽略自由表面的影响，而在研究自由表面问题时，不考虑黏性的作用，把流体当作理想流体。从实际流场角度讲，船舶周围流场的计算是必须考虑自由表面影响的。随着计算流体力学和计算机性能的飞速发展，带自由面三维船体周围黏性流场的数值模拟已成为船舶流体力学领域的研究热点。近年来，在船舶流体力学界大部分采用与自由表面贴体的动网格来处理自由表面问题[1-3]。这种方法虽需要每一时间步都要重新划分网格，尤其对三维问题要很大的计算量，但能保证自由表面网格内质量、动量的守恒，目前是船体自由面黏性流场数值模拟中主要采用的方法。

本文在参考文献[1]的基础上采用有限体积法通过求解不可压缩的雷诺平均(RANS)方程数值模拟了包括兴波的三维船体周围的黏性流场，湍流模式使用了子网格尺度模式(SGS)和 Baldwin-Lomax 模式相结合的混合模式。对于自由表面的处理，采用了任意拉格朗日 欧拉方法，网格为不仅与物体表面贴体，而且与自由表面贴体的动网格，即随着自由表面的变化要不断重新划分网格，虽然此方法需要很长的计算时间，但能较好的描述船体的兴波情况。本文计算了系列 60 船模在 Fn=0.316，Re=1.9×10^6 时带自由面的黏性流场，计算结果与试验结果吻合较好。

1　控制方程与数值计算方法

1.1 控制方程

对于不可压的黏性流，时间平均的 N-S 方程可写成

1) 自然科学基金资助项目

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\text{grad}H + \text{div}\boldsymbol{T} \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{u}$ 为流体速度矢量，H 为与压力有关的量，无自由表面时 $H = P/\rho$，有自由表面时 $H = P/\rho + x^3/F_n$，$\boldsymbol{T}$ 是应力张量，定义为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{C} &= -(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{D} &= \left(\nu_t + \frac{1}{Re}\right)[\text{grad}\boldsymbol{u} + (\text{grad}\boldsymbol{u})^T] \end{aligned} \tag{2}$$

$\boldsymbol{C}$ 为对流项，$\boldsymbol{D}$ 为扩散项，当用任意拉格朗日-欧拉方法描述移动网格时，$\boldsymbol{v}$ 为动网格坐标系的移动速度。以上 P 为压力，ρ 为流体密度，x^3 为垂直方向坐标，ν_t 为涡动黏性系数，另外 $Re = U_\infty L/\nu$ 是雷诺数，$Fn = U_\infty/\sqrt{gL}$ 是傅氏数，其中 U_∞ 为来流速度，L 为船长，g 为重力加速度，ν 为流体的动黏性系数。

对于连续方程，不可压缩时

$$\text{div}\boldsymbol{u} = 0 \tag{3}$$

在控制方程的数值离散方面，采用了有限体积法，它是在控制体内进行积分，然后离散得到线性方程，它能保证控制体内的物理量守恒。对于对流项使用了三阶迎风差分。由于不可压的连续方程中不含压力，不能通过与动量方程联立直接求得压力，这里应用了压力 Poisson 方程，通过 SOR 法求得了压力。

1.2 湍流模式

对于湍流模式，采用了 SGS（子网格尺度）模式和 Baldwin-Lomax 模式相结合的湍流模式。子网格（Sub Grid Scale）模式源于大涡模拟的方法，在大涡模拟方法中将比网格尺度大的大涡和比网格尺度小的小涡分开计算，大涡通过 N-S 方程直接计算，而小涡则通过一定的模式（称为子网格模式）进行模拟。一般在子网格模型可选用 Smagorinsky 的假设

$$\nu_s = L_s\left|\omega^2\right| \tag{4}$$

其中 ω 为局部的涡量，而 L_s 为子网格的尺度，这里我们定义 L_s 为

$$L_s = D_f \min(0.1V^{1/3}, 0.1\Delta x^1, 0.1\Delta x^2, 0.1\Delta x^3) \tag{5}$$

其中 V 是局部网格的体积，$\Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3$ 为网格相应方向的间隔，D_f 为 Van Driest 衰减函数

$$D_f = 1 - \exp(-y^+/26) \tag{6}$$

对于 y^+ 这里引进了 Spalding 壁面函数

$$y^+ = u^+ + 0.1108\left\{e^{0.4u^+} - 1 - 0.4u^+ - \frac{(0.4u^+)^2}{2!} - \frac{(0.4u^+)^3}{3!} - \frac{(0.4u^+)^4}{4!}\right\} \tag{7}$$

这里 $u^+ = u/u_\tau$，u_τ 为摩擦速度 $u_\tau = \sqrt{\tau/\rho}$。

使用 Smagorinsky 形式的 SGS 模式对于船体尾部边界层很厚，涡分离等复杂的流场情况比较合适，而 Bladwin-Lomax 模式对于船体前面部分的薄边界层计算效果良好，所以本文采用了 SGS（子网格尺度）模式和 Baldwin-Lomax 模式相结合的混合模式。混合模式的涡动黏

性系数ν_h由下式决定

$$\nu_h = \begin{cases} \nu_b & x_{FP} \le x \le x_{\text{midship}} \\ \beta\nu_b + (1-\beta)\nu_s & x_{\text{midship}} \le x \le x_{AP} \\ \nu_s & x_{AP} \le x \end{cases} \tag{8}$$

ν_b表示用 Baldwin-Lomax 模式求得涡动黏性系数，ν_s表示用 SGS 模式求得涡动黏性系数，β是船体棱形系数的函数，在这里定义为

$$\beta = \sqrt{c_p} \tag{9}$$

2　边界条件

2.1 自由表面条件的处理方法

对于自由表面条件，要满足动力学条件和运动学条件。在考虑动力学边界条件时，我们忽略了表面张力等的影响，只考虑自由面上的压力变化，即

$$p = p_0 + \frac{x^3}{F_n} \tag{10}$$

这里p_0为大气压，此条件可作为自由面上的压力边界条件。

而对于动力学边界条件，由于使用了随自由表面变化的贴体坐标系，自由表面可用$\xi^3 = \text{const}$，自由表面上在任意拉格朗日-欧拉表示形式下对ξ^3进行拉格朗日时间微分，应有

$$\frac{D\xi^3}{Dt} = \frac{\partial\xi^3}{\partial t} + (u^j - v^j)\frac{\partial\xi^3}{\partial x^j} \equiv 0 \tag{11}$$

因为$\xi^3 = \text{const}$，这样在自由表面上

$$J(u^j - v^j)\frac{\partial\xi^3}{\partial x^j} = U^3 - v^j S_j^3 \equiv 0 \tag{12}$$

这里S_j^3是贴体坐标(ξ^1,ξ^2,ξ^3)与物理坐标(x^1,x^2,x^3)之间的一个转换量，J为坐标变化的Jacobia

$$S_1^3 \equiv J\frac{\partial\xi^3}{\partial x^1} = \frac{\partial x^2}{\partial\xi^1}\frac{\partial x^3}{\partial\xi^2} - \frac{\partial x^3}{\partial\xi^1}\frac{\partial x^2}{\partial\xi^2} \tag{13}$$

$$S_2^3 \equiv J\frac{\partial\xi^3}{\partial x^2} = \frac{\partial x^3}{\partial\xi^1}\frac{\partial x^1}{\partial\xi^2} - \frac{\partial x^1}{\partial\xi^1}\frac{\partial x^3}{\partial\xi^2} \tag{14}$$

$$S_3^3 \equiv J\frac{\partial\xi^3}{\partial x^3} = \frac{\partial x^1}{\partial\xi^1}\frac{\partial x^2}{\partial\xi^2} - \frac{\partial x^2}{\partial\xi^1}\frac{\partial x^1}{\partial\xi^2} \tag{15}$$

$$U^3 \equiv S_j^3 u = J\left(u^1\frac{\partial\xi^3}{\partial x^1} + u^2\frac{\partial\xi^3}{\partial x^2} + u^3\frac{\partial\xi^3}{\partial x^3}\right) \tag{16}$$

(12)式中v为动网格的移动速度，它可表示为

$$v=\left(\frac{\partial x^1}{\partial t},\frac{\partial x^2}{\partial t},\frac{\partial x^3}{\partial t}\right) \tag{17}$$

那么自由表面的运动学条件(12)式可表示为

$$S_1^3\frac{\partial x^1}{\partial t}+S_2^3\frac{\partial x^2}{\partial t}+S_3^3\frac{\partial x^3}{\partial t}=U^3 \tag{18}$$

在自由表面上可认为 x^1，x^2 的变化较少，即 $\frac{\partial x^1}{\partial t},\frac{\partial x^2}{\partial t}=0$．所以自由表面的升高最终可由以下式子决定

$$x^{3(n+1)}=x^{3(n)}+\Delta t\frac{U^3}{S_3^3} \tag{19}$$

在数值离散时，(13)~(16)式使用了四阶中心差分离散空间导数。对于（19）式中的时间积分，我们运用了四阶的 Adames-Bashforth 格式，为了避免数值振荡对自由表面的影响，还运用 Longuet-Higgins & Cokelet 的五点光顺公式对自由表面进行了光顺。

2.2 其他边界条件

除自由表面条件外，其他边界条件与无自由表面的重叠模情况相同，即在进口处有均流 $(u=1.0,v=0,w=0,p=0)$；在出口处认为流动满足均匀性条件($\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial x}=0$)；在外边界由于计算区域的横剖面是 O 型网格，应满足 Neumann 条件($\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{\partial w}{\partial n}=\frac{\partial p}{\partial n}=0$)；在船体表面采用了无滑移条件($u=v=w=0$)，而对于压力采用 Neumann 条件。

3 算例与结果分析

3.1 计算条件

采用著名的 Series 60 船作为算例，其方形系数为 $C_b=0.6$。对系列 60 船模在 Fn=0.316，Re=1.9×10^6 时带自由面的黏性流场进行了数值模拟。计算的网格数为 $91\times23\times61$，计算区域从船首向前面延伸半个船长，从船尾向后面延伸两个船长，外边界半径取一个船长，即 $-1.0<x/L<2.5$，$r/L<1.0$，离船体壁面的最小网格间距为 2×10^{-4}。船体表面计算网格如图 1 所示。迭代选取的时间步长为 1×10^{-4}，计算至 $T=2.0$。由于这里使用了与自由表面贴体的网格，如图 2 所示自由面上的网格能直接反映波面的起伏情况。

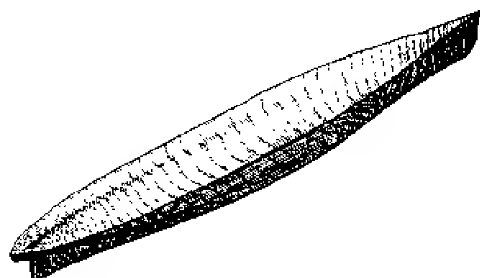


图 1　船体表面的网格分布

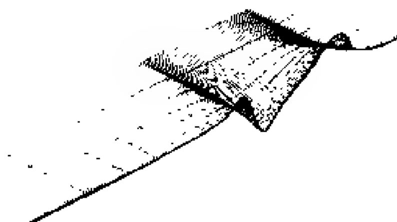


图 2　自由表面的网格分布

3.2 计算结果

图 3 为船尾横向速度矢量分布情况，由图中可以看出除了无自由表面叠模数值模拟中存在舭涡外，自由表面与船体表面附近也有涡存在，反映了黏性流动中自由表面的影响。图 4 为船体表面上压力分布情况，实线为正的，虚线为负的，本文的压力计算结果与 T.Hino[2]和 S.Shiotani and Y.Kodama[3]的 Series 60 的计算结果基本上是一致的。由图 4 可以发现，船首 $X/L=-0.5$ 处，C_p 的值较大，而在船的中间部分压力系数等值线图描述出了船体附近的负压区，说明船体表面压力较小，船尾 $X/L=0.5$ 处，C_p 的值也较大，但和船首相比相对较小一些。图 5 是系列 60 船模在 Fn=0.316，Re=1.9×10^6 时的波高等值线的示意图，与试验值[4]相比，船前半的波形与实验较吻合，但船后半部分的波形与实验结果差距较大，船尾处虽有波峰存在，但波形还未向外面传播出来。图 6 为船侧波高的计算值和实验值[4]的比较。从图

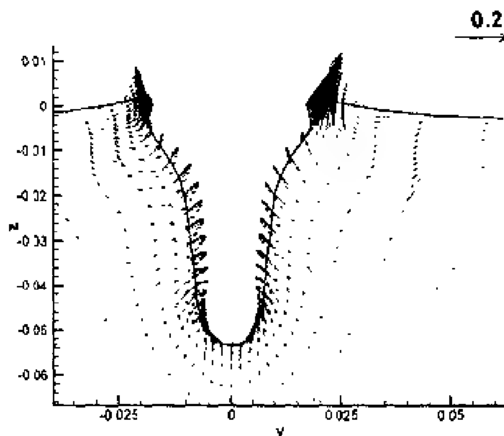


图 3　船尾横向速度矢量图（X/L=0.5）

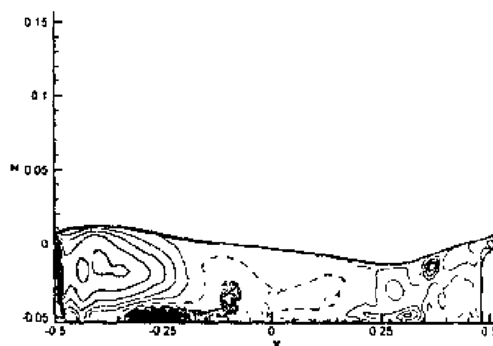


图 4　船体表面的压力分布

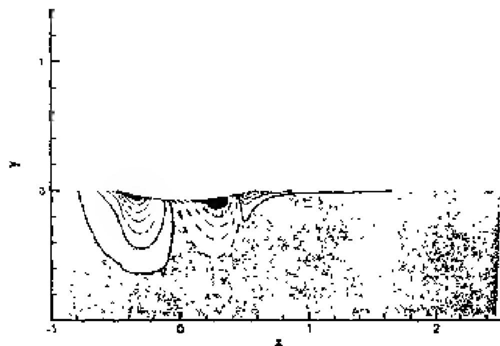


图 5　自由表面的波高分布

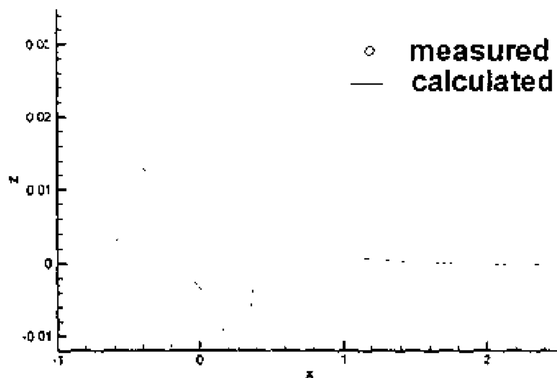


图 6　船侧波高分布

中可以发现船首和船尾的波峰位置和波高与实验吻合良好，但船中的波谷位置与实验值有所偏移，另外船中的小波峰也没有很好地反映出来。这些也有可能是网格点的布置还不够，也有可能是计算时间还不够充分，波形还不能完全向外传播，另外也有可能计算中的数值黏性将部分波耗散掉了，总的来说，波形的计算结果还有待于进一步改善。表 1 给出了计算所得到的阻力系数与试验值的比较，从表 1 中可以看出摩擦阻力系数与试验值还接近，而压力系

数还偏小，这可能是由于波形与实验结果的差异所至。

表1

	Present Cal. $Fn=0.316$，$Re=1.9\times10^6$	Present Cal. $Fn=0.0$，$Re=1.9\times10^6$	Experiment $Fn=0.316$，$Re=4.0\times10^6$
C_p	1.552×10^{-3}	3.106×10^{-4}	2.44×10^{-3}
C_f	3.633×10^{-3}	3.722×10^{-3}	3.52×10^{-3}
C_t	5.185×10^{-3}	4.032×10^{-3}	5.96×10^{-3}

以上计算需要在工作站上运行一个星期左右，从波形和计算速度等方面，带自由表面的黏性流计算还有必要继续进行深入研究。

参 考 文 献

1 Miyata H，Zhu M and Watanabe O. Numerical study on a viscous flow with free-surface waves about a ship in steady straight course by a finite-volume method. *J of Ship Research*，1992，36(4)：332~345

2 Hino T. A study of grid dependence in Navier-Stokes solutions for free surface flows around a ship hull. *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*，1995，176：11~18

3 Shiotani S，Kodama Y. Numerical computation of viscous flows with free surface around a series 60 model. *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*，1997，180：39~50

4 Toda F Stern，Tanaka I，Patel VC. Mean-flow measurements in the boundary layer and wake of a series 60 C_B =0.6 model ship with and without propeller. *J Ship Research*，1990，34(4)：225~252

合成孔径雷达成像调制模式在海洋遥感中的应用 1)

郑洪伟 沈一帆

(复旦大学力学与工程科学系，上海 200433)

摘要 论述了合成孔径雷达成像机制，在此基础上，应用合成孔径雷达成像调制模式，从浮标数据算出的海浪方向谱及合成孔径雷达的参数一起仿真出海浪的遥感图像谱。

关键词 合成孔径雷达，方向谱，遥感，成像模式

引 言

合成孔径雷达（SAR）属于主动式微波成像雷达。由于其具有比较小的实际天线获得较高地面分辨率（10~25m），以及穿透云层实现全天候、全天时观测等优点，引起海洋界的高度重视。海洋 SAR 资料的应用日趋广泛，应用深度逐渐加深，正从定性向定量、实验性应用向业务应用方向发展。

过去 30 多年是海洋遥感取得重大突破、开始引起遥感领域广大科技工作者兴趣并取的快速发展的年代。然而目前的航天 SAR 海洋应用技术在很多方面还不够成熟，制约了海洋应用。同时 SAR 可以对海洋表面进行成像这已成为公认的事实。然而，由合成孔径雷达接收的信号形成图象，是一项复杂的任务，甚至对于 SAR 的成像机制至今还没有完全清楚。因此，我们有必要对海洋遥感成像机制和成像仿真模式进行深入的研究。海洋表面状态的各种统计参数均可由海洋方向谱计算得到，所以海洋方向谱是一种完备的海况描述[1]；本文的主要研究目的就是在透彻了解 SAR 海浪成像机理的前提下，用实测的浮标数据中算出的方向谱，然后基于方向谱和选用成像模式仿真出图象谱。

1 从浮标数据得到方向谱

诚如引言中所言，方向谱对于研究海洋具有重要的意义。但是一般要从实测中获得方向谱要花费很多人力和经费。因此一般只测得一维无方向谱数据和一些计算用的低阶傅立叶系数，然后用一些简化的模型去计算方向谱。

最早方向谱的获得可追溯到 20 世纪 60 年代，Longuet-Higgins 等人[2]，Borgman[3]已经可以从离岸处测量获得方向谱，早期的方向谱没有通用的模型。由于用于计算傅立叶系数的实验数据的限制，这些研究人员，Chase 等人[4]，Longuet-Higgins 等人[2]，Borgman[3]，Forristall 等人[5]，Hasselmann 等人[6]，Sand[7]，一般直接选择角展函数，而不用傅立叶系列模型去分析。Longuet-Higgins[2]就是只测量垂直加速度(vertical acceleration)、倾斜度(angle of pitch)、摆角(angle of roll)去算出头五个傅立叶系数，然后算出角展函数。

本文的浮标数据是从美国国家浮标数据中心 NDBC (National Data Buoy Center)获得。其方向谱的计算公式(Steele 等[8])为

$$S(f,\alpha)=C11(f)^{*}D(f,\alpha) \tag{1}$$

这里 f 是波的频率，α 为方位角，$C11(f)$ 是无方向的谱，$D(f,\alpha)$ 是角展函数。

$$D(f,\alpha)=(1/\pi)^{*}\{0.5+r_1^{*}\cos(\alpha-\alpha_1)+r_2^{*}\cos[2^{*}(\alpha-\alpha_2)]\}$$

---

1) 获国家自然科学基金(19802007)及 863（863-818-06-02）资助和加拿大航天局(CSA)及美国国家浮标数据中心(NDBC)的帮助

其中α_1和α_2分别是平均和主要的波传播方向，也就是 Longuet-Higgins[2]的傅力叶系数。它们的计算式如下

$$r_1 = \sqrt{(a_1^* a_1 + b_1^* b_1)/a_0}$$

$$r_1 = \sqrt{a_2^* a_2 + b_2^* b_2}$$

$$\alpha_1 = 270.0 - \text{Arctan}(b_1, a_1)$$

$$\alpha_2 = 270.0 - (0.5^* \text{Arctan}(b_2, a_2) + \{0.\text{或者}180.\})$$

上面的a_1, a_2, b_1, b_2及$C11(f)$可以从浮标数据中获得。

2 成像仿真模式

2.1 SAR 成像机制

SAR 可以对海洋表面进行成像这已成为公认的事实，这可以在 Alpers 等人[9]，Shuchman 和 Shemdin[10]，Vesecky 和 Stewart[11]，Beal 等人[12]，Monaldo 和 Lyzenga[13]，Brüning 等人[14]的文章中看到。但是人们对于运动海洋波面 SAR 成像的机制还不是很清楚。经过许多年的讨论，关于运动海洋波面 SAR 成像的主要机制达成了一些共识，成像主要是电磁波与粗糙度不均匀分布的海面相互作用而形成的后向散射而得到的。成像理论基本上是雷达后向散射理论，即建立后向散射截面与海面短波波谱的关系，一般认为当入射角在0°～25°时，这种表面的散射特性受大尺度粗糙度所支配，可用基尔霍夫散射模式描述；而当入射角在20°～60°范围内，这种表面的散射特性受大尺度粗糙度所支配，也即来自每个面元的后向散射回波由海面维尺度波动的 Bragg 谐振散射机制决定(Valenzuela[15])。这种小尺度粗糙度是按照表面大尺度粗糙度的斜度分布来倾斜的。因此，在近垂直入射时，只要引用修正的菲涅耳反射系数(Rice[16])，就可用基尔霍夫模式。

布拉格共振条件是

$$\lambda_{\text{water}} = \frac{\lambda}{2\sin\theta}$$

因此布拉格共振把水波波长λ_{water}与雷达波长λ联系起来。

根据流体力学理论，水波波速V和水波波长λ_{water}有如下关系

$$V = \sqrt{\frac{g\lambda_{\text{water}}}{2\pi}}$$

把上面两者结合起来，以致由雷达回波的多普勒频谱可求得相应水波的波速、波长和波向。由于微尺度波动的这种在方向、能量和运动方面受更大尺度波动的调制，因此通常的风生海洋波在 SAR 图像上具有可视性。

Bruning 等人[14]提到从波高谱获得图像谱的公式

$$S(\boldsymbol{K}) = k^2 \left|\boldsymbol{M}_{rar}(k)\right|^2 \zeta(\boldsymbol{K}) \tag{2}$$

其中，$S(\boldsymbol{K})$为 SAR 图像亮度谱，$\zeta(\boldsymbol{K})$为波高谱。$k = \|\boldsymbol{K}\|$，即波数矢量的模。

海洋波雷达模式转换函数（MTF）描述了海洋表面的后向散射截面与长波波高谱之间的线性关系 (Plant[17])。

这里的模式转换函数$\boldsymbol{M}_{rar}(k)$(Zurk 和 Plnat[18])分成两部分

$$\boldsymbol{M}_{rar}(k) = m_h(k) - \mathrm{i}m_t(k)$$

其中，$m_t(k)$为倾斜调制模式转换函数，$m_h(k)$为水动力学调制模式转换函数。

$m_t(k)$在水平极化时为

$$m_t(k)=\left\{\frac{0.444\sin\theta}{0.111\cos\theta+1}-4\tan\theta-5\cot\theta\right\}\tanh kd\cos(\phi-\phi_\alpha)+$$

$$\left\{\frac{2\cos(\phi_w-\phi_\alpha)\sin(\phi_w-\phi_\alpha)}{\tan\theta(1+\cos^2(\phi_w-\phi_\alpha))}\right\}\tanh kd\sin(\phi-\phi_\alpha)$$

$m_t(k)$在垂直极化时为

$$m_t(k)=\left\{\frac{4\sin\theta\cos\theta}{1+\sin^2\theta}+\frac{4\sin\theta}{\cos\theta+0.111}-4\tan\theta-5\cot\theta\right\}\tanh kd\cos(\phi-\phi_\alpha)+$$

$$\left\{\frac{2\cos(\phi_w-\phi_\alpha)\sin(\phi_w-\phi_\alpha)}{\tan\theta(1+\cos^2(\phi_w-\phi_\alpha))}\right\}\tanh kd\sin(\phi-\phi_\alpha)$$

这里 ϕ_w风吹的方向，θ是雷达入射到海面的入射角，ϕ_α是天线的方向，ϕ波传播的方向，k是水波波数矢量的模，即$k=\sqrt{K_x^2+K_y^2}$，d是水深。

$m_h(k)$为

$$m_h(k)=2B\pi\sqrt{g/(U\Omega(k))}\left|\cos(\phi-\phi_a)\right|e^{i\phi_h}$$

其中

$$\Omega(k)=\sqrt{gk\tanh kd}$$

这里 B在垂直极化时为$B=1.2$，水平极化时为$B=2.0$，m_h相位ϕ_h 常取为0，U是风速。

2.2 成像（仿真）模式

海浪 SAR 成像的轨道运动效应包括三个著名的模式：时间依赖模式(the time-dependent model)，速度绑定模式(the velocity-bunching model)和准线性模式(the quasi-linear model)。它们都是用于从原始的 SAR 参数直接仿真出海浪方向谱。

时间依赖模式是未经过近似处理的最原始的 SAR 成像模式（Lyzenga[19]；Kasilingam 和 Shemdin[20]；Raney 和 Vachon[21]）。这里采用 Zurk 和 Plant[18]的 Time-Dependant Model，Velocity-bunching Model 与 Quasi-Linear Model 三个成像模式。其实它们是同一个模式的不同简化，这一点 Plant [22]已解决。本文这里只用准线性模式仿真。

2.2.1 准线性模式

$$S(\boldsymbol{K})=\left|\frac{\pi^{3/2}T<\sigma_0>}{V}\exp\left\{-\left(\frac{K_xR}{2Vk_m(1/\tau_s^2+1/T^2)^{-0.5}}\right)^2\right\}\cdot(\boldsymbol{M}_{rar}(k)+\boldsymbol{M}_{vb}(\boldsymbol{K}))\frac{kA_w(k)}{\tanh kd}\right|^2 \quad (3)$$

这里 $\boldsymbol{K}$为水波波数向量，$\boldsymbol{K}=(K_x,K_y)$。$\gamma(k)$和$\chi(k)$均为随机量，$\boldsymbol{M}_{vb}(\boldsymbol{K})$是速度绑定模式转换函数(Alpers 等人[9])，τ_s是相关时间。

$$\boldsymbol{A}_w(k)=(\cos\gamma(k)+\mathrm{i}\sin\gamma(k))\sqrt{\chi(k)}/(kd)$$

$$\boldsymbol{M}_{vb}(\boldsymbol{K})=-\left[\frac{R\Omega(k)K_x}{Vk}\right]\left[\cos\theta\tanh kd-\mathrm{i}\frac{K_y}{k}\sin\theta\right]$$

$$\tau_s=1/\left(\sqrt{2}k_m\delta u_t\right)$$

$$\delta u_t=\delta u_r\left[1+\frac{4C_B^2\sigma_a\sigma_r\sin^2\theta}{(\sigma_a+\sigma_r)^2(\delta u_r)^2}\right]^{1/2}$$

其中，k_m是微波波数，σ_a，σ_r分别为前进和后退布拉格波的散射截面，δu_r是速展。

$$\sigma_a = \sec h^2[1.24(\phi_a - \phi_w + \pi)]$$

$$\sigma_r = \sec h^2[1.24(\phi_a - \phi_w)]$$

$$\delta u_r = \left\{ \delta u_0^2 + \iiint G^2(k)\Omega^2 F(\boldsymbol{K},\Omega)\left[1 - e^{\left(\frac{-k^2 A}{2\pi}\right)} e^{\left(\frac{-\Omega^2 T^2}{4\pi}\right)}\right] \mathrm{d}K_x \mathrm{d}K_y \mathrm{d}\Omega \right\}^{1/2}$$

其中，A 是雷达波扫射面积，δu_0是小面元固有的速展，约等于 0.07m/s，$F(\boldsymbol{K},\Omega)$ 是波谱，这里$\boldsymbol{K},\Omega$不仅仅是长波。

$$A = \left[\left(\frac{c\tau_p}{2\sin\theta}\right)^2 \cos^2\phi + \left(\frac{\lambda R}{2VT}\right)^2 \sin^2\phi\right]$$

其中，τ_p是脉冲宽，c是光速，$\lambda = 2\pi / k_m$

$$G^2(k) = \sin^2\theta \coth^2 kd \cos(\phi - \phi_w) + \cos^2\theta$$

2.2.2 速度绑定模式

$$I(x,y) = \frac{\pi T}{2V}\iint h(y-y)\frac{\sigma_0(x',y')}{\rho_a'(x',y')}\exp\left\{-\frac{\pi^2}{{\rho_a'}^2}\left[(x-x') - \frac{Ru_r(x',y')}{V}\right]^2\right\}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \qquad (4)$$

其中，ρ_a' 是位向衰落分辨率（the azimuth degraded resolution）

$$\rho_a' = \frac{\lambda R}{2V}\left[\frac{1}{T^2} + \frac{1}{4}k_m^2 T^2 a_r^2(x',y') + \frac{1}{\tau_s^2}\right]^{1/2}$$

2.2.3 时间依赖模式

$$I(x,y) = \frac{k_m}{\pi R}\iiint h(y-y')\sqrt{\frac{\pi}{\gamma + j\alpha}}\sigma_0(x',y',t)e^{-T^2 b^2/2}e^{(b+ja)^2/[4(\gamma+j\alpha)]}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}t \qquad (5)$$

这里 $I(x,y)$ 是图像强度函数，h 一般取为脉冲函数，V 为遥感平台的运动速度，R 是雷达天线到目标的距离，$u_r(x',y',t)$ 是散射距向速度，$a_r(x',y',t)$ 是散射距向加速度，T 是积分时间，τ_s是相关时间，$\sigma_0(x',y',t)$是后向散射截面。

a，b，α，β，$u_r(x',y',t)$，$a_r(x',y',t)$ 的计算公式见 Zurk 和 Plant[18]。

3 仿真计算

本文的浮标数据从 NDBC 获得，其实测位置是墨西哥海湾 25 53 30 N，93 34 03 W 的点 42002，取 1998 年的浮标数据，画出的方向谱图，见图 1。

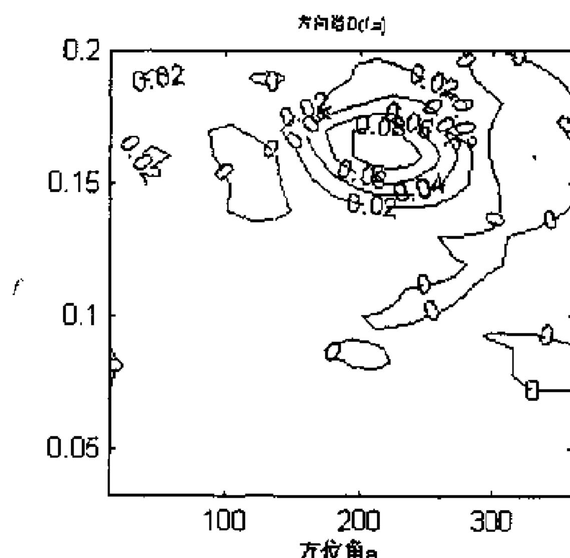


图 1　从浮标数据算得的方向谱等高线图

仿真用到的参数取值如下：

微波波数k_m：26.7049m^{-1}，天线方向ϕ_a：49°，脉冲宽度τ_p：10ns，入射角θ：40°，积分时间T：2.1s，极化方式：水平极化，R/V 比值：20s，波的方向ϕ：30°，平均水深d：3200m，平均风向ϕ_w：55°，风速U：13m/s。

用准线性模式和上述参数仿真出来的图像谱图见图 2。

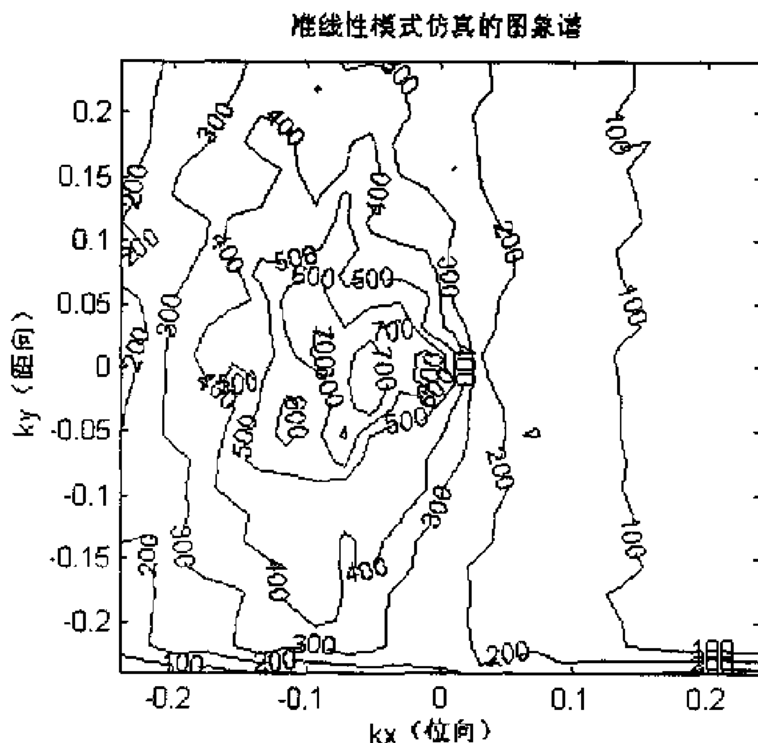


图 2　基于准线性仿真模式仿真的图像谱

参　考　文　献

1　Hasselmann K，Hasselmann S. On the nonlinear mapping of an ocean wave spectrum into a synthetic aperture radar image spectrum and its inversion. *J Geophys Res*，1991，96，10，713-10，729

2　Longuet-Higgins MS，Cartwright DE，Smith ND. Observations of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating

buoy. *Ocean Wave Spectra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersy, 1963. 111~136

3 Borgman LE. Directional spectra models for design use. In: Proceeding of the 1st annual offshore Technology Conference (No.1069), Houston, Texas, 1969, 1: 721~741

4 Chase J et al. The directional wave spectrum of wind-generated sea as determined form data obtained by the stereo wave observation Project. Coll Eng Report. New York University (Ju.y), 1957

5 Forristall GZ, Ward EG, Cardone VJ, Borgman LE. The directional spectra kinematics of surface gravity waves in tropical storm delia. *J Phys Oceanogr*, 1978, 8: 889~909

6 Hsselmann DE, Dunckel M, Ewing J. Directional wave spectra observed during JONSWAP, 1973 *J Phys Oceanogr*, 1980, 10: 1264~1280

7 Sand S. Short and long wave spectra. In: Proceedings of the conference on Directional Wave Spectra Applications, Berkeley, ASCE, 1982. 103~115

8 Steele KE, Chung-Chu Teng and Wang DWC. Wave direction measurements using pitch-roll buoys. *Ocean Engng*, 1992, 19, 4: 249~375

9 Alpers W, Ross DB, Rufenach CL. On the detectability of ocean surface waves by real and synthetic aperture radar. *J Geophys Res*, 1981, 86: 6481~6498

10 Shuchman RA, Shemdin OH. SAR imaging of the ocean surface waves during the Marineland experiment. *IEEE J Oceanic Eng*, 1981, OE-8: 83~90

11 Vesecky JF, Stewart RH. The observation of ocean surface phenomena using imagery from SEASAT synthetic aperture radar; An assessment. *J Geophys Res*, 1982, 87: 3397~3420

12 Beal RC, Tilley DG, Monaido FM. Large and small-scale spatial evolution of digitally processed ocean wave height spectra from SEASAT synthetic aperture radar. *J Geophys Res*, 1983, 88: 1761~1778

13 Monaldo FM, Lyzenga DR. On the estimation of wave slope and height-variance spectra from SAR imagery. *IEEE Trans Geosci*, 1986, GE-24: 542~551

14 Bruing C, Alpers W, Zambresky LF, Tilley DG. Validation of a synthetic aperture radar ocean wave imaging theory by the Scuttle Imaging Radar-B experiment over the North Sea. *J Geophys Res*, 1988, 93, 15: 403-15, 425

15 Valenzuela GR. Theories for the interaction of electromagnetic and oceanic waves-A review. *Boundary-Layer Meteorology*, 1978, 13: 61~85

16 Rice SO. Reflection of electromagnetic waves from slightly rough surfaces. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 1951, 4: 141~144

17 Plant WJ. The modulation transfer function: Concept and applications, in Radar Scattering from Modulated Wind Waves, edited by Komen GJ and Oost WA, Kluwer Acad, Norwell, 1989. 155~172

18 Zurk LM, Plant WJ. Comparison of actual and simulated synthetic aperture radar image spectra of ocean waves. *J Geophys Res*, 1995, 100, C5: 8914~8931

19 Lyzenga DR. An analytic representation of the synthetic aperture radar image spectrum for ocean waves. *J Geophys Res*, 1988, 93, 13: 859~865

20 Kasilingam DP, Shemdin OH. Theory for synthetic aperture radar imaging of the ocean surface: With application to the tower ocean wave and radar dependence experiment on focus, resolution, and wave height spectra. *J Geophys Res*, 1988, 93, 15: 323~333

21 Raney RK, Vachon PW. Synthetic aperture radar imaging of ocean waves from an airborne platform: Focus and tracking issues. *J Geophys Res*, 1988, 93(12): 475-12, 486

22 Plant WJ. Reconciliation of theories of synthetic aperture imagery of ocean. *J Geophys Res*, 1992, 97, c5: 7493~7501

浅滩中波在流场中绕射

赵　明　滕　斌　柏　威

（大连理工大学海岸及近海工程国家重点实验室，大连 116024）

摘要　利用格林定理和移动脉动源建立了一个积分方程方法，并利用高阶单元方法对积分方程进行了离散和求解，用于计算波浪和水流在浅滩上发生的绕射现象。作为算例，应用这一方法对波浪在抛物形浅滩周围和流场作用下的波高分布做了计算，得到了水流对波浪绕射的影响关系，其计算结果可作为其他流场中波浪绕射的简化数值模拟方法的比较基准。

关键词　波浪，水流，绕射

引　言

缓坡方程(Berkhoff 1972：Ito 1972；Gao&Radder，1998)[1-3]被广泛应用于实际海岸带的波浪场计算中，该方程忽略了波浪的非传播模式，假定势函数在垂直方向的分布与水平海底的情况相同。Berkhoff(1972)[1]提出的缓坡方程为

$$\nabla^2\Phi + k_c^2\Phi = 0 \tag{1}$$

式中Φ为速度势函数，∇^2为水平拉普拉斯算子，k_c为有效波数，按下式定义

$$k_c^2 = k^2 - \frac{\nabla^2 (CC_g)^{1/2}}{(CC_g)^{1/2}} \tag{2}$$

如水深恒定的情况，波数k由弥散方程

$$\omega^2 = gk\tanh kh \tag{3}$$

确定，式中ω为波浪圆频率，h为当地水深。波速C和群速度C_g的定义方法和恒定水深情况相同。

缓坡方程和射线方法的不同之处在于，射线方法假设波能量只沿射线方向传播，而缓坡方程认为波能量还能够横穿射线方向，或者说沿着波峰线方向传播。

Booij(1981)[4]将 Berkhoff 的缓坡方程推广应用于变水深情况下波浪在流场中的折射和绕射计算。Kirby(1984)[5]进一步推导出了用于计算变水深情况下流场中波浪的折射和绕射的缓坡方程

$$\nabla\cdot(CC_g\nabla\Phi) + 2\mathrm{i}\sigma U\cdot\nabla\Phi + (k^2CC_g - \omega^2 + \sigma^2 + \mathrm{i}\sigma\nabla\cdot U)\Phi = 0 \tag{4}$$

其中$\sigma = \omega + k\cdot U$，$\sigma$为在固定空间坐标系中的波浪圆频率，$\omega$为随水流一起运动坐标系中的圆频率，$U$为水流速度。在建立这个方程中假定某一点的波浪如射线理论中一样只沿一个方向传播，从而确定波数的方向。而实际上缓坡方程认为波能可以沿任何方向传播，也就是波浪不仅折射、而且绕射。在流场中波能向不同方向的传播与水流速方向间的夹角是不同的，因而该点波数是随着方向而改变的，波数不随方向变化的假定不能充分地利用缓坡方程的特性，这种假设也必然导致一定的误差。但是，至今尚未见到关于这种假设所引起的误差的评价。

本文提出了一个波浪和水流在水平海底局部浅滩上全绕射的计算方法。此方法通过利用向前移动的脉动源作为格林函数建立了一个积分方程，计算时采用高阶单元对浅滩表面进行离散。虽然此方法在实际工程计算中并不是十分快速的，但由于考虑了波浪和水流的共同绕射，可得到线性简化下的精确结果，作为其它简化方法比较的基准。

1 数学方程

定义一个笛卡尔坐标系 $Oxyz$，$z=0$ 平面处于平均水平面上，z 轴垂直向上为正，水流入射方向与 x 轴正方向一致（如图 1）。假定水流为不可压均匀无旋流，存在一势函数 Φ 满足 Laplace 方程

$$\nabla^2\Phi=0 \tag{5}$$

和定义在自由水面

$$\zeta=-\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi\right)_{z=\zeta} \tag{6}$$

的非线性自由水面边界条件为

$$\Phi_{tt}+2\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi_t+g\Phi_z+\frac{1}{2}\nabla\Phi\cdot\nabla(\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi)=0 \tag{7}$$

在海底和浅滩表面 S_0 上，Φ 满足全反射边界条件

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=0 \tag{8}$$

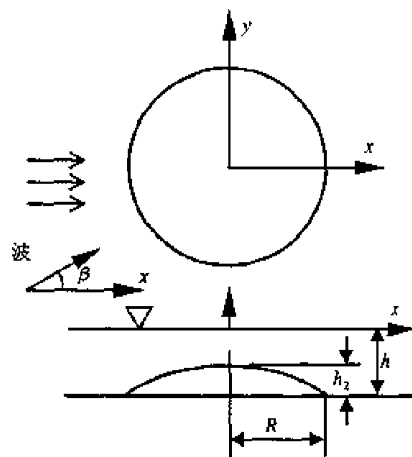


图 1 抛物形浅滩地形

其中，n 为浅滩表面的法向量，指出流体为正，以及波浪在无穷远处满足的无穷远边界条件。在本文中假设流速远小于波速，并近似到一阶波陡 $\varepsilon=kA$ 下。

将速度势分解成稳定势 Φ_s 和振荡势 Φ_o 两个部分

$$\Phi(x,t)=\Phi_s(x)+\Phi_o(x,t) \tag{9}$$

稳定势写为

$$\Phi_s(x)=U\chi_s \tag{10}$$

稳定势函数 χ_s 可以认为是水流的入射势和由于浅滩引起的绕射势之和

$$\chi_s(x)=x-\chi \tag{11}$$

在小流速假定下，χ 在自由表面上满足“刚盖”条件

$$\frac{\partial\chi}{\partial n}=0 \tag{12}$$

在浅滩表面 S_B 满足固面条件

$$\frac{\partial\chi}{\partial n}=n_1 \tag{13}$$

在无穷远处

$$\nabla\chi=0 \tag{14}$$

对于规则入射波，波动势可写为

$$\Phi_O(x,t)=Re[\phi(x)e^{-i\sigma_0 t}]$$

式中 σ_0 为远离浅滩处水流中的波浪入射频率。在水流参数 $\tau=\sigma_0U/g$ 和波陡的一阶近似下，波动势的自由表面边界条件可以在静水面上写为

$$-\nu_0\phi-2i\tau\nabla_2\phi\cdot\nabla_2\chi_s+i\tau\phi\nabla_2^2\chi+\phi_z=0 \tag{15}$$

其中，$\nu_0=\sigma_0^2/g$，∇_2 为二维水平梯度算子。在距浅滩无穷远处，上式可简化为

$$-\nu_0\phi - 2\mathrm{i}\tau\frac{\partial\phi}{\partial n} + \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \tag{16}$$

在海底和浅滩表面满足固面边界条件

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \tag{17}$$

波动势函数在无穷远处满足无穷远边界条件。

2 积分方程

对于稳定绕射势，利用格林函数(Newman，1991)[6]

$$G_0(x;x_0) = -\frac{1}{4}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+(z-z_0+2nh)^2}} + \frac{1}{\sqrt{R^2+(z+z_0+2nh)^2}}\right] \tag{18}$$

可以得到积分方程

$$\alpha\chi(x_0) - \iint_{S_B}\chi(x)\frac{\partial G_0(x;x_0)}{\partial n}\mathrm{d}s = \iint_{S_B}G_0(x;x_0)n_1\mathrm{d}s \tag{19}$$

其中 R 为源点与场点的水平距离。此格林函数在自由表面上满足“刚盖”条件，在海底满足全反射条件。消去固角系数 α (Eatock Taylor & Chau，1992；Teng & Eatock Taylor，1995a)[7, 8]，可得到一新的积分方程

$$\chi(x_0) - \iint_{S_B}[\chi(x)\frac{\partial G_0(x;x_0)}{\partial n} - \chi(x_0)\frac{\partial G_0(x;x_0)}{\partial n}]\mathrm{d}s = -\iint_{S_B}G_0(x;x_0)n_1\mathrm{d}s \tag{20}$$

根据自由表面边界条件式（15）和周期波的无穷远边界条件，可以得到格林函数(Wehausen and Laitone，1960) [9]

$$4\pi G(x;x_0) = -\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{31}} \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{\lambda W}\frac{(\lambda f(\tau)+\nu)\cosh\lambda(h+z_0)}{\pi(\lambda F(\lambda,\tau)-\nu\cosh\lambda h)}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta \tag{21}$$

其中

$$\begin{aligned} W &= -h + \mathrm{i}[(x-x_0)\cos\theta + (y-y_0)\sin\theta] \\ f(\tau) &= 1 - 2\tau\cos\theta \\ F(\tau,\lambda) &= \sinh\lambda h + 2\tau\cos\theta\cosh\lambda h \end{aligned} \tag{22}$$

应用脉动的和具有反向移动速度的振荡源，及格林第二定理，可以得到类似于无限水深情况下(Nossen et al，1991) [10]积分方程

$$\alpha\phi(x_0) - \iint_{S_B}\phi(x)\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s + 2\mathrm{i}\tau\iint_{S_F}\phi(x)(\nabla_2 G\cdot\nabla_2\chi + \frac{1}{2}G\nabla_2^2\chi)\mathrm{d}s = \phi_I(x_0) \tag{23}$$

其中入射势为

$$\phi_I(x) = -\frac{\mathrm{i}gA_0}{\omega}\frac{\cosh k(z+h)}{\cos kh}e^{\mathrm{i}kx\cos\beta} \tag{24}$$

β 为入射波方向与正 x 轴向的夹角。消去固角系数，得到一个新的积分方程

$$\phi(x_0) + \iint_{S_B}[\phi(x_0) - \phi(x)]\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s = -\mathrm{i}\tau\iint_{S_F}\phi(x)(\nabla_2 G\cdot\nabla_2\chi + \frac{1}{2}G\nabla_2^2\chi)\mathrm{d}s + \phi_I(x_0) \tag{25}$$

稳定扰动势 χ 的导数随着距离浅滩的距离的增加而迅速减少，因此自由表面上的积分可以只在浅滩上面比较小的区域上进行。

因为格林函数的计算非常耗费时间，并且在浅滩表面和自由表面上都有未知项，所以在实际应用中并不应用式（25）直接计算。本文应用一种摄动展开方法，将波动势函数和格林函数展开成关于流参数 τ 的泰勒级数

$$\phi = \phi^{(0)} + \tau\phi^{(1)} + 0(\tau^2), \quad G = G^{(0)} + \tau G^{(1)} + 0(\tau^2) \tag{26}$$

其中 $G^{(0)}$ 为静水中的格林函数，$G^{(1)}$ 与 $G^{(0)}$ 具有下述关系

$$G^{(1)} = -2\mathrm{i}\partial^2 G^{(0)} / \partial v_0 \partial x \tag{27}$$

将式（26）代入式（25），对 τ 的同阶项进行合并，可以得到两个积分方程。对 τ 的零阶项可得

$$\phi^{(0)}(x_0) + \iint_{S_B} [\phi^{(0)}(x_0) - \phi^{(0)}(x)] \frac{\partial G^{(0)}}{\partial n} \mathrm{d}s = \phi_I(x_0) \tag{28}$$

对 τ 的一阶项可得

$$\begin{aligned}\phi^{(1)}(x_0) + \iint_{S_B} [\phi^{(1)}(x_0) - \phi^{(1)}(x)] \frac{\partial G^{(0)}}{\partial n} \mathrm{d}s = -\iint_{S_B} [\phi^{(0)}(x_0) - \phi^{(0)}(x)] \frac{\partial G^{(1)}}{\partial n} \mathrm{d}s - \\ \mathrm{i}\iint_{S_F} \phi^{(0)} [\nabla_2 G^{(0)} \cdot \nabla_2 \chi + \frac{1}{2} G^{(0)} \nabla_2^2 \chi] \mathrm{d}s\end{aligned} \tag{29}$$

对依然存在的柯西主值积分（CPV）的计算采用一种直接的数值理论，此技术分离出 CPV 积分的奇异核，使之互相抵消，而剩余的积分项可以直接求得。

3 波高的数值计算结果

近似到波陡的一阶量，波面可以写为(Teng and Eatock Taylor，1995b)[11]

$$\zeta = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi\right)_{z=0} \tag{30}$$

将波面展开成关于流参数 τ 的泰勒级数，有

$$\zeta(x,t) = \zeta^{(0)}(x,t) + \tau\zeta^{(1)}(x,t) + \cdots \tag{31}$$

其中

$$\zeta^{(0)} = -\frac{\mathrm{i}\sigma_0}{g}\phi^{(0)}, \quad \zeta^{(1)} = -\frac{\mathrm{i}\sigma_0}{g}\phi^{(1)} - \frac{1}{\sigma}\nabla\chi_s \cdot \nabla\phi_0^{(0)} \tag{32}$$

上述方法被应用于计算水平海底上回转抛物形浅滩周围波浪在弱流中的绕射，图 1 为用于计算的回转抛物形浅滩，入射波波长 L 等于浅滩半径 R 的一半。水平海底的水深为 $h_1/R=0.1875$，浅滩中心的水深为 $h_2/R=0.0625$。坐标原点位于浅滩中心的正上方，流的方向与 x 轴的正方向相同或相反。

利用地形的对称性，只取四分之一计算域进行单元剖分。在四分之一域内，浅滩表面剖分成 400(20(径向)×20(周向))个 8 节点和 6 节点的二阶单元，自由表面剖分成 1600 个 8 节点的二阶单元。

图 2 至图 7 为入射波方向与 x 轴正方向一致时波高在各不同断面的分布情况。β 为波向与 x 轴正向所成的角度，C 为入射波在水平海底上的波速。从图中可以看到流的存在对波高分布具有很明显的影响，从波高在 y/L 为常数断面上的分布中可以看到，顺流时波幅振荡的周期变长，逆流时波幅振荡的周期变短。另外可以发现，在本算例中不论是逆流还是顺流下波幅的最大值都有所增加。

图 8 至图 13 为入射波方向与 y 轴正方向一致时的波高分布情况。可以看出，在 y/L 为常

数的断面，波高分布已不再是关于 x 轴对称的，而是向流速的方向偏移。在 $x/L<0$ 的断面，水流中的波幅振荡周期变短；而在 $x/L>0$ 的断面，水流中的波幅振荡周期变长。

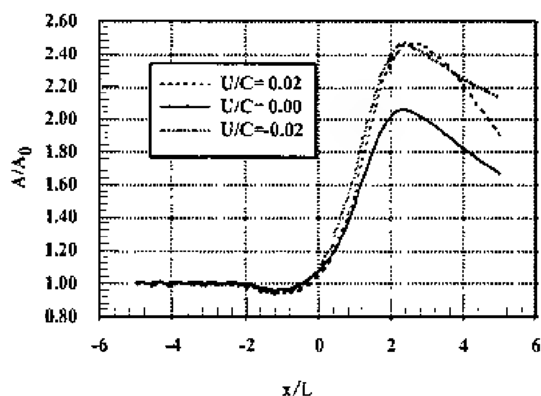


图 2 波高在 y/L=0 断面的分布(b=0)

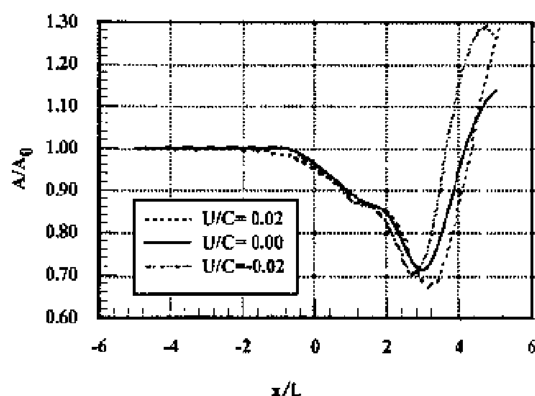


图 3 波高在 y/L=2 断面的分布(b=0)

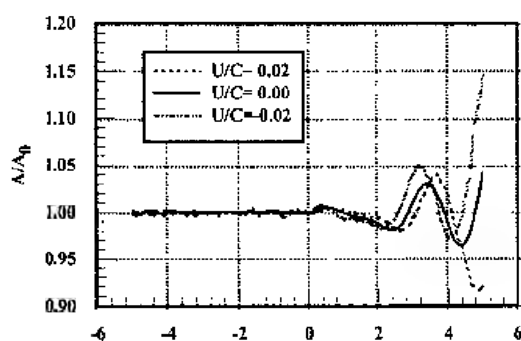


图 4 波高在 y/L=4 断面的分布（b=0）

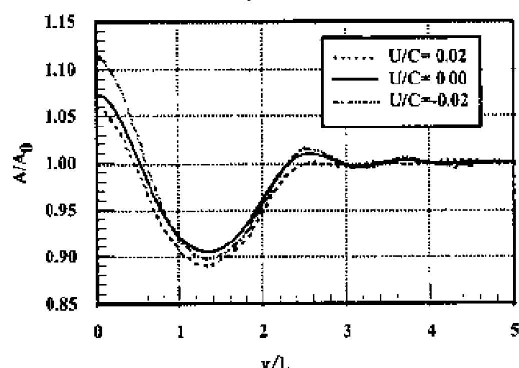


图 5 波高在 x/L=0 断面的分布（b=0）

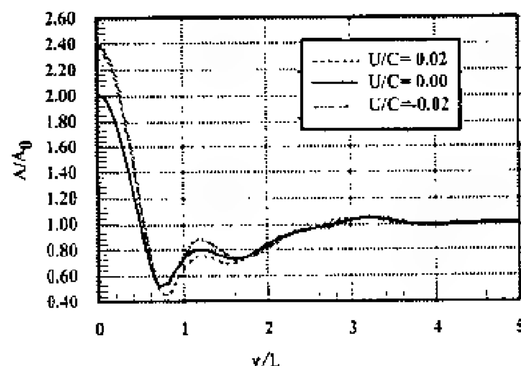


图 6 波高在 x/L=2 断面的分布（b=0）

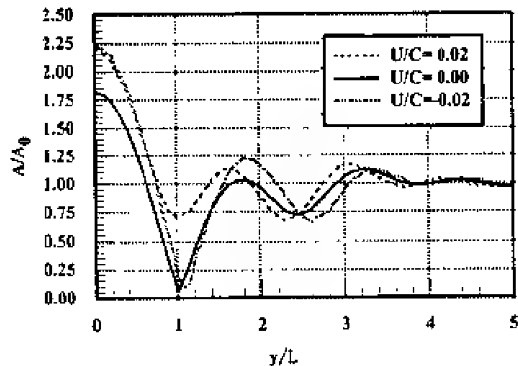


图 7 波高在 x/L=4 断面的分布 （b=0）

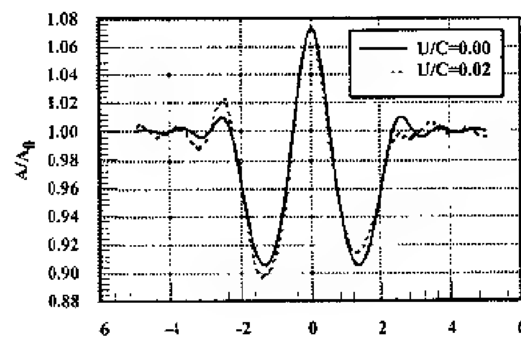


图 8 波高在 y/L=0 断面的分布（b=p/2）

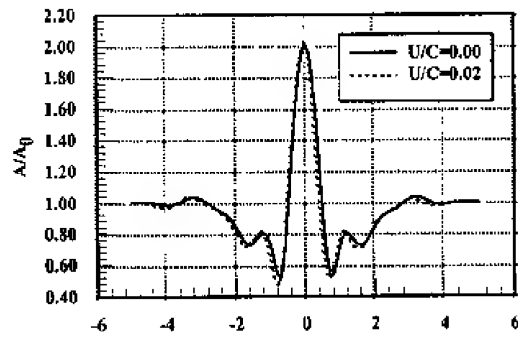


图 9 波高在 y/L=2 断面的分布（b=p/2）

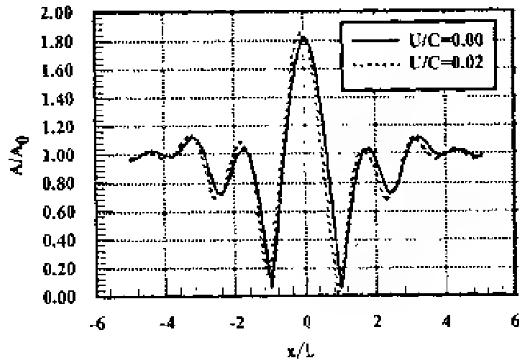


图 10 波高在 y/L=4 断面的分布（b=p/2）

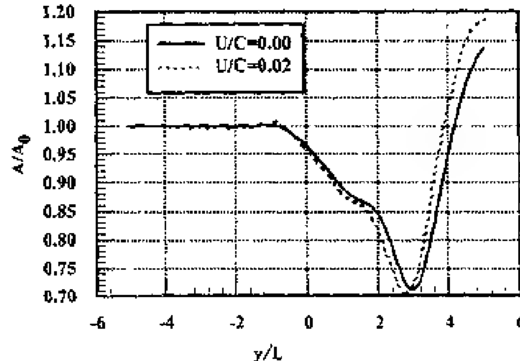


图 11 波高在 x/L=-2 断面的分布（b=p/2）

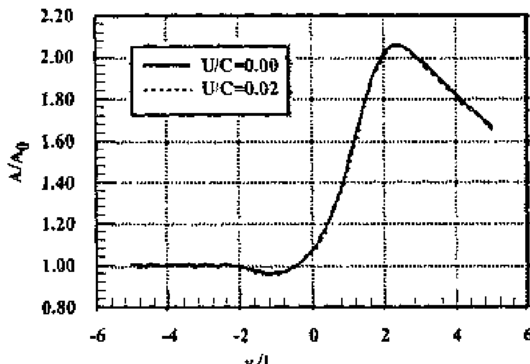


图 12 波高在x/L=0断面的分布（b=p/2）

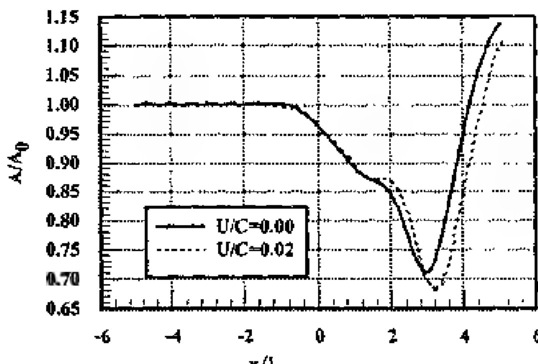


图 13 波高在x/L=2断面的分布（b=p/2）

4 结束语

利用格林公式和一个移动的振荡源，推导了计算波浪在流场中绕射的二维积分方程，并将其用于计算波浪在水平海底上局部抛物形浅滩局围的绕射问题。利用高阶边界元方法，分别对波与流方向同向、垂直、反向的情况进行了计算。计算结果表明流对波高分布的影响是很明显的，并且最大波高无论是波与流同向或反向都增大。此方法在工程中复杂地形的应用中并不经济，由于应用二维积分方程，推导时没有做近似简化，所以对于简单问题的计算结果可作为其他简化方法的校合的参考。

参 考 文 献

1 Berkhoff JCW Computation of combined refraction-diffraction 13th *Int Conf Coastal Eng*, ASCE, 1972, 1: 471~190
2 Ito Y and Tanimoto K. A method of numerical analysis of wave propagation-application to wave diffraction and refraction. 13th *Int Conf Coastal Eng*, ASCE, 1972, 1: 503~521
3 Gao Q and Radder AC. A refraction-diffraction model for irregular waves. *Proc Int Conf on Coastal Engineering*, 1998, 1: 366~379
4 Booij N. Gravity waves on water with non-uniform depth and current. Rep. No. 81-1, Dept Civil Engrg, Delft Univ of Technol, Delft, The Netherlands, 1981
5 Kirby JT. A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography. *J Geophys Res*, 1984, 89(C1): 745~747
6 Newman JN The approximation of free-surface Green functions. Wave Asymptotics, Chapter 7, *Camb Univ Press*, Cambridge, UK, 1991
7 Eatock Taylor R and Chau FP. Wave diffraction-some developments in linear and non-linear theory. *J of Offshore Mech and Arctic Eng*, 1992, 114: 185~194
8 Teng B and Eatock Taylor R. New higher-order boundary element methods for wave diffraction/radiation. *Applied Ocean Research*, 1995a, 17: 71~77
9 Wehausen JV and Laitone EV. Surface waves. Handbuch der Physik, Springer-Verlag, 1960
10 Nossen J, Grue J and Palm E. Wave forces on three-dimensional floating bodies with small forward speed. *J Fluid Mech*, 1991, 227: 135~160
11 Teng B and Eatock Taylor R. Application of a higher-order BEM in the calculation of wave run-up on bodies in a weak current *Int Journal of Offshore and Polar Engineering*, 1995b, 5(3): 219~224

模拟孤立波在斜坡上爬高的新模型 1)

刘　桦　　王本龙　　何友声　　张　近*

(上海交通大学，上海 200030)　*(香港城市大学，香港)

摘要　针对斜坡上的波浪爬高计算问题，讨论并建立了适合于 Boussinesq 模型的严格的水边界条件，进而引入水平坐标的伸缩变换，建立了数学模型。本文提出的计算模型不仅在动边界处理上具有合理的理论基础，而且大量的数值实验表明本模型是有效的。应用本模型的数值结果，讨论了色散对孤立波爬高的影响。

关键词　孤立波，Boussinesq 方程，爬高

引　言

为了认识和预报海啸这一海洋灾害对海岸带的影响，人们在过去十多年内对孤立波在海滩上的爬高问题进行了较广泛的研究，涉及解析、数值模拟和物理模型实验等方面。尽管美国和日本等国家已建立了较完善的海啸预警系统，包括编制以孤立波爬高理论计算为基础的沿岸风险图，但是，有关的基础研究工作似乎还方兴未艾，如 Liu et al(1994)[1]、Kanoglu & Synolakis(1998)[2]。其关键点是如何建立严格的非定常的水边线（动边界）的力学模型，包括严格的数学提法及其实现。Synolakis(1987)[3]、Kanoglu & Synolakis(1998)[2]采用的水深为零（几何条件）和水位梯度为零的提法，严格地来讲在理论上是不完备的。 在海岸工程界，为了应用 Boussinesq 模型计算波浪在海滩上的爬高，陶建华(1983)[4]提出了“窄缝模型”，Madsen et al(1997)[5]在此基础上发展起来了“假想多孔介质模型”，其好处在于可以很方便地在 Boussinesq 模型中实现，并且可推广至平面二维的爬高计算，这些模型毕竟在理论上回避了处理水边线的难点，且得到的最大爬高值偏小。Zhang(1996)[6]给出了水边线的几何条件、运动学条件和动力学条件，但是仍有待进行广泛的计算验证，特别是推广至平面二维的工作有待继续深入。此外，斜坡式防波堤仍然是一种广泛使用的海岸工程结构形式，研究浅水大波，如孤立波，在斜坡上的爬高对海岸工程结构物的设计具有重要的实际意义。

从理论上讲，若不采用 Boussinesq 模型，直接求解满足 Laplace 方程的势流问题则不存在处理动边界的困难。例如，针对带自由表面的水动力学问题，Kim et al (1983)[7]和 Liu et al(1992)[8]采用基于样条插值的边界积分方法和混合的 Euler-Lagrange 自由面跟踪技术，对自由表面的晃荡、飞溅以及斜坡上孤立波的变形和破碎进行了模拟。依据以下原理，位于自由表面与固壁相交处的水质点一直沿固壁运动且占据动边界位置，我们可以根据得到的固壁上速度势计算动边界沿固壁的运动速度。刘桦等(1999，2000)[9, 10]应用 BIEM 方法讨论了孤立波的传播及其在直墙上的爬高问题。当然，若在动边界上考虑粘性效应，如引进接触线模型，问题会变得复杂，见 Liu et al (1998)[11]。

本文将讨论应用经典 Boussinesq 方程计算斜坡上孤立波的爬高问题。首先使用坐标伸缩变换方法，如 Hamilton(1977)[12]、Zhang(1995)[6]，将具有动边界物理空间变成固定的计算域，得到一组新坐标系下的 Boussinesq 方程。进而采用有限差分方法，建立了数值模型，对陡坡

---

1) 上海市科委青年科技启明星计划(98QG14044)和上海市重点学科基金资助项目

上的孤立波爬高进行了全过程模拟，并与现有的 BIEM 计算结果进行比较。

1　基本方程

不妨取平底部分的水深 h_0 为特征长度，$\sqrt{gh_0}$ 为特征流速，$\sqrt{h_0/g}$ 为特征时间。无量纲的 Boussinesq 方程为，见 Whitham(1974)[13]

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)u]=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \zeta}{\partial x}=\frac{1}{3}h^2\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2} \tag{2}$$

其中，u 为水深平均流速，ζ 为水位，h 为水深。地形如图 1 所示，L_0 为孤立波峰到角点的距离；$h=h(x)$ 为水深，平底部分水深为 1；防波堤的斜率为 $1/L$。

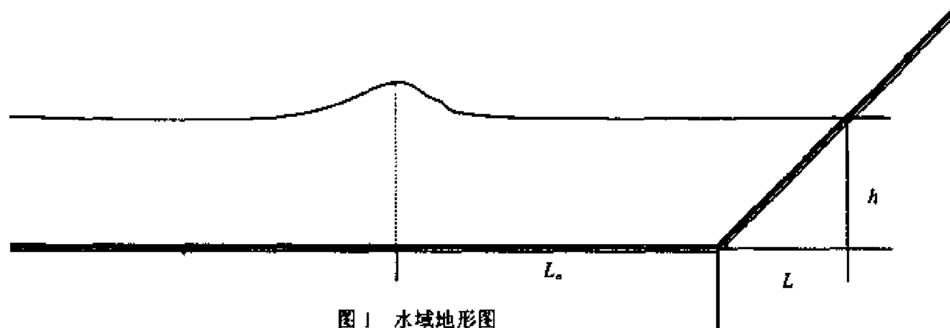


图 1　水域地形图

右侧自由边边界条件为

$$h(X(t))+\zeta(X(t),t)=0 \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=u(X(t),t)=U(t) \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=-\zeta_x \tag{5}$$

左侧无穷远边界

$$\zeta\big|_{x=-\infty}=0 \qquad u\big|_{x=-\infty}=0 \tag{6}$$

其中 $X(t)$ 为拉格朗日意义上的动边界坐标；式(3)为几何条件，式(4)为运动学条件，式(5)为动力学条件，见 Zhang(1996)[6]。依据边界上的水位梯度，由式(5)计算动边界上水质点的运动速度，进而采用式(4)确定新的动边界坐标。几何学条件则用来确定动边界上的水位 ζ。

引入线性变换

$$x=(1+X/L)x'+X \tag{7}$$

$$t=t' \tag{8}$$

其中 X 为动边界的瞬时坐标，是时间的函数，其最大值相当于孤立波的爬高，x'，t' 为变换后的空间和时间坐标，x，t 为实际物理系的自变量。因此，每一步计算均在变换后的计算域 $[-L,0]$ 中进行，但是因变量 u 和 ζ 仍为原物理量。变换后的控制方程（略去撇号）为

$$\zeta_t-c_1U\zeta_x+c_2[(h+\zeta)u]_x=0 \tag{9}$$

$$u_t-c_1Uu_x+c_2(uu_x+\zeta_x)=\frac{1}{3}(h+\zeta)^2u_{xxt} \tag{10}$$

其中

$$c_1(x,t)=\frac{1+x/L}{1+X/L} \qquad c_2(t)=\frac{1}{1+X/L} \tag{11}$$

在初始时刻，依据满足 KdV方程的孤立波理论解，在平底水域上给出初始水位和初始流速。

为了避免数值振荡，我们利用交错网格进行差分离散。在边界点设置位移变量，并采用等间距差分网格。采用 FTCS 格式，为提高精度利用了预估-校正模式，可以得到时间和空间均为二阶的精度。对于只考虑非线性作用的情况，可以显式求得；在色散项与非线性项共同作用的情况下，式(9)可以显式求得，式(10)把有关时间的项移到方程一侧，亦采用 FTCS 格式，离散为三对角方程利用追赶法求得。详细的数值格式描述见刘桦和王本龙(2000)[14]。

2 数值模型的验证

这里取 Liu et al(1994)[1]和 Grilli et al (1994)[15]的 BIEM 计算结果与本文的计算结果进行比较，以检验本模型的有效性和精度。首先取相对波高为 0.1，表 1 给出了本模型得到的最大爬高值与 Liu et al(1994)[1]和 Grilli et al (1994)[15]的计算结果的比较。需说明的是表中给出的 Liu et al(1994)[1]的结果为不计摩擦影响的情况，尽管该文中还给出摩擦效应的计算公式。结果表明，当非线性不太强时，本文基于 Boussinesq 模型得到的最大爬高值与完全非线性的 BIEM 模型计算结果相差不大。

表 1a 不同斜率的最大爬高比较

θ	本文	Liu 等(1994)[1]	相对误差（%）
20	0.303	0.299	1.3
45	0.221	0.216	2.3

表 1b 1/2 斜坡上的最大爬高

坡度	本文	Grilli 等(1994)[15]	相对误差 (%)
1:2	0.269	0.260	3.5

为了考虑非线性的影响，表 2 给出了三个典型相对波高条件下孤立波最大爬高的计算结果。经与 Liu et al(1994)[1]的完全非线性的 BIEM 计算结果比较，不难发现，相对波高越大，基于 Boussinesq 模型的爬高计算结果越偏离完全非线性模型的计算结果。

表 2 非线性的影响（坡度为 1:1）

相对波高	本文	Liu 等(1994)[1]	相对误差 (%)
0.15	0.354	0.341	3.7
0.2	0.497	0.472	5.2
0.25	0.648	0.608	6.7

表 1 和表 2 的比较还表明，在相同的条件下，基于经典 Boussinesq 方程的孤立波爬高计算结果均比基于完全非线性模型的 BIEM 计算结果大，因此，当来波波高较大时，有可能会过高的估计孤立波的爬高。

3 色散对孤立波爬高的影响

为了分析色散对孤立波爬高的影响，我们进行以下数值实验。首先忽略 Boussinesq 方程中的色散项，则方程(10)退化为通常所讲的浅水方程。当用浅水方程模拟平底水域中孤立波的传播过程时，不难预计由于非线性的作用，孤立波将会变形。图 2 为分别不计色散项时得到的孤立波瞬时波形及其对水平左边的一阶导数，可以明显看到孤立波有前倾的趋势。图 3 为孤立波的当初始 L_0 不同时，孤立波爬高水位的时间过程线，不难看出当 L_0 增大时，由于不计色散项，在非线性的作用下孤立波在完成爬高过程前有较长的时间进行波形演变，使得波前越来越陡，最后的爬高值明显增大。因此，简单地讲色散对孤立波的爬高没有影响(如 Liu et al(1991)[16])是值得商榷的。

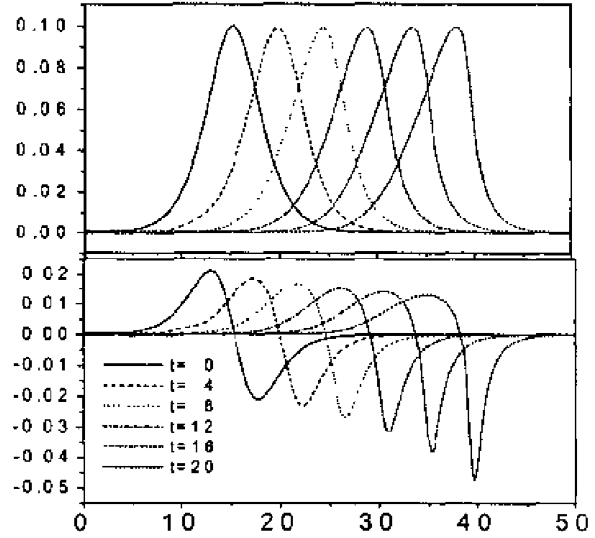


图 2 非线性项作用下孤立波在平底水域的传播

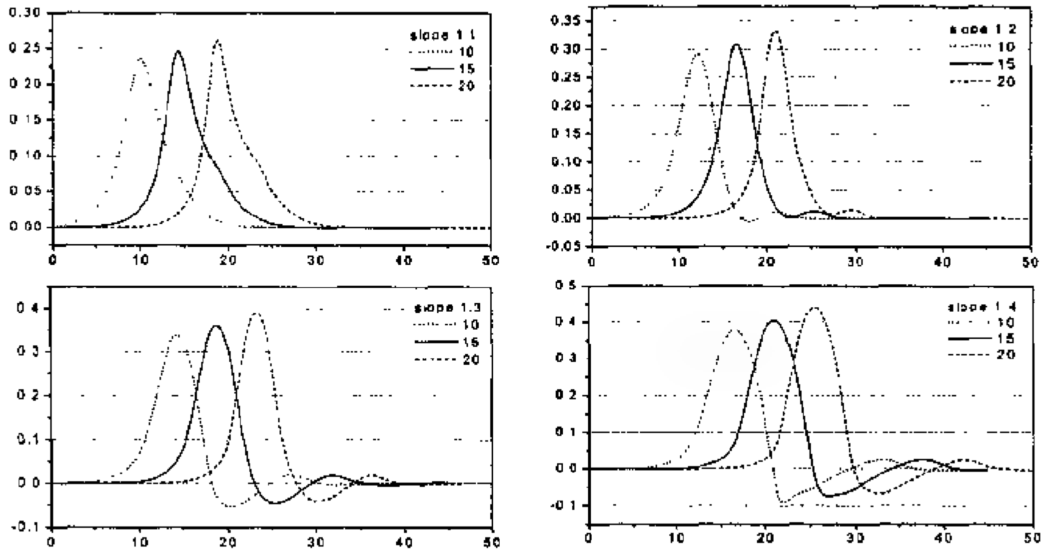


图 3 不计色散项时孤立波初始位置对爬高的影响

在式(4)中考虑色散效应后，即经典的 Boussinesq 方程，由于色散项与非线性项的互相平衡，使得孤立波在平底水域传播时波形基本不变，因此孤立波在防波堤上的爬高不会随传播距离的长短而发生变化。本模型的计算结果也反映了这一现象，见如图 4。

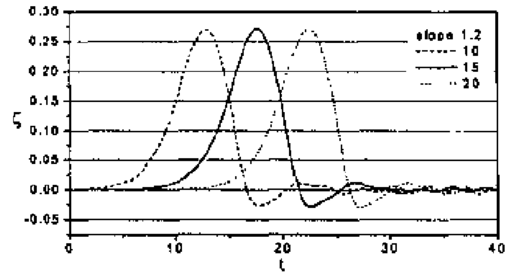


图 4 不同 L_0 孤立波的爬高时间过程线

4 结 论

基于严格的动边界条件，可望将应用 Boussinesq 方程计算波浪爬高建立在扎实的理论基础上。本文成功地对水平一维的孤立波在陡坡上的爬高过程进行了数值模拟，表明本模型是正确的。一系列的数值实验表明，简单地认为色散对孤立波的爬高没有影响的观点是不完整的，因此当用浅水方程预报海啸在海岸带的爬高时，应当充分重视外海边界位置对预报结果的影响。

将本模型推广至平面二维的波浪爬高问题，并结合高阶 Boussinesq 模型的应用，建立适合更广泛适用的波浪爬高计算模型，则是我们下一步要做的工作。

参 考 文 献

1 Liu P L-F & Cho Y-S. Integral equation model for wave propagation with bottom friction. *J WPCOE*, ASCE, 1994, 120: 594~608

2 Kanoglu U & Synolakis CE. Long wave runup on piecewise linear topographies. *J Fluid Mech*, 1998, 374: 1~28

3 Synolakis CE. Runup of solitary waves. *J Fluid Mech.*, 1987, 185: 523~545

4 Tao J. Computation of wave runup and wave breaking. Internal Report, Danish Hydraulic Institute, 1983

5 Madsen PA, Sorensen OR & Shaffer HA. Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq type model. Part I. *Coastal Engrg*, 1997, 32: 255~287

6 Zhang J. Run-up of ocean waves on beaches, [Ph.D. thesis], California Institute of Technology, Pasadena, 1996

7 Kim SQ, Liu P L-F & Liggett JA. Boundary integral equation solutions for solitary wave generation, *Coastal Engrg*, 1983, 7: 299~317

8 Liu P L-F, Hsu H-W & Lean MH. Application of boundary integral equation methods for two dimensional nonlinear water wave problems. *Intern J for Numer Methods in Fluids*, 1992, 15: 1119~1141

9 刘桦，吴卫. 完全非线性孤立波的稳态解. 海洋通报, 1999, 18(6): 18~23

10 刘桦，吴卫，王本龙. 完全非线性孤立波的直墙反射. 海洋工程, 2000, 18(1): 1~6

11 Liu H & Liu P L-F. Nonlinear capillary-gravity waves produced by a vertically oscillating plate. *China Ocean Engrg*, 1998, 12(2): 147~162

12 Hamilton J. Differetial equations for long period gravity waves on fluid of rapidly varying depth. *J Fluid Mechanics*, 1977, 83: 289~310

13 Whitham GB. Linear Nonlinear Waves. New York: John Wilely and Sons, 1974

14 刘桦，王本龙. 孤立波与多孔介质结构物的非线性相互作用. 力学季刊, 2000, 21(2): 157~161

15 Grilli ST & Losada MA. Characteristics of solitary wave breaking induced by breakwaters. *J WPCOE*, ASCE, 1994, 120: 74~92

16 Liu P L-F, Synolakis C & Yeh HH. Report on the international workshop on long-wave run-up. *J Fluid Mech*, 1991, 13: 481~504

孤立波越过斜坡式台阶时的反射[1)]

王本龙　刘　桦　何友声　张　近*
(上海交通大学，上海 200030)　　*(香港城市大学，香港)

摘要　研究孤立波越过斜坡台阶堤时的反射问题。从线性化的浅水方程出发，首先建立了线性单色波的基本解，进而采用通过连续谱变换，给出了孤立波在台阶上的解析解。将此线性解与经典 Boussinesq 方程的数值解比较，阐述了非线性和色散对孤立波反射特征的影响。无论是线性解析解，还是 Boussinesq 方程的数值解，反射波在角点处的水位变化出现所谓的“包络”现象，即在水位抬高阶段，不同台阶高度的反射波基本重叠。当台阶高度增大时，反射波在角点处的水位增量呈孤立波状，文中给出了台阶高度的增加与反射波水位净增量的关系。
关键词　孤立波，反射，Boussinesq 方程

引　言

海啸是严重的海洋灾害之一，在我国的台湾省和大陆南部海域均有遭受海啸袭击的记录。发展海啸预报数学模型曾引起人们的广泛关注，如在外海采用 Boussinesq 方程模拟海啸引起的孤立波状水面波动的传播、在近海则采用浅水方程。另一方面，在海岸工程中，研究浅水大波越过台阶（如长江口深水航道的导堤）的反射与透射问题对深入了解工程区附近的波况及其掀沙作用无疑具有重要的实际意义。现有的研究工作大多采用物理模型和数值模型，而通过解析的办法研究影响波浪行为的关键性参量的工作则较少，而且集中在利用势流方程求解台阶地形的波浪反射问题[1, 2]。

本文将采用解析和数值模拟相结合的方法研究波浪在斜坡和海滩上的反射过程的物理机制，发现了波浪反射过程中的包络现象，得到了一些具有实用参考价值的结果。在第二节对线性化的浅水方程求得单色正弦波行波解。然后利用连续谱进行傅立叶积分求得孤立波的浅水方程解。在第四节讨论了非线性作用和色散性对孤立波在斜坡上反射的影响，并利用数值方法求解 Boussinesq 方程，得到了孤立波在斜坡和海滩上反射依然存在包络现象的结果。并进而讨论了斜坡的外形对反射波的影响。

1　线性单色波的基本解

如图 1 所示，定义斜坡的方程为

$$h(x)=\begin{cases}1 & x>L\\ x/L & bL\le x\le L\\ b & x>bL\end{cases}\qquad(1)$$

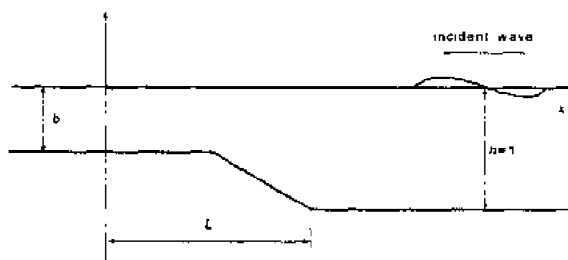


图 1　斜坡台阶地形的定义

忽略经典 Boussinesq 方程中的非线性项和色散项，得到用于描述线性长波的浅水方程

$$\begin{aligned}&\zeta_t+(hu)_x=0\\ &u+\zeta_x=0\end{aligned}\qquad(2)$$

[1)] 上海市科委青年科技启明星计划(98QG14044)和上海市重点学科基金资助项目

消去方程中的u得到方程：$\zeta_{tt}=\nabla\cdot(h\nabla\zeta)$。平底区域简化为

$$\zeta_{tt}=h\zeta_{xx} \tag{3}$$

上式的形式解在$h=1$和$h=b$区域可分别设为$\zeta=A_r e^{\mathrm{i}[k(x-L)-kt]}+A_i e^{\mathrm{i}[-k(x-L)-kt]}$和$\zeta=A_t\exp\left\{\mathrm{i}\left[-\frac{k(x-L)}{\sqrt{b}}-kt\right]\right\}$。

斜坡部分的线性波动方程为

$$[h(x)\zeta_x]_x-\zeta_{tt}=0 \tag{4}$$

设解的形式为$\zeta(x,t)=\eta(x)e^{-\mathrm{i}kt}$，代入方程(4)可得，

$$x\eta_{xx}+\eta_x+k^2L\eta=0 \tag{5}$$

引入变换$\eta(x)=f(z)$，$z=2k\sqrt{Lx}$，得到关于$f(z)$的0阶贝塞尔方程[3]

$$f_{zz}+\frac{1}{z}f_z+f=0 \tag{6}$$

由基本的数理方程知识，在斜坡区域无奇点，所以方程(4)的通解可写为

$$\zeta(x,t)=e^{-\mathrm{i}kt}[C\mathrm{J}_0(2k\sqrt{Lx})+D\mathrm{Y}_0(2k\sqrt{Lx})] \tag{7}$$

这里$\mathrm{J}_0(x)$和$\mathrm{Y}_0(x)$分别为第一类和第二类0阶贝塞尔函数。

考虑到水位和水位梯度在$x=L$和$x=bL$处的连续性，有匹配条件：$[\zeta]=0$和$[\zeta_x]=0$。这里$[f]$定义为在连接点两侧的物理量的跳跃。给定入射波波高，其它系数(A_r，A_t，C，D)可由以下线性代数方程组求得

$$\begin{aligned}
A_r+A_i&=C\mathrm{J}_0(2\kappa)+D\mathrm{Y}_0(2\kappa)\\
A_r-A_i&=\mathrm{i}[C\mathrm{J}_1(2\kappa)+D\mathrm{Y}_1(2\kappa)]\\
A_t&=C\mathrm{J}_0(2\kappa\sqrt{b})+D\mathrm{Y}_0(2\kappa\sqrt{b})\\
-A_t&=\mathrm{i}[C\mathrm{J}_1(2\kappa\sqrt{b})+D\mathrm{Y}_1(2\kappa\sqrt{b})]
\end{aligned} \tag{8}$$

其中$\kappa=kL$，其物理意义为在特征长度L上的波数。方程(2)的单色波解析解为

$$\begin{aligned}
&\zeta(x,t)=R_rA_ie^{\mathrm{i}[k(x-L)-kt]+\mathrm{i}\delta_r}+A_ie^{\mathrm{i}[-k(x-L)-kt]} && x>L\\
&\zeta(x,t)=R_CA_iJ_0(2k\sqrt{Lx})e^{-\mathrm{i}kt+\mathrm{i}\delta_C}+R_DA_iY_0(2k\sqrt{Lx})e^{-\mathrm{i}kt+\mathrm{i}\delta_D} && bl\le x\le L\\
&\zeta(x,t)=R_tA_i\exp\left\{\mathrm{i}\left[-\frac{k(x-bL)}{\sqrt{b}}-kt\right]+\mathrm{i}\delta\right\} && x<bL
\end{aligned} \tag{9}$$

其中$R_j(\kappa,b)=\left|\frac{N_j}{M}\right|$和$\delta_j(\kappa,b)=\arg\left(\frac{N_j}{M}\right)$ $(j=r,C,D,t)$分别为波高放大系数和相位滞后量。

$$\begin{aligned}
N_r=&[\mathrm{J}_1(2\kappa)\mathrm{Y}_1(2\kappa\sqrt{b})-\mathrm{J}_1(2\kappa\sqrt{b})\mathrm{Y}_1(2\kappa)]+[\mathrm{J}_0(2\kappa\sqrt{b})\mathrm{Y}_0(2\kappa)-\mathrm{J}_0(2\kappa)\mathrm{Y}_0(2\kappa\sqrt{b})]+\\
&\mathrm{i}[\mathrm{J}_1(2\kappa\sqrt{b})\mathrm{Y}_0(2\kappa)-\mathrm{J}_0(2\kappa)\mathrm{Y}_1(2\kappa\sqrt{b})]+\mathrm{i}[\mathrm{J}_0(2\kappa\sqrt{b})\mathrm{Y}_1(2\kappa)-\mathrm{J}_1(2\kappa)\mathrm{Y}_0(2\kappa\sqrt{b})]
\end{aligned}$$

$$N_C=-2[\sqrt{b}\mathrm{Y}_0(2\kappa\sqrt{b})+\mathrm{i}\mathrm{Y}_1(2\kappa\sqrt{b})]，\quad N_D=2[\sqrt{b}\mathrm{J}_0(2\kappa\sqrt{b})+\mathrm{i}\mathrm{J}_1(2\kappa\sqrt{b})]$$

$$N_t=2\mathrm{i}[\mathrm{J}_1(2\kappa\sqrt{b})\mathrm{Y}_0(2\kappa\sqrt{b})-\mathrm{J}_0(2\kappa\sqrt{b})\mathrm{Y}_1(2\kappa\sqrt{b})]$$

$$M=[\mathrm{J}_1(2\kappa\sqrt{b})\mathrm{Y}_1(2\kappa)-\mathrm{J}_1(2\kappa)\mathrm{Y}_1(2\kappa\sqrt{b})]+[\mathrm{J}_0(2\kappa\sqrt{b})\mathrm{Y}_0(2\kappa)-\mathrm{J}_0(2\kappa)\mathrm{Y}_0(2\kappa\sqrt{b})]+$$
$$\mathrm{i}[\mathrm{J}_1(2\kappa\sqrt{b})\mathrm{Y}_0(2\kappa)-\mathrm{J}_0(2\kappa)\mathrm{Y}_1(2\kappa\sqrt{b})]+\mathrm{i}[\mathrm{J}_1(2\kappa)\mathrm{Y}_0(2\kappa\sqrt{b})-\mathrm{J}_0(2\kappa\sqrt{b})\mathrm{Y}_1(2\kappa)]$$

作为本问题的极限情况，不难得到线性波越过台阶地形时的反射系数和透射系数，结果与 Lamb(1932)给出的计算公式一致[4]

$$\lim_{L\to 0}R_r=\frac{1-\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}\quad \lim_{L\to 0}R_t=\frac{2}{1+\sqrt{b}}$$

2 孤立波演进

KdV 方程的孤立波解为[5]

$$\zeta=a_0\sec h^2\sqrt{\frac{3a_0}{4}}(x-L) \tag{10}$$

利用傅立叶积分变换，孤立波在斜坡地形的演进可以用以下的连续谱来描述[6]

$$\zeta=\Re\int_0^\infty \Phi_0(k)e^{-ik(x-L+t)}\mathrm{d}k \qquad \Phi_0=\frac{4}{3}k\csc h\left(\frac{\pi k}{\sqrt{3a_0}}\right) \tag{11}$$

这样，利用单色波的解直接积分可以得到线性方程（2）的孤立波的解

$$\begin{aligned}
\zeta(x,t)&=\Re\int_0^\infty \Phi_0(k)e^{-ik(x+t-L)}\mathrm{d}k+\\
&\quad\Re\int_0^\infty \Phi_0(k)R_r(\kappa,b)e^{-ik(x-t-L)+i\delta_r}\mathrm{d}k && x>L\\
\zeta(x,t)&=\Re\int_0^\infty \Phi_0(k)R_C(\kappa,b)\mathrm{J}_0(2k\sqrt{Lx})e^{-ikt+i\delta_C}\mathrm{d}k+\\
&\quad\Re\int_0^\infty \Phi_0(k)R_D(\kappa,b)\mathrm{Y}_0(2k\sqrt{Lx})e^{-ikt+i\delta_D}\mathrm{d}k && bL\le x\le L\\
\zeta(x,t)&=\Re\int_0^\infty \Phi_0(k)R_t(\kappa,b)e^{-ik[(x-bL)+t]+i\delta_t}\mathrm{d}k && x<bL
\end{aligned} \tag{12}$$

取参数 $L=10$，入射波波高为 0.1，图（2）给出了孤立波越过台阶时斜坡角点处反射波波面的时间过程线。

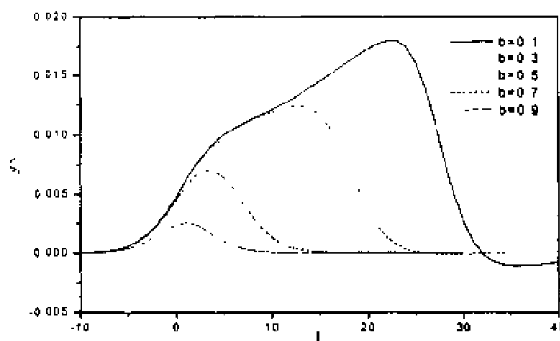


图 2 角点反射波时间过程线

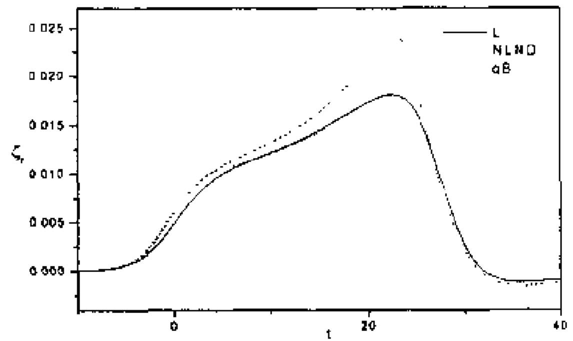


图 3 不同模型方程的比较

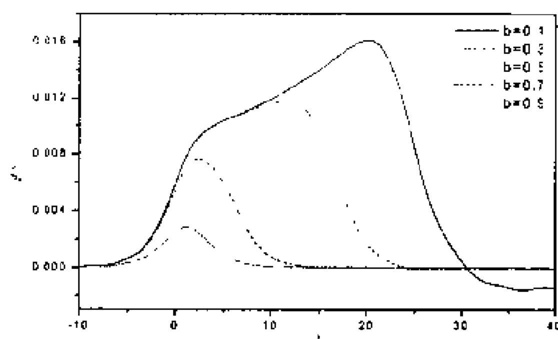
3 非线性项和色散项的作用

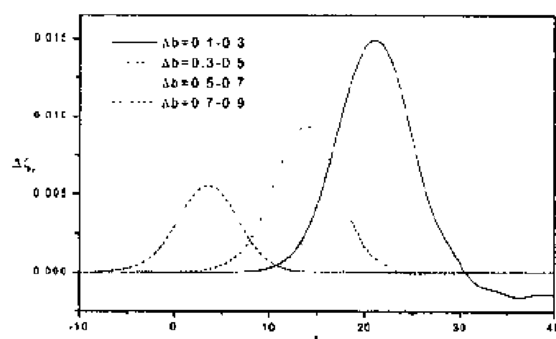
经典的 Boussinesq 方程可写成[5]

$$\begin{aligned}&\zeta_t+[(h+\zeta)u]_x=0\\&u_t+uu_x+\zeta_x=D\end{aligned}\tag{13}$$

其中定义 $D=\frac{1}{3}h^2u_{xxt}+hh_xu_{xt}+\frac{1}{2}hh_{xx}u_t$。取 $D=0$，方程对应于非线性无色散模型方程（NLND）。图 3 展示了采用不同的模型方程得到的角点水位时间过程线，其中 L 对应于线性方程解析解，gB 对应于 Boussinesq 方程数值解。求解 Boussinesq 方程的数值格式详见文献[7]。对于较缓的斜坡，经典 Boussinesq 方程和线性方程的解接近，而 NLND 模型则有较大的反射波。这是由于色散项有抑制孤立波爬高的作用，由此影响反射波。因此在孤立波爬高的实际工程计算中，应该注意考虑色散与非线性的共同作用。

图 4 给出了角点处的净反射波时间过程线，$L=10$，$b=0.1$。由于包络现象的存在，可以清晰的看出防波堤堤高增加对反射波的作用，图 5 为相应不同基增加相同高度引起反射波的增量，可以看出，伴随着基本堤高的增加，反射波增量滞后，防波堤的边际效应也相应增加。孤立波在斜坡上反射有明显的继承性，增加斜坡的高度，增量会引起相应的反射波，类似新的孤立波在增加的斜坡段产生，具有叠加性。


图 4　Boussinesq 方程反射波的包络现象


图 5　斜坡高度引起的反射波净增量

4 结 语

线性解析解和 Boussinesq 方程的数值解均表明，反射波在角点处的水位变化出现所谓的“包络”现象，即在水位抬高阶段，不同台阶高度的反射波基本重叠。当台阶高度增大时，反射波在角点处的水位增量呈孤立波状。结果表明，计算孤立波越过台阶时的反射和透射时，应当同时考虑非线性和色散的影响。

参 考 文 献

1 Rhee JP. On the transmission of water waves over a shelf. *Applied Ocean Research*, 1997, 19: 161~169

2 Rey V, Belzons M & Guazzelli E. Propagation of surface gravity waves over a rectangular submerged bar. *JFM*, 1992, 235, 453~479

3 Zeh JA. Tsunamis. the response of harbours with sloping boundaries to long wave excitation. [Ph.D. thesis]. CIT, 1986

4 Lamb SH. Hydrodynamics. Sixth Edition. Cambridge University Press, 1932

5 Whitham GB. Linear and Nonlinear Waves. Wiley-Interscience, 1974

6 Synolakis CE. The runup of long waves. *J Fluid Mech*, 1987, 185: 523~545

7 刘桦，王本龙. 孤立波与多孔介质结构物的非线性相互作用. 力学季刊，2000，21(2): 157~161

浅水非线性色散波的数学模型和高精度数值方法 1)

钦文婷　陶建华
（天津大学力学系，天津 300072）

摘要　针对近岸浅海波浪在港工、海工结构物和复杂地形的影响下的折射、绕射、反射和变形，建立了以 Boussinesq 方程为基础的数学模型。研究了改进模型色散性、非线性的途径，特别是用高精度数值方法保证模拟的结果有良好的色散性和非线性。基于这一数学模型建立了具有类似实验室波浪水池功能的“数值波浪水池”（NWB）。给出了两个工程应用实例：台风浪破坏珠海港护岸的模拟和分析；三亚白排港人工岛的数值实验。

关键词　浅水波，Boussinesq 方程，色散性，非线性，数值波浪水池

引　言

浅水非线性色散波的数学模型主要用于模拟近岸海域的波浪在工程结构和复杂地形影响下的折射、绕射、反射和变形。由于近岸海区的水浅，波高较大，波浪的非线性较强，数学模型要能充分体现浅化性、非线性。同时，水波折射、绕射、反射等现象又要求模型具有较强的波动性质或色散性。

1967 年，Peregrine 推导出具有非线性、色散性的浅水波方程——Boussinesq 方程。该方程有非线性项，也有色散项，但其色散性较弱，介于无色散的双曲波和典型的线性色散波（Airy）之间。近年来，为了改进其色散性，许多人对此进行了研究。其中比较有影响的是 Madsen（1991,1995），Nwogu（1993），Kirby（1996）等。通过对 Boussinesq 方程的修正使其色散性在水深较大的范围 $d < L/2$ 内，接近于线性色散波的色散性，从而形成 Boussinesq 类方程。

为了使模型方程更好地描述波高水深比更大的情况，将方程增加高阶项，如 Serre 方程，对模拟强非线性有一定效果，但方程阶数增加也增加了数值离散的困难。

本文将从数值方法上来改善模型的非线性、色散性和数值耗散性。为了使模型能够广泛地模拟各种海岸近海工程结构和波浪相互作用，基于 Boussinesq 方程，建立了“数值波浪水池”（NWB），具有类似于实验水池的功能进行波浪的数值模拟试验。

1　Boussinesq 类方程

Boussinesq 类方程是介于浅水波方程和中等水深的 Airy 波理论之间的一类方程，其主要特点体现在 Boussinesq 项，即比浅水方程多出来的高阶项上。这些高阶项，使得 Boussinesq 方程既能描述浅水波，又能一定程度上反映深水波特性。

1967 年，Peregrine 从无粘不可压的欧拉方程出发，通过小参数展开，推导得到了变水深的 Boussinesq 方程，其形式如下

$$\zeta_t + \nabla\cdot\left[(h+\zeta)u\right] = 0 \tag{1.1a}$$

1) 国家自然科学基金重点项目（59839330）；国家自然科学基金（19772031）资助项目

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+g\nabla\zeta=\frac{h}{2}\nabla[\nabla\cdot(h\boldsymbol{u}_t)]-\frac{h^2}{6}\nabla[\nabla\cdot\boldsymbol{u}_t] \tag{1.1b}$$

其中$\zeta(x,t)$表示自由表面位移，$\boldsymbol{u}(x,t)$是速度矢量，$h(x)$为静水深。方程推导中引入的小参数是$\varepsilon=A/h,\mu=kh$，A—波振幅，k—波数，方程应用条件是$O(\varepsilon)=O(\mu^2)<<1$。方程（1.1a）和（1.1b）的一维线性化形式

$$\zeta_t+hu_x=0 \tag{1.2a}$$

$$u_t+g\zeta_x-\frac{h^2}{3}u_{xxt}=0 \tag{1.2b}$$

将正弦波解代入上式，可得相速度

$$C\cong\sqrt{gh}\left(1-\kappa^2h^2/3\right)^{1/2} \tag{1.3}$$

与$C=\sqrt{gh}$相比，（1.3）式的$\kappa^2h^2/3$项是由$\frac{h^2}{3}u_{xxt}$该项产生的，它代表色散。

中等水深 Ariy 波的色散关系

$$C=\sqrt{gh}\left(\frac{\tanh kh}{kh}\right)^{1/2} \tag{1.4}$$

将$\frac{\tanh kh}{kh}$进行 Pade 展开得

$$C^2=gh\left[1-\frac{1}{3}(kh)^2+\frac{2}{15}(kh)^4-\frac{17}{315}(kh)^6+\cdots\right] \tag{1.5}$$

可见 Peregrine 的 Boussinesq 方程的色散性相当于 Ariy 波色散性的 Pade 一阶精度。

用 Airy 波的线性色散关系的 Pade 近似方法，Madsen et al.(1991)和 Marry(1989)检验了各种形式的 Boussinesq 方程的色散性质。通过与 Pade 展开式对比，他们引入了附加色散项，色散性可达 Pade 二阶精度，从而使水波可传至$d<L/2$的范围。Nwogu（1993）将方程的速度变量不用水深平均值而代之以一定深度$a=\alpha h$的速度值，既而也改善了色散性，达到 Airy 波的 Pade 二阶精度。

综合考虑各类 Boussinesq 方程的精度和性质，本文选取 Schaffer and Madsen（1995）方程作为控制方程

$$\eta_t+P_x+Q_y=0 \tag{1.6a}$$

$$P_t+g(h+\eta)\eta_x+\left[\frac{P^2}{h+\eta}\right]_x+\left[\frac{PQ}{h+\eta}\right]_y+\left(\frac{1}{6}-B_2\right)h^3\left(\left[\frac{P}{h}\right]_{txx}+\left[\frac{Q}{h}\right]_{txy}\right)-\left(\frac{1}{2}+B_1\right)h^2\left(P_{txx}+Q_{txy}\right)-B_2gh^3\left(\eta_{xxx}+\eta_{xyy}\right)-B_1gh^2\left([h\eta_x]_{xx}+[h\eta_y]_{xy}\right)=0 \tag{1.6b}$$

$$Q_t+g(h+\eta)\eta_y+\left[\frac{Q^2}{h+\eta}\right]_y+\left[\frac{PQ}{h+\eta}\right]_x+\left(\frac{1}{6}-B_2\right)h^3\left(\left[\frac{Q}{h}\right]_{tyy}+\left[\frac{P}{h}\right]_{txy}\right)-\left(\frac{1}{2}+B_1\right)h^2\left(Q_{tyy}+P_{txy}\right)-B_2gh^3\left(\eta_{yyy}+\eta_{xxy}\right)-B_1gh^2\left([h\eta_y]_{yy}+[h\eta_x]_{xy}\right)=0 \tag{1.6c}$$

其中P,Q分别为x,y方向单宽流量，B_1,B_2为可调参数。

2 高精度差分方法

考虑到 Boussinesq 方程具有三阶导数项，而且色散性也正来源于三阶项，若数值求解中采用三阶以下精度的格式可能导致物理色散被非物理的数值色散掩盖。因此采用高精度的差分格式对 Boussinesq 方程进行数值求解十分重要。

本文对方程中的对流项及 Boussinesq 项的空间导数运用紧致差分格式进行差分离散，使其达到三阶精度，能较好地减小数值耗散和数值色散效应，避免淹没物理色散。对时间导数的差分仍采用二阶中心差分，然后用泰勒展开得修正方程，使其对应的差分方程在时间上达三阶精度。下面介绍对流项的紧致格式方法。

紧致差分格式最大优点是可以在涉及较少网格点的前提下，达到与其它格式同等的精度。设 $u(x)$ 为一个函数，其在网格点 x_i 上的函数值为 $u(x_i)=u_i$，三次样条函数 $S_\Delta(u,x)=S_\Delta(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足一阶导数和二阶导数连续，同时在每个小区间 $x_{i-1}\le x\le x_i$ 中可以写成三次多项式，并满足 $S_\Delta(u_i,x_i)=u_i$，函数 $u(x)$ 属于 $C^4[a,b]$，设 $m_i=S'_\Delta(x_i)$，$M_i=S''_\Delta(x_i)$，下面给出构造紧致差分格式所需的两个关系式，取空间结点为等距分布时有

$$m_{i-1}+4m_i+m_{i+1}=\frac{3}{h}(U_{i+1}-U_{i-1})+o(h^4) \tag{2.1}$$

$$M_{i-1}+4M_i+M_{i+1}-\frac{6}{h^2}(U_{i+1}-2U_i+U_{i-1})+o(h^2) \tag{2.2}$$

对本文控制方程的有限差分法求解是以交替方向隐格式（ADI）为基础的。

下面对中心紧致差分格式的耗散性、色散性和非线性等进行验证：

2.1 耗散性验证

计算一个等水深的区域，设计水深为 10m，入射波波高为 1m，周期为 10s，波长约为 92.37m。计算区域为 25km×10km。图1表示计算域内某一瞬时波面剖面曲线与数值解的比较。

2.2 色散性验证

本文所采用的中心紧致格式的色散关系与 Airy 波理论做比较。如图 2 所示，相速度误差与水深的关系曲线。由此可见，本文控制方程的色散性比较令人满意，而紧致中心格式的色散性也优于普通中心格式。

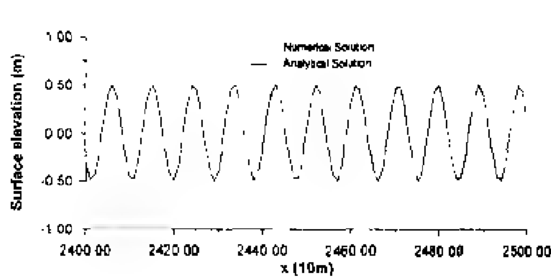


图 1 24~25km 段波面图

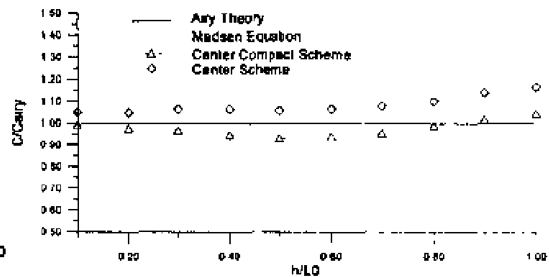


图 2 C/Cairy 的比较

2.3 非线性验证

进一步用本文的非线性模型来计算波浪在台阶地形上的传播。设计计算区域 36m×20m，

台阶前后水深分别为 0.376m 和 0.113m，入射波高为 1.63cm，周期为 1.85s(图 3(a))。本文将台阶后 1m 和 2m 处计算所得的波面曲线(图 3(c)和 3(d))与 Kittatanasuan 等（1993）的实验数据相比较，同时图 3(b)将数值计算的波高剖面与实验数据进行比较。从图中可看出，波面在台阶后出现了明显的非线性，数值模拟结果正确地反映了这一趋势，且与实验数据吻合较好。

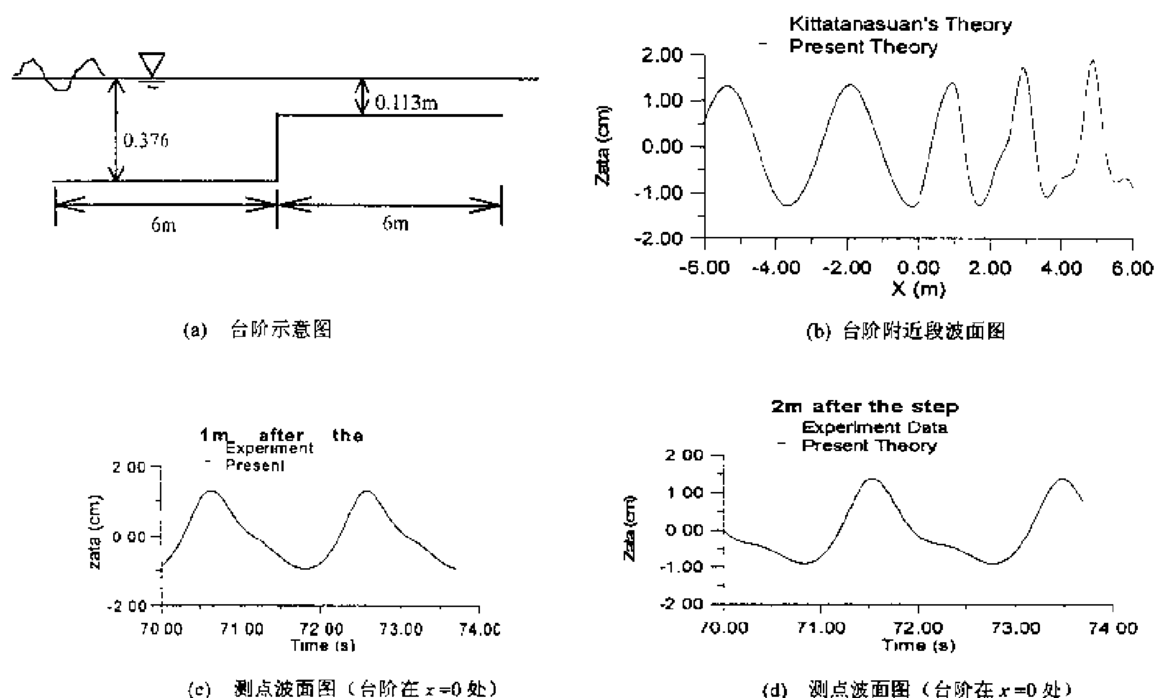


图 3

3 “数值波浪水池”的工程应用

“数值波浪水池”(NWB-Numerical Wave Basin)是基于上述修正的 Boussinesq 方程建立起来的数学模型及其软件系统，在实际工程中得到了广泛的应用。

3.1 珠海港台风浪

珠海港建有南北两个港池，船舶从主航道经两个分航道进入南北港区，南港区以南建有防波堤，主航道比原地形挖深 6~8m，北港池挖深 6~8m，南港池挖深 5~7m，港内地形复杂。港区的主浪向为 SSW，S，SSE。

1998 年 12 月 25 日在台风浪的冲击下，靠近北港池的平排山护岸被破坏。现场目击者观察到 SSE 向波浪从外海进入港区后沿主航道行进时波高逐渐增大，到达平排山对面时转向，冲向平排山，致使护岸破坏。为该工程的修复，受有关单位的委托，采用 NWB 对此次台风浪进行了数值模拟，成功地再现了现场观测到的结果，并找出了护岸破坏的原因：SSE 向台风浪入射波与航道的夹角较小（12.5°），由于主航道的折射作用，大部分波浪聚集在主航道东侧，该处波高比达到 1.2~1.4 倍，而航道西侧的波高比仅 0.2~0.4，台风浪的波能主要集中在港区内（图 4)。主航道东侧集聚的波浪沿主航道内侧前进到北港池时，由于东侧水浅，而北港池内水较深，导致波浪再次折射并冲向平排山方向，毁坏了护岸。

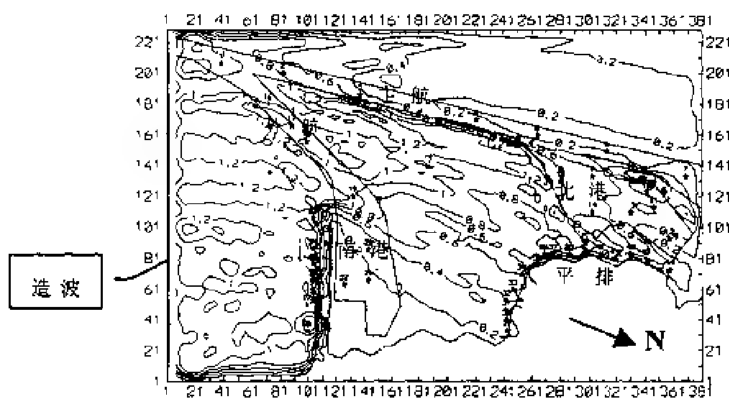


图 4　珠海港南南东向台风浪比波高分布

3.2 三亚人工岛

图 5 为三亚白排国际客运深水码头人工岛的平面布置图。受三亚港务局委托，利用 NWB 对人工岛建成前后的波浪场进行了数值模拟。数值模拟结果如图 6（入射波方向为北北东 NNE）所示，由于反射和折射，人工岛头部（图 5 中的第[1]段）、尾部（第[5]段）和码头前沿 11、12 测点处波高较大，需重点保护，而其余各处的波高相对较小。根据进一步的分析，将人工岛沿岸划分为图 5 所示的六段，分别给出了各段的建议设计波高，这样，既加强了对危险的区域保护，又有效的节省了经费。

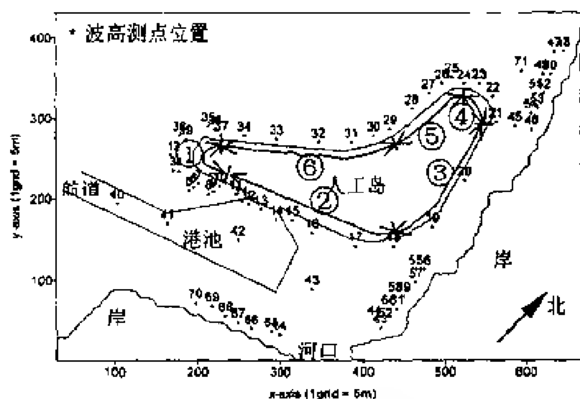


图 5　建议设计波高的区域划分

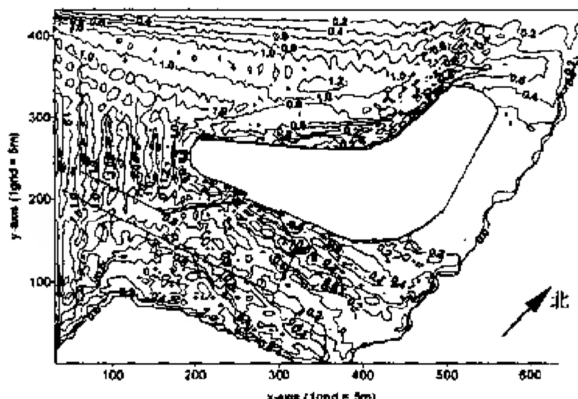


图 6　极端高水位五十年一遇工程已建波高比等值线图

4　结　论

本文以 Schaffer 和 Madsen（1995）Boussinesq 方程为基础，结合传统 ADI 方法和高精度的二阶中心紧致格式求解，建立了稳定性较好的数学模型。通过耗散性、色散性、非线性等各方面的验证，可见该数学模型具有较小的耗散，较好的色散和非线性作用。在对实际工程的运用中，其计算结果也是可靠的，具有较大的实用价值。

参　考　文　献

1　Ge Wei，James T Kirby，Stephan T Grilli，Ravishankar subramanya. A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part Ⅰ: Highly nonlinear unsteady waves. *J Fluid Mech*，1995，294：71~92

2　Hemming A Schaffer，Per A Madsen. Further enhancements of Boussinesq-type equations. *Coastal Engineering*，1995，26：1~14

3　Per A Madsen and Ole R Sorensen. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2：A slowly-varying bathymetry. *Coastal Engineering*，1992，18：183~204

4　Ting-Kuei Tsay Philip L-F，Liu Nan-Jing Wu. A nonlinear model for wave propagation. *Coastal Engineering*，1996. chapter 47

5　赵广慧，陶建华. 浅水非线性 Boussinesq 方程的紧致差分与格式研究. 第八届全国计算流体力学会议论文集，480~485

在无黏流体中的瞬态船行波

陶明德　刘敏嘉

（复旦大学力学与工程科学系，上海 200433）

摘要　当一个水下物体突然以匀速直线运动时，它在平静的水面上逐渐产生一个 V 形的稳态的船行波。在这篇文章中，我们讨论在不可压缩无黏流体中形成稳态船行波瞬态过程。对于瞬态船行波的研究有很重要的意义，它根据严格的数学推理，保证了上游无波这个众所共知的事实。

关键词　无黏，瞬态，船行波

引　言

当一个水下物体(举例：潜艇)突然以匀速直线运动时，它在平静的水面上逐渐产生一个 V 形的稳态的船行波。Wehausen 和 Laitone[1]首先研究了在理想不可压缩的流体中的船行波问题，接着，章梓雄[2]提供了一种研究在黏性不可压缩的流体中的水下物体的船行波的新的方法。

瞬态船行波是这样定义的：首先，水下物体假定是静止的，突然它以匀速直线运动，那么在与它一起运动的坐标上，可以看到在平静自由面上逐渐产生一个稳态的船行波，这个过程就是瞬态船行波。研究瞬态船行波有一个很重要的意义。众所周知，物体的上游是无波的。为了保证这个事实与理论相符，Stoker[3]采用人工黏性处理这个问题，而本文采用瞬态解趋于稳态解的方法来处理。在本文中，为了研究在理想不可压缩的流体中船行波的形成和发展，采用在[2]中研究稳态船行波所采用的 Lighthill 两步法，将其积分表达式渐近展开，所以我们的结果一目了然。为了计算留数，对于上下游采用不同的围道积分，所以我们保证了上游无波这个事实。

1　瞬态船行波的波高

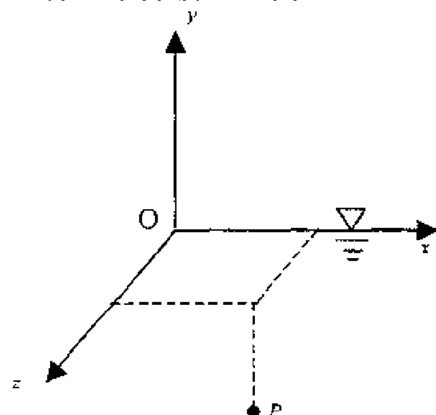


图 1 分析模型

图 1 所示水下物体理想化为一个点源。我们假定它在点 P 上，P 点坐标是 $(a(t),b(t),c(t))$，其中 $b(t)<0$。当 $t\ge 0$ 时，点源的强度为 $m(t)$；当 $t<0$ 时，$m(t)=0$。我们进一步假定：$m(t)=m$，$a(t)=a+u_0t$，$b(t)=b$ 和 $c(t)=c$，其中 m，u_0，a，b 和 c 全都是常数。建立一个与点源一起运动的坐标 $\bar{o}$-$\overline{xyz}$，显然可得

$$\bar{x}=x-u_0t,\qquad \bar{y}=y,\qquad \bar{z}=z$$

在运动坐标中，点源的位置在 (a,b,c)，通过 Wehausen 和 Laitone[1]结论可得，相应的速度势是

$$\Phi(x,y,z,t)=mr^{-1}-mr_1^{-1}+\frac{m}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}\mathrm{d}k(gk)^{1/2}\mathrm{e}^{k[y+b+\mathrm{i}\Omega(\theta)]}\int_0^t\mathrm{d}\tau\sin\left[(gk)^{1/2}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}ku_0\tau\cos\theta} \quad (1)$$

其中

$$\Omega(\theta)=(\bar{x}-a)\cos\theta+(\bar{z}-c)\sin\theta \quad (2)$$

$$r=\left[(\bar{x}-a)^2+(\bar{y}-b)^2+(\bar{z}-c)^2\right]^{1/2} \quad (3)$$

$$r_1=\left[(\bar{x}-a)^2+(\bar{y}+b)^2+(\bar{z}-c)^2\right]^{1/2} \quad (4)$$

化简(1)式，我们可得到

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,z,t)=&mr^{-1}-mr_1^{-1}+\frac{m\gamma}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}k}{\gamma-k\cos^2\theta}e^{k[y+b+\mathrm{i}\Omega(\theta)]}-\\&\frac{m\gamma}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}k}{\gamma-k\cos^2\theta}\mathrm{e}^{k[y+b+\mathrm{i}\Omega(\theta)]}\left\{\cos\left[(gk)^{1/2}t\right]-\frac{\mathrm{i}ku_0\cos\theta}{(gk)^{1/2}}\sin\left[(gk)^{1/2}t\right]\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ku_0t\cos\theta}\\=&\Phi_1+\Phi_2\end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\gamma=g/u_0^2$

进一步，我们假定 $m=1$。在运动坐标中，我们假定

$$\eta=\eta_1+\eta_2 \quad (6)$$

其中

$$\eta_1=\frac{u_0}{g}\Phi_{1,\bar{x}}(\bar{x},0,\bar{z}) \qquad 和 \qquad \eta_2=-\frac{1}{g}\Phi_{2,t}(\bar{x},0,\bar{z},t) \quad (7)$$

接着，我将极坐标化为直角坐标，令

$$k_1=k\cos\theta \qquad 和 \qquad k_2=k\sin\theta \quad (8)$$

进行无量纲化，长度用 $1/\gamma=u_0^2/g$，时间用 u_0/g 作为特征量，所以我们可以得到

$$\eta_1=\frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_1\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_2\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}-k_1^2}\mathrm{e}^{b\sqrt{k_1^2+k_2^2}+\mathrm{i}[k_1(\bar{x}-a)+k_2(\bar{z}-c)]} \quad (9)$$

$$\eta_2=-\frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_1\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_2\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}-k_1^2}\left[-\mathrm{i}\frac{\sqrt[4]{k_1^2+k_2^2}}{k_1}\sin\left(\sqrt[4]{k_1^2+k_2^2}\,t\right)-\cos\left(\sqrt[4]{k_1^2+k_2^2}\,t\right)\right]\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_1(\bar{x}-a)+k_2(\bar{z}-c)+k_1t]+b\sqrt{k_1^2+k_2^2}} \quad (10)$$

很明显，当 $t=0$ 时，有 $\eta_1+\eta_2=0$，所以可以利用关系式 $\eta_1=-\eta_2|_{t=0}$ 得到 η_1 的值。(10)式可以再写成

$$\eta_2=-\frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2(\bar{z}-c)}\mathrm{d}k_1\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_2\frac{k_1\mathrm{e}^{b\sqrt{k_1^2+k_2^2}+\mathrm{i}k_1(\bar{x}-a-t)}}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}-k_1^2}\left[-\mathrm{i}\frac{\sqrt[4]{k_1^2+k_2^2}}{k_1}\sin\left(\sqrt[4]{k_1^2+k_2^2}\,t\right)+\cos\left(\sqrt[4]{k_1^2+k_2^2}\,t\right)\right] \quad (11)$$

现在我们采用 Lighthill 的两步法：第一步采用留数定理来求关于 k_1 的积分，而第二步则采用最速下降法来计算关于 k_2 的积分。首先进行第一步，采用留数定理时注意采用不同的积分围道，当 $\bar{x}-a+t>0$ 和 $\bar{x}-a+t<0$ 时，分别采用图2和图3积分围道。其中 $k_1=\pm\mathrm{i}|k_2|$

是枝点，$k_{1,1}$ 和 $k_{1,2}$ 是积分(11)的一阶极点

$$k_{1,j}=(-1)^j\sqrt{\frac{1+m[k_2]}{2}}\qquad (j=1,2)\qquad 其中\qquad m[k_2]=\sqrt{1+4k_2^2}\tag{12}$$

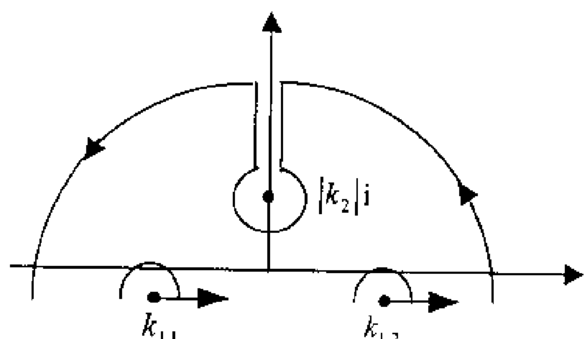


图 2　当 $\bar{x}-a+t>0$ 时的围道

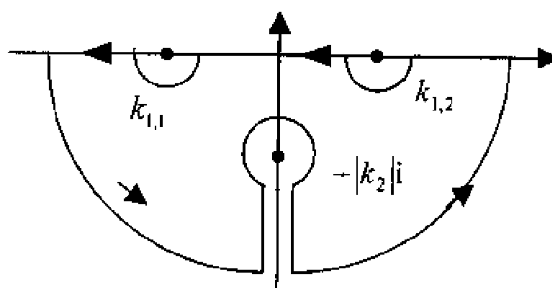


图 3　当 $\bar{x}-a+t<0$ 时的围道

经过计算，(11)式可得

$$\eta_2=-\mathrm{sgn}(\bar{x}-a+t)\sum_{j=1,2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_2\frac{1+m[k_2]}{2m[k_2]}\left[\mathrm{i}(-1)^{j+1}\sin\left(t\sqrt{\frac{1+m[k_2]}{2}}\right)+\cos\left(t\sqrt{\frac{1+m[k_2]}{2}}\right)\right]\times$$
$$\exp\left\{b\frac{1-m[k_2]}{2}+\mathrm{i}\left[k_{1,j}(\bar{x}-a-t)+k_2(\bar{z}-c)\right]\right\}\tag{13}$$

接着，我们进行第二步。我们进一步假定：$\bar{x}-a=R\cos\alpha$，$\bar{z}-c=R\sin\alpha$，所以我们得到

$$\tan\alpha=(\bar{z}-c)/(\bar{x}-a)\tag{14}$$

当 $R>>1$ 时，我们可以采用最速下降法，可以得到

$$\eta_2=-2\,\mathrm{sgn}(\bar{x}-a+t)L(\alpha)\tag{15}$$

其中

$$L(\alpha)=\sqrt{\frac{2\pi}{R|\cos\alpha|}}\left(1-8\tan^2\alpha\right)^{\frac{1}{4}}\left\{\left(\frac{m^++1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{b\frac{1+m^+}{2}}\cos\left[R\left(\frac{m^++1}{2}\right)\left(\cos\alpha-\left(\frac{m^+-1}{2}\right)\sin\alpha\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{\pi}{4}\right]+\left(\frac{m^-+1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{b\frac{1+m^-}{2}}\cos\left[R\left(\frac{m^-+1}{2}\right)\left(\cos\alpha-\left(\frac{m^--1}{2}\right)\sin\alpha\right)+\frac{\pi}{4}\right]\right\}\tag{16}$$

$$m^{\pm}=\frac{1\pm\sqrt{1-8\tan^2\alpha}}{4\tan^2\alpha}\tag{17}$$

从上面关系式 $\eta_1=-\eta_2|_{t=0}$，我们可得

$$\eta_1=2\,\mathrm{sgn}(\bar{x}-a)L(\alpha)\tag{18}$$

2　结　论

在运动坐标中，当时间 $t=t_0$，瞬态船行波的波高可以分成三部分，分别标为 I，II 和 III。

我们利用(15)和(18)，可以得到

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \begin{cases} 0 & \bar{x} - a > 0 \quad 或 \quad \bar{x} - a + t < 0 \\ -4L(\alpha) & \bar{x} - a < 0 \quad 且 \quad \bar{x} - a + t > 0 \end{cases} \tag{19}$$

很明显，在区域 III 中，其波高为 0，也就是说，瞬态船行波还没有到达。当随着时间改变，在三角区域的瞬态船行波不停的扩大，最后形成了一个稳态的船行波（见图 4）。

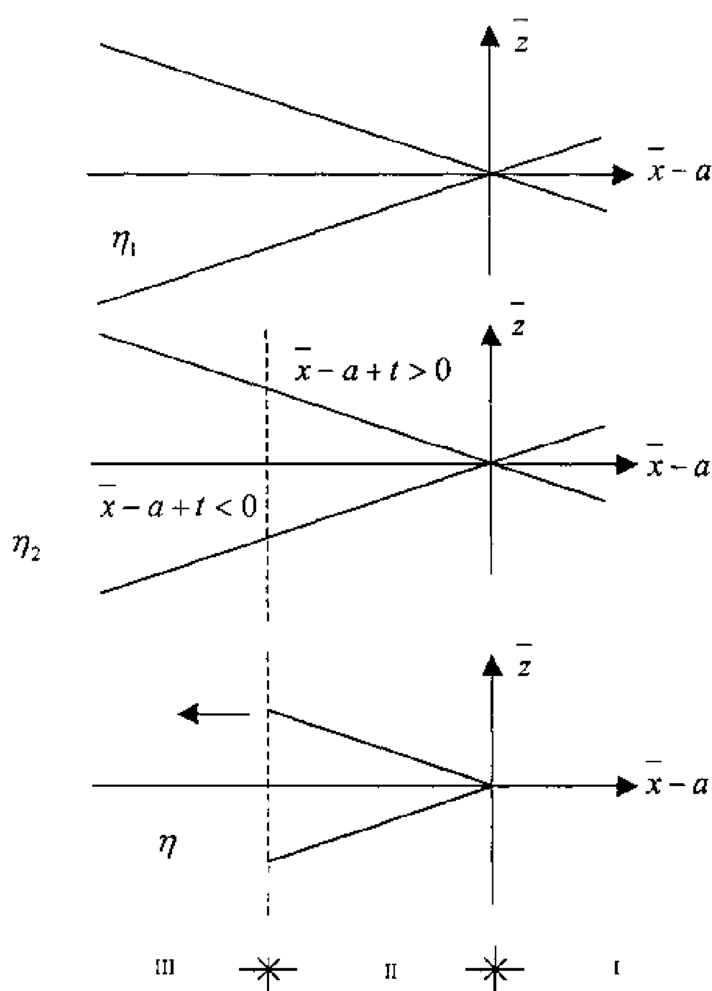


图 4 瞬态船行波

这篇文章很清楚描述了瞬态船行波的形成和性质。

参 考 文 献

1 Wehanse JV and Laitone EV Surface waves. *Encyclopedia of Physics* (Edited by Flügge, S), 1960, 311~778

2 Chan AT and Chwang AT. Interaction of laminar far wake with a free surface. *Phys Fluids*, 1995, 8: 421~429

3 Stkoke JJ Unsteady waves on a running stream. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1953, VI, 471~481

加速圆柱形容器中流体的非线性波动

施小民[*]　　乐嘉春[*,**]　　安淑萍[*]

[*](上海大学 上海市应用数学和力学研究所，上海 200072)　[**](同济大学固体力学教育部重点实验室，上海 200092)

摘要　从 Lagrange 观点描述的控制方程出发，将 Stoker 著作中的方法推广至三维情况，精确求得了加速圆柱形容器壁面所承受的非线性流体动压和自由面形状。

关键词　Lagrange 观点，非线性流体动压，自由面

引　言

在设计核反应装置的液体容器时，必须计算地震发生时作用在壁面上的流体动压。Chwang[1]提出了一种非线性理论，求解了此问题。他的方法是以 Euler 观点描述模型的控制方程，其方程形式较简单。但由于自由面的不确定性，需要经过线性化的处理，简化至初始区域内求解。本文将从 Lagrange 观点描述的控制方程出发，从而使得自由面边界条件精确满足，求解区域固定。并将 Stoker[2]著作中的方法推广至三维情况，精确求得了匀加速圆柱形容器壁面所承受的非线性流体动压和自由面形状。对于二维情况，文献[3~5]表明了此方法的应用成果。

1　控制方程

如图 1 所示，考察一圆柱形容器。设流体是理想不可压缩的，且体力有势。固壁是刚性的，初始时刻($t=0$)流体静止，则流动是无旋的。当$t\to 0^+$时，不失一般性[4]，设容器以常加速度a_1运动。任选一流体质点，设a,b,c为$t=0$时表征此质点的 Lagrange 参量，则在时刻 t 的质点位移在直角坐标系下记为 $X(a,\ b,\ c;\ t)$，$Y(a,\ b,\ c;\ t)$，$Z(a,\ b,\ c;\ t)$，压力为 $p(a,\ b,\ c;\ t)$。则运动方程为

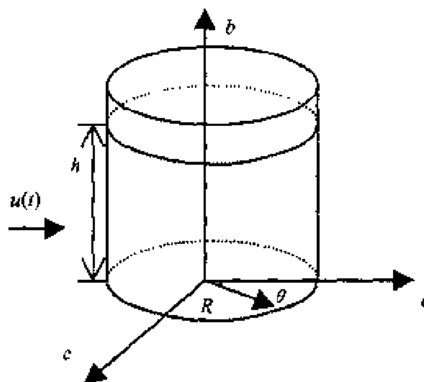


图 1　加速圆柱容器的初始图

$$X_{tt}X_a+(Y_{tt}+g)Y_a+Z_{tt}Z_a=-\frac{1}{\rho}p_a \tag{1}$$

$$X_{tt}X_b+(Y_{tt}+g)Y_b+Z_{tt}Z_b=-\frac{1}{\rho}p_b \tag{2}$$

$$X_{tt}X_c+(Y_{tt}+g)Y_c+Z_{tt}Z_c=-\frac{1}{\rho}p_c \tag{3}$$

其中g为重力加速度，ρ为流体之密度。从（1），（2）中消去p，得

$$(X_aX_{bt}+Y_aY_{bt}+Z_aZ_{bt})_t=(X_bX_{at}+Y_bY_{at}+Z_bZ_{at})_t$$

两边对t积分，并考虑到流动的无旋性，则可得到

$$(X_aX_{bt}+Y_aY_{bt}+Z_aZ_{bt})-(X_bX_{at}+Y_bY_{at}+Z_bZ_{at})=0 \tag{4}$$

同理可得

$$(X_bX_{ct}+Y_bY_{ct}+Z_bZ_{ct})-(X_cX_{bt}+Y_cY_{bt}+Z_cZ_{bt})=0 \tag{5}$$

$$(X_a X_{ct} + Y_a Y_{ct} + Z_a Z_{ct}) - (X_c X_{at} + Y_c Y_{at} + Z_c Z_{at}) = 0 \tag{6}$$

连续性方程为

$$X_a Y_b Z_c + X_b Y_c Z_a + X_c Y_a Z_b - X_c Y_b Z_a - X_a Y_c Z_b - X_b Y_a Z_c = 1 \tag{7}$$

初始条件

$$X(a,b,c;0) = a, Y(a,b,c;0) = b, Z(a,b,c;0) = c \tag{8}$$

$$X_t(a,b,c;0) = 0, Y_t(a,b,c;0) = 0, Z_t(a,b,c;0) = 0 \tag{9}$$

设自由面压力为零，则有

$$p(a,h,c;t) = 0 \tag{10}$$

如设底面质点永远在底面，则有

$$Y(a,0,c;t) = 0 \tag{11}$$

对于侧面 S_0，则有

$$X_t(a,b,c;t)\cos(n,a) + Z_t(a,b,c;t)\cos(n,c) = a_1 t\cos(n,a) \tag{12}$$

这里，n 为外法向。

由于 $t \ll \left(\frac{2h}{a_1}\right)^{1/2}$，我们可将 X, Y, Z, p 展开为关于 t 的幂级数

$$X(a,b,c;t) = a + X^{(1)}(a,b,c)t + X^{(2)}(a,b,c)t^2 + \cdots \tag{13a}$$

$$Y(a,b,c;t) = b + Y^{(1)}(a,b,c)t + Y^{(2)}(a,b,c)t^2 + \cdots \tag{13b}$$

$$Z(a,b,c;t) = c + Z^{(1)}(a,b,c)t + Z^{(2)}(a,b,c)t^2 + \cdots \tag{13c}$$

$$p(a,b,c;t) = p^{(0)}(a,b,c) + p^{(1)}(a,b,c)t + p^{(2)}(a,b,c)t^2 \cdots \tag{13d}$$

由（9）可知，$X^{(1)} = Y^{(1)} = Z^{(1)} = 0$。将（13a，b，c）代入（7），则有

$$X^{(2)}{}_a + Y^{(2)}{}_b + Z^{(2)}{}_c = 0 \tag{14a}$$

$$X_a{}^{(3)} + Y_b{}^{(3)} + Z_c{}^{(3)} = 0 \tag{14b}$$

$$\begin{aligned} X_a{}^{(4)} + Y_b{}^{(4)} + Z_c{}^{(4)} - X_c{}^{(2)}Z_a{}^{(2)} - Y_c{}^{(2)}Z_b{}^{(2)} - X_b{}^{(2)}Y_a{}^{(2)} + \\ Y_b{}^{(2)}Z_c{}^{(2)} + X_a{}^{(2)}Y_b{}^{(2)} + X_a{}^{(2)}Z_c{}^{(2)} = 0 \end{aligned} \tag{14c}$$

把（13a，13b，13c）代入（4），（5），（6），可得

$$X_b{}^{(2)} - Y_a{}^{(2)} = 0, X_b{}^{(3)} - Y_a{}^{(3)} = 0, X_b{}^{(4)} - Y_a{}^{(4)} = 0 \tag{15}$$

$$Y_c{}^{(2)} - Z_b{}^{(2)} = 0, Y_c{}^{(3)} - Z_b{}^{(3)} = 0, Y_c{}^{(4)} - Z_b{}^{(4)} = 0 \tag{16}$$

$$X_c{}^{(2)} - Z_a{}^{(2)} = 0, X_c{}^{(3)} - Z_a{}^{(3)} = 0, X_c{}^{(4)} - Z_a{}^{(4)} = 0 \tag{17}$$

由此可见，二、三阶位移系数满足 Laplace 方程，更高阶则满足 Poisson 方程。同样，将（13a）~（13d）代入（1），（2），（3），则有

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}p_a{}^{(0)} = 2X^{(2)}, \qquad\qquad \frac{1}{\rho}p_a{}^{(0)} = 2X^{(2)}, \\ -\frac{1}{\rho}p_a{}^{(2)} = 2X^{(2)}X_a{}^{(2)} + (g + 2Y^{(2)})Y_a{}^{(2)} + 2Z^{(2)}Z_a{}^{(2)} + 12X^{(4)} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{\rho}p_b{}^{(0)}=g+2Y^{(2)}, \qquad \frac{1}{\rho}p_b{}^{(0)}=g+2Y^{(2)},\\
&-\frac{1}{\rho}p_b{}^{(2)}=2X^{(2)}X_b{}^{(2)}+(g+2Y^{(2)})Y_b{}^{(2)}+2Z^{(2)}Z_b{}^{(2)}+12Y^{(4)}
\end{aligned}\right\} \tag{19}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{\rho}p_c{}^{(0)}=2Z^{(2)}, \qquad \frac{1}{\rho}p_c{}^{(0)}=2Z^{(2)},\\
&-\frac{1}{\rho}p_c{}^{(2)}=2X^{(2)}X_c{}^{(2)}+(g+2Y^{(2)})Y_c{}^{(2)}+2Z^{(2)}Z_c{}^{(2)}+12Z^{(4)}
\end{aligned}\right\} \tag{20}
$$

由此可看出，如果求得位移系数，则对方程直接积分便可求得 $p^{(i)}$。

2 自由面位移的求解

位移展开式系数的边界条件为

$$X^{(2)}(a,h,c)=0, \qquad Z^{(2)}(a,h,c)=0$$

$$X_b{}^{(2)}(a,0,c)=0, \qquad Y^{(2)}(a,0,c)=0, \qquad Z_b{}^{(2)}(a,0,c)=0, \qquad h\text{ 为液面高度}$$

$$2X^{(2)}\cos\theta+2Z^{(2)}\sin\theta=a_1\cos\theta, \qquad X^{(3)}\cos\theta+Z^{(3)}\sin\theta=0$$

$$X^{(4)}\cos\theta+Z^{(4)}\sin\theta=0$$

由于边界条件的耦合性，为消除之，可令 $X^{(2)}=\phi_a$，$Y^{(2)}=\phi_b$，$Z^{(2)}=\phi_c$，代入(14)可得：$\nabla^2\phi=0$。在柱坐标下则变换为

$$\phi_{rr}+\frac{1}{r}\phi_r+\frac{1}{r^2}\phi_{\theta\theta}+\phi_{bb}=0 \tag{21}$$

相应地，边界条件则为

$$\phi_r(R,\theta,b)=\frac{1}{2}a_1\cos\theta\,,\quad \phi(r,\theta,h)=0\,,\quad \phi_b(r,\theta,0)=0 \tag{22}$$

求解(21)，(22)可得

$$\phi(r,\theta,b)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a_1\cos\theta}{\lambda_k{}^2 h}\frac{I_1(\lambda_k r)}{I_1'(\lambda_k R)}\cos\lambda_k b\,,\quad \lambda_k h=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

I_1 为第一类修正的 Bessel 函数。记 $\mu_k=\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)=\lambda_k h$，于是

$$X_r{}^{(2)}=\phi_r=a_1\cos\theta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k}\frac{I_1(\mu_k\, r/h)}{I_1'(\mu_k\, R/h)}\cos(\mu_k\, b/h) \tag{23}$$

$$Y_b{}^{(2)}=\phi_b=a_1\cos\theta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}I_1(\mu_k\, r/h)}{I_1'(\mu_k\, R/h)}\sin(\mu_k\, b/h) \tag{24}$$

$$Z_\theta{}^{(2)}=\frac{1}{r}\phi_\theta=\frac{h_1 a_1\sin\theta}{r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}I_1(\mu_k\, r/h)}{I_1'(\mu_k\, R/h)}\cos(\mu_k\, b/h) \tag{25}$$

则

$$X^{(2)} = X_r^{(2)}\cos\theta - Z_\theta^{(2)}\sin\theta, \quad Y^{(2)} = Y_b^{(2)}, \quad Z^{(2)} = X_r^{(2)}\sin\theta + Z_\theta^{(2)}\cos\theta$$

容易求得：$X^{(3)} = Y^{(3)} = 0$。引入无量纲参数 $\varepsilon = t\left(2h/a_1\right)^{-1/2}$，可得自由面位移

$$\hat{X} = a/h, \quad \hat{Y} = 1 - 2\cos\theta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{I_1(\mu_k\, r/h)}{\mu_k I_1'(\mu_k\, R/h)}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4), \quad \hat{Z} = c/h \tag{26}$$

3 压力之求解

容易求得 $p^{(1)} = 0$，对方程（19）中第一式两边积分，可求得

$$p^{(0)}(a,b,c) = \rho g(h-b) + 2a_1 h\cos\theta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\mu_k^{\ 2}}\frac{I_1(\mu_k\, r/h)}{I_1'(\mu_k\, R/h)}\cos\mu_k\, b/h \tag{27}$$

在（18），（20）中令 $b = h$，并设 $X^{(4)} = \varphi_a$， $Y^{(4)} = \varphi_b$， $Z^{(4)} = \varphi_c$，引入

$\Phi(a,b,c) = \varphi(a,b,c) - \varphi(0,h,0)$，则 $\Phi(a,h,c) = -\dfrac{1}{12}(gY^{(2)}(a,h,c) + [Y^{(2)}(a,h,c)]^2)$

于是可得

$$\frac{1}{\rho}p^{(2)}(a,b,c) = -12\Phi(a,b,c) - [X^{(2)}]^2 - [Y^{(2)}]^2 - [Z^{(2)}]^2 - gY^{(2)} \tag{28}$$

这里 Φ 满足 Poisson 方程：$\nabla^2\Phi = -f(a,b,c)$

其中 $f(a,b,c) = Y_b^{(2)}Z_c^{(2)} + X_a^{(2)}Y_b^{(2)} + X_a^{(2)}Z_c^{(2)} - X_c^{(2)}Z_a^{(2)} - Y_c^{(2)}Z_b^{(2)} - X_b^{(2)}Y_a^{(2)}$

边界条件 $\Phi_b(a,0,c) = 0, \Phi_r(a,b,c) = 0$。利用 Green 函数法，我们可求得

$$\begin{aligned}\Phi(r,\theta,b) = &\int_0^h \mathrm{d}b'\int_0^R r'\mathrm{d}r'\int_0^{2\pi} f(r',\theta',b')K(r,\theta,b;r',\theta',b')\mathrm{d}\theta' - \\ &\int_0^R r'\mathrm{d}r'\int_0^{2\pi}\frac{\partial K(r,\theta,b;r',\theta',h)}{\partial b'}g(r',\theta',h)\mathrm{d}\theta'\end{aligned} \tag{29}$$

其中

$$\begin{aligned}f(r,\theta,b) = &-\frac{1}{r^2}\phi_{r\theta}^{\ 2} - \phi_{b\theta}^{\ 2} - \phi_{rb}^{\ 2} - \frac{1}{r^2}\phi_{\theta b}^{\ 2} + \frac{1}{r}\phi_r\phi_{rr} + \frac{1}{r^2}\phi_{rr}\phi_{\theta\theta} - \frac{1}{r^4}\phi_\theta^{\ 2}(\sin^2 2\theta + \cos^2\theta - \\ &\cos^2\theta\sin 2\theta) + 2\sin^2\theta\cos\theta(\cos\theta - \sin\theta)\left(\frac{1}{r^4}\phi_\theta\phi_{\theta\theta} + \frac{1}{r^3}\phi_r\phi_\theta - \frac{1}{r^2}\phi_\theta\phi_{rr}\right) + \\ &\frac{2}{r^3}\phi_{r\theta}\phi_\theta(\sin^2 2\theta - \cos 2\theta\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)\end{aligned}$$

$$g(r,\theta,h) = -\frac{1}{12}(g\phi_b(r,\theta,h) + \phi_b^{\ 2}(r,\theta,h))$$

Green 函数是

$$K(r,\theta,b;r',\theta',b')=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{R}\right)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r'}{R}\right)\cos n(\theta-\theta')}{\left(\mu_m^{(n)}/R\right)\|N_n\|^2}\times$$

$$\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_m^{(n)}(h-b')}{R}\operatorname{ch}\mu_m^{(n)}b}{\operatorname{ch}(\mu_m^{(n)}h/R)}-\frac{\operatorname{sh}\mu_m^{(n)}(b-b')}{R}H(b-b')\right)$$

这里 $H(b-b')=\begin{cases}0 & b\le b'\\ 1 & b>b'\end{cases}$ 为 Heaviside 函数

$\|N_m\|^2=\frac{R^2\varepsilon_n}{2}(1-\frac{n^2}{[\mu_m^{(n)}]^2})J_n^2(\mu_m^{(n)})$，$\mu_m^{(n)}$ 为 J_n' 的第 m 个零点。$\varepsilon_n=\begin{cases}1 & n\ne 0\\ 2 & n=0\end{cases}$

于是将(30)代入(29)，即可求得 $p^{(2)}(a,b,c)$。

4 结果与讨论

壁面流体动压系数

$$C_p=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k I_1(\mu_k R/h)}{\mu_k^2 I_1'(\mu_k R/h)}\cos(\mu_k b/h)+\frac{2}{\rho a_1^2}p^{(2)}\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)$$

对于线性流体动压（在 $\theta=\pi$），当 $\frac{2R}{h}\to\infty$，C_p 趋于一有限值

$$\lim_{R/h\to\infty}C_{p\max}=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}=0.7425$$

这与 Westergaard[6]和 von Karman[7]对于直坝的经典结果是一致的。在自由面上，令 $\theta=\pi$，有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{I_1(\mu_k R/h)}{\mu_k I_1'(\mu_k R/h)}\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k}$$

即自由面位移存在对数奇性。

参 考 文 献

1 Chwang AT，Wang KH. Nonlinear impulsive force on an accelerating container. *J Fluids Eugng*，1984，106：233

2 Stoker J J. Water Waves. New York：Interscience Publisher Inc，1957

3 陶明德，岑韵. 在水槽中的加速平板问题. 力学学报，1990，22(1)

4 施小民，陶明德. 加速斜板作用下的自由面波动. 水动力学研究与进展，1992(增刊)

5 Tao Mingde，Shi Xiaomin. Problem of hydrodynamic pressure on suddenly starting vessel. *Applied Math Mech*，1993，13(2)

6 Westergaard HM. Water pressures on dams during earthquakes. *Trans ASCE*，1933，98：418

7 Karman T von. Discussion of water pressures on dams during earthquakes. *Trans ASCE*，1933，98：434

悬浮柱状体在楔形流场中运动的研究[1)]

王叶龙 林建忠

（浙江大学力学系，杭州 310027）

摘要 数值计算了悬浮柱状体在楔形流场的运动。计算柱状体的受力时对以往的工作进行了改进，即考虑流场速度沿长度方向上的变化。通过改进前后不同 St 数下柱状体的轨迹图的比较，发现改进后的结果更符合实际情况，柱状体的运动随着 St 数变化而变化的连续性和规律性更加明显。还总结了柱状体的运动特征，所得结果对研究悬浮柱状体运动的理论研究有参考价值，对工程实际应用有指导意义。

关键词 悬浮柱状体，运动，数值模拟

引 言

固态的柱状体包含在液或气中的悬浮流，涉及到多相流和非牛顿流理论研究中的一些难点问题，研究它具有理论价值。同时，柱状体悬浮流还具有广泛的应用背景。

复合材料日益受到重视，而短纤维材料是复合材料中最常见的，它的成型和加工与柱状体悬浮流的动力学特性密切相关，加工过程中由流动诱导的纤维取向决定了成品的质量。对单一材料而言，玻璃制品成型中，玻璃纤维需用水进行以消除静电，消除效果取决于水与纤维相互作用。玻璃易碎性来源于内部应力集中，应力集中与玻璃处于熔液状态时纤维取向有关。目前国际上一种新型木质材料是通过将原木碎化成木纤维，然后对其在高压下重组，形成质地坚硬的材料，这种材料可取代现有的一些金属，而纤维重组过程与气纤相互作用有关。柱状体悬浮流还与造纸工业密切相关。此外，碳质纤维材料、陶瓷纤维材料等也有广泛应用。

聚合物是化工领域最常见的基质，液态下的聚合物其应力状况由本构方程描述，推导本构方程的主要手段之一是统计力学方法，该方法将聚合物视为离散的固态与流体的结合，而柱状体固态物代表了一大类聚合物。柱状体在流体作用下的运动与取向、柱状体对流体的作用等都决定了聚合物的特性。

大部分纺织品成型与加工是短纤维分组成束、成片的过程，该过程是气与柱状体混合流动，柱状体在气流中指向、均匀度、绕卷度、扭曲度直接决定了成品质地、强度和手感。

因此，研究柱状体悬浮流的运动特征以及柱状体的运动和取向，从而对其控制和利用具有理论和实际意义，所以本研究是非常必要的。

1 流场计算

考虑图 1 的楔形流场，该流场介于两条非平行放置的平板间，流体从宽口端流进，窄口端流出，楔形水平方向长 0.3m，入口处宽 0.06m，两块平板与水平轴的夹角都为 2°，纤维长度 1mm。该流动可视为平面流动，取两平板的交点为坐标原点，建立极坐标系，楔形区为 A1B1B2A2。流场由原点的一个汇所产生，并受角度为 $\theta=\pm\alpha$ 的固壁所限制。易证，流动为

1) 国家杰出青年科学基金资助项目（19925210）

径向流动，径向流速表达式 $u_r = F(\theta)/r$，$F(\theta)$ 的量纲与 ν 量纲相同，令无量纲量 $f(\theta)=F(\theta)/\nu$，由于 $u_\theta = 0$，由连续性方程可得 $ru_r = F(\theta)$。假设汇的总流量 Q 为常数，对各量无量纲化，可得

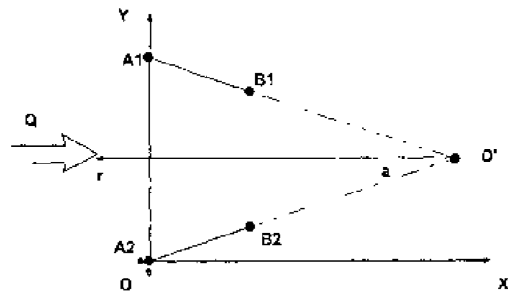


图1 楔形流场图示

$$\frac{Q}{\nu} = Re\int_{-1}^{1} f(\eta)\,\mathrm{d}\eta \tag{1}$$

其中 $\eta=\theta/\alpha$，$u_r/u_{\max}=f(\eta)$，$Re = u_{\max} r\alpha/\nu$。极坐标内的动量方程为

$$u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + r\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}\right) \tag{2}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \tag{3}$$

由（2），（3）两式消去压强 p，无量纲化得

$$f''' + 2Re\alpha ff' + 4\alpha^2 f' = 0 \tag{4}$$

边界条件为：$\eta=\pm1$ 时 $f(+1)=f(-1)=0$；$\eta=0$ 时，$u=u_{\max}$，$f(0)=1$。这个方程的解法在文献[1]中有详细说明，这里不再赘述。

通过对几组流量 Q 下的 $f(\eta)$，$g(\eta)$ 的计算，可知 Re 数随着 Q 的改变而改变，且 Re 近似与 Q 成比例。虽然 Re 数变化很大，但方程的解及解的导数 $f(\eta)$，$g(\eta)$ 变化并不明显。

2 粒子轨迹的计算

2.1 运动方程

C.Pozrikidis[2]推导了与文[3]相同的作用在振荡粒子上的力 $\boldsymbol{F}$ 的公式

$$\boldsymbol{F} = -\mu a\{\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}^\infty\lambda + \boldsymbol{M}\lambda^2 + (\boldsymbol{B}^0-\boldsymbol{B}^\infty)[\lambda/(\lambda+1)]\}\cdot\boldsymbol{U} \tag{5}$$

式中 $\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{B}^\infty$，$\boldsymbol{B}^0$ 分别为 Stokes 力、附加质量力和Basset 力系数张量，$\boldsymbol{B}^0=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{D}/6\pi$，$\boldsymbol{U}$ 是相对速度，$\lambda^2=-\mathrm{i}\omega d^2/\nu$，以上四项分别为黏性阻力项、Basset 加速度项、附加质量力项和高频修正项。上式的反变换为

$$\boldsymbol{F} = -\mu a\left\{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{U} + \frac{a}{(\nu\pi)^{1/2}}\boldsymbol{B}^\infty\int_0^t\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}\tau}\cdot\frac{\mathrm{d}\tau}{(t-\tau)^{1/2}} + \frac{a^2}{\nu}\boldsymbol{M}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t} + \frac{a}{(\nu\pi)^{1/2}}(\boldsymbol{B}^0-\boldsymbol{B}^\infty)\int_0^t\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}\tau}e^{t-\tau}\mathrm{erfc}(\sqrt{t-\tau})\mathrm{d}\tau\right\} \tag{6}$$

通过文[4]中介绍的方法和上面的假定，可得到作用在粒子上的转矩

$$L_3 = \frac{8}{3}\pi\mu\sigma l^3 (C - \dot{\theta})[1 - \sigma(\ln 2 - 1.8333)] \tag{7}$$

其中 $\sigma = \ln^{-1}(2\phi)$， $C = -\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial u_f}{\partial x} - \frac{\partial v_f}{\partial y}\right) + \cos^2\theta\frac{\partial v_f}{\partial x} - \sin^2\theta\frac{\partial u_f}{\partial y}$， θ 是粒子方向角，u_f， v_f 是流场速度的分量。

(6)式两边同除以粒子质量 $m_p = \rho_p \pi l^2 a$，(7)式两边同除以粒子绕中心的转动惯量 $J_p = \frac{m_p}{2}(a^2 + l^2/12)$，并注意到所计算的流场是定常的，可得到

$$\ddot{X} = \frac{C_1}{St}A^{-1}DA(U_f - \dot{X}) + C_2\sqrt{\frac{\rho^*}{St}}\int_0^t A^{-1}B^{\infty}A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(-\dot{X})\cdot\frac{\mathrm{d}\tau}{(t-\tau)^{1/2}} - C_3\rho^* A^{-1}MA\ddot{X} +$$
$$C_4\sqrt{\frac{\rho^*}{St}}\int_0^t A^{-1}(B^{0} - B^{\infty})A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(-\dot{X})e^{t-\tau}\mathrm{erfc}(\sqrt{t-\tau})\mathrm{d}\tau$$

$$\ddot{\theta} = 4(C - \dot{\theta})\sigma[1 - \sigma(\ln 2 - 1.8333)]/St \tag{8}$$

其中 $C_1 = \frac{1}{\pi\varphi}\frac{\Delta U}{\delta}, C_2 = \frac{1}{\pi\sqrt{\pi\varphi}}\frac{1}{\sqrt{\delta/\Delta U}}, C_3 = 1, C_4 = C_2$， $St = \rho_p a^2 \Delta U/\delta\mu$， $\rho^* = \rho_f/\rho_p$，

ΔU， δ 是流场的特征尺度(分别为特征速度、特征长度)，X 是粒子的位置坐标矩阵 $[x, y]^{\mathrm{T}}$；下标 p 指代物理量是粒子的，f 表示流场；而 A 为沿粒子轴向的坐标系到直角坐标系下的过渡距阵 $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$。结合(8)式即可计算出粒子在任意时刻的运动状态，在计算中，所取的初始条件为：在入口端，粒子初速度、初始角速度都为零，初始位置指定，初始方向角指定。假设粒子是均匀地从入口处进来的。

2.2 相对速度计算

文献[5]中计算stokes力公式为 $F = \zeta_p(2\delta - pp).\int_{-L/2}^{L/2}(v_f - \dot{r})\mathrm{d}s$，相当于 $F = -\mu a D\cdot U$ 中取相对速度为 $1/L\int_{-L/2}^{L/2}(v_f \quad \dot{r})\mathrm{d}s = 1/L\int_{-L/2}^{L/2}(v_f)\mathrm{d}s \quad U_0$， U_0 为粒子中心处的速度。

2.3 圆柱粒子所受各种外力系数的计算

把文献[6]中用图像的形式给出的 D， M， B^{∞} 结果，用最小二乘法把每一曲线拟合成关于纵横比的多项式函数，以便于应用，所选用的多项式函数的次数为 6。

2.4 运动方程的求解

初始条件为入口端粒子初速度、初始角速度为零，初始位置和方向角指定。假设粒子均匀从入口进来，跟踪这些粒子可得到不同St 数下粒子的位置、速度、方向角及角速度等。

3 结果分析

计算了四个 *St* 值的情况，这里给出两种 *St* 数改进前后粒子的轨迹图，即图 2 和图 3。

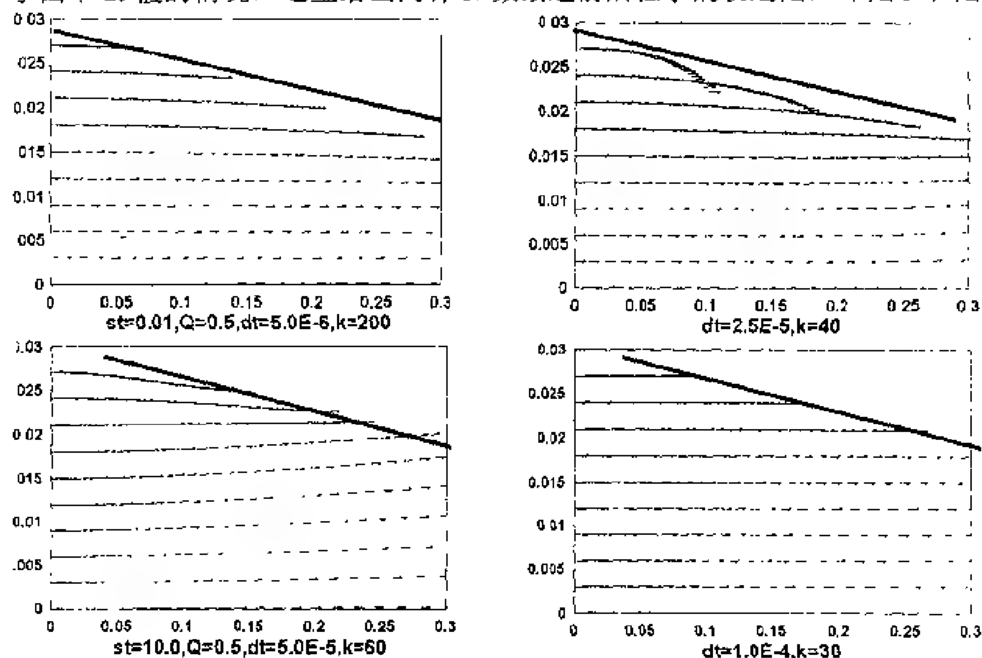


图 2　初始方向角为 0 时，不同 *St* 数的粒子原轨迹图（左边）与改进后的轨迹图（右边）

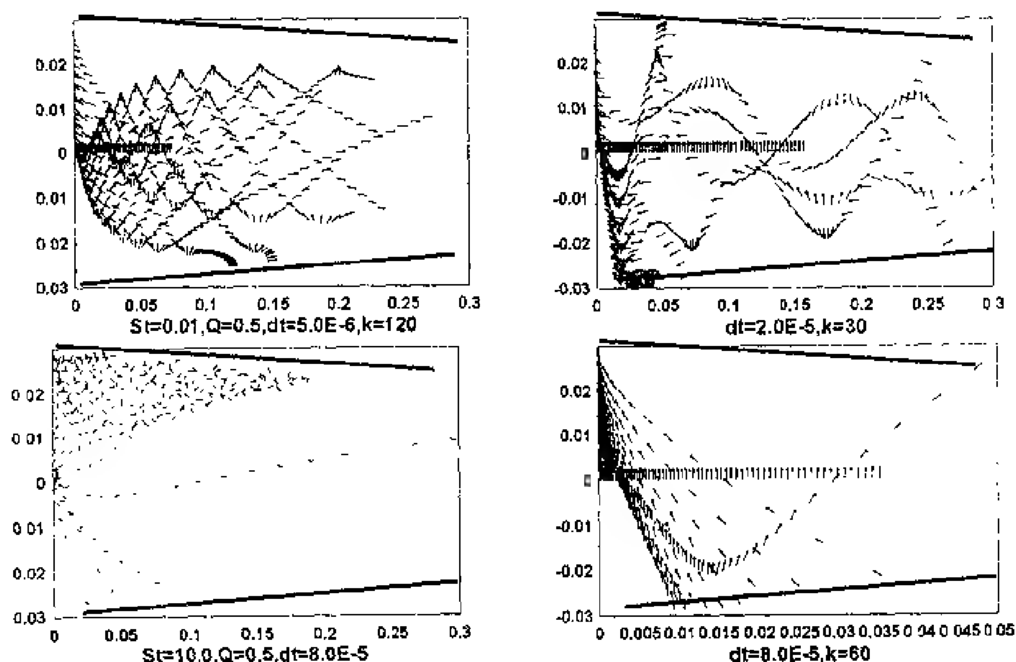


图 3　初始方向角为π/2 时，不同 *St* 数的粒子原轨迹图（左边）与改进后的轨迹图（右边）

(1) 水平进入和垂直进入的粒子转动情况比较

由转矩公式易知其初始转矩与 C 成正比，对水平进入的粒子，初始值为 $C_0 = \partial v_f / \partial x$，对垂直进入的粒子，初始值为 $C_1 = \partial u_f / \partial y$；对楔形流场，$\left|\partial u_f / \partial y\right| >> \left|\partial v_f / \partial x\right|$，后者远大

于前者，故垂直进入的粒子刚开始转的就很快，而水平进入的转动很不明显。

(2) 改进前后相对速度的比较

对水平的粒子，因其方向基本与流向一致以及流场的速度与极径成反比，故改进后的相对速度变大，相同位置处粒子的加速要快，故在相同的时间内粒子的位移要变大。

(3) 改进前后的结果比较

改进前后，粒子的总体运动规律是一致的，改进对垂直进入的粒子的影响比对水平进入的粒子的影响要大；无论是水平进入的粒子还是垂直进入的粒子，改进后的结果比前面的结果都要好、更符合实际情况，改进后粒子的运动随着 *St* 数变化而变化的连续性和规律性更加明显，例如改进后，从中心处垂直进入的粒子一直保持垂直不变，比改进前理想。

从改进后的轨迹图可以看出：初始方向角为 0 时，$C_0 = \partial v_f / \partial x$，粒子所受转矩为逆向，除了 *St*=0.01 时从上底板附近进入的粒子因 *St* 数小所受的 stokes 力较大有较明显向下偏转运动外，其余情况下，粒子有微弱上偏趋势；故在很小 *St* 数下，粒子都能通过楔形区，其余的时侯，从出口区高度以外高度进入的粒子最终运动到底板上。

初始方向角为 π/2 时，除了 *St*=0.01 时，因粒子方向变化较快，有部分粒子经过波动最终能通过楔形区，其余情况下，从非中心位置进入的粒子最后都撞到上下两底板上，且 *St* 数越大，相同位置处进来的粒子撞到底板上时离入口处距离越近。

4 结 论

计算作用在柱状体上的力时，考虑流场速度沿柱状体长度方向上变化，能得到更符合实际情况的柱状体的运动轨迹。此时，柱状体的运动随着 *St* 数变化而变化的连续性和规律性更加明显。初始方向角为 0 时，粒子进入楔形流场几乎都能通过楔形区。初始方向角为 π/2 时，有部分粒子经过波动最终能通过楔形区，其余情况从非中心位置进入的粒子最后都撞到上下两底板上，且 *St* 数越大，相同位置进来的粒子撞到底板上时离入口处距离越近。

参 考 文 献

1 Lin Jian-zhong, Liu Zhongqiu, Wang Yelong. Research on the motion characteristics of fiber suspensions in a wedge-shaped flow. *J Hydrodynamics*, Ser. B, 2000, 2: 92~100

2 Pozrikidis C. A singularity method for unsteady linearized flow. *Phys Fluids*, 1989, A1(9): 1508~1513

3 Loewenberg M. Stokes resistance, added mass, and Basset force for arbitrarily oriented, finite-length cylinders. *Phys Fluids*, 1993, A5(3): 899-8213

4 Cox RG. Long slender bodies in a viscous fluid. Part I, *J Fluid Mech*, 1970, 44: 792~803

5 Ravi Shanker JW, Gillespie Jr and Guceri SI. On the effect of nonhomogeneous flow fields on the orientation distribution and rheology of fiber suspensions. *Ploymer Engineering and Science*, 1991, I.31, 3. 356~363

6 Lawrence J and Weinbaum S. The unsteady force on a body at low Reynolds number; the axisymmetric motion of a spheroid. *J Fluid Mech*, 1988, 189: 463~182

低渗裂缝性砂岩油藏流固耦合分析

刘建军　刘先贵　胡雅衽　张盛宗

(中国科学院渗流流体力学研究所，河北廊坊 065007)

摘要　根据低渗裂缝性砂岩油藏的储层特征，建立适合裂缝性砂岩油藏渗流的等效连续介质模型；通过实验得出有效压力改变对储层孔隙度、渗透率影响的规律；考虑低渗透油藏渗流时启动压力梯度和低渗储层的流固耦合特性，将渗流力学与弹塑性力学相结合，建立起适合低渗透油藏的流固耦合渗流数学模型，并给出其数值解。在黑油模型和弹塑性有限元程序的基础上，编制了计算低渗透油藏流固耦合渗流的计算软件。通过数值模拟和不考虑流固耦合时的计算结果相比，从中可以看出低渗透油藏中流固耦合效应是十分明显的。

关键词　低渗透，流固耦合，启动压力梯度，弹塑性

引　言

低渗透油田开发在相当一个时期是我国石油工业保持稳产重要的问题，低渗砂岩裂缝性储层占有很大的比重。我国开发的低渗透砂岩油田均发现有裂缝系统的存在。裂缝对低渗透油田的开发具有重要的影响。对于低渗砂岩油藏而言，如果不存在裂缝的话，大多不具有开采价值。但是，有裂缝存在时，如注采压力控制不当时，会造成油井的水窜及水淹，严重影响开发效果。如何充分发挥其有利的一面，避免其所造成的灾害，是石油工业提出的一个重要课题。油气藏的开发过程是一个多相流体渗流与油藏岩土变形动态耦合的过程。由于低渗砂岩储层的孔隙很小，储层有效压力升高，容易造成渗透率的降低。同时，有效压力的改变也可能导致裂缝的开启或闭合，并改变渗透率。即低渗储层的流固耦合效应较中高渗油田要强得多。因此，需对低渗裂缝性砂岩油藏流固耦合渗流理论进行研究。

本文打破传统上把裂缝性油藏处理成双重介质的做法，建立起适合低渗裂缝性砂岩油藏渗流的等效连续介质模型。在低渗透介质渗流规律和储层流固耦合特性实验基础上，将多相流体渗流力学和岩土弹塑性力学相结合，建立低渗裂缝性砂岩油藏流固耦合渗流的数学模型，并给出其数值解，最后对一五点井网采用定压力生产时的情况进行了数值模拟。

1　有效压力改变对低渗透岩心孔隙度、渗透率的影响

为考察有效压力改变对低渗介质孔隙度、渗透率的影响，我们做了大量的室内物理模拟实验。实验岩心分为裂缝性岩心和基质岩心两类。分析实验结果可知：

(1) 随着有效压力的增加，岩心的渗透率和孔隙度均有不同程度的下降，当有效压力降低后，岩心的渗透率和孔隙度有所恢复，但不能恢复到原始数据。孔隙的变形具有塑性变形的特征，有效压力降低对储层造成的伤害是永久性的。

(2) 岩心的渗透率和孔隙度随有效压力的增加而下降的程度不同。当有效压力由 2MPa 增加至 20MPa 时，裂缝性岩心孔隙度平均下降 13%，而渗透率平均下降 80%多，基质性岩心孔隙度平均下降不足 2%，而渗透率平均下降接近 60%。它说明多孔介质中孔隙通道的微小变化对流体的流动能力的影响是非常显著的，特别是低渗透储层由于其原本就具有孔道细微的特点，因此孔隙体积略有下降都将造成渗透率的急剧降低。

(3) 低渗透岩心中裂缝的存在将改变有效压力作用下岩心孔隙的变形能力，相对于基质性岩心，裂缝性岩心物性参数受到的伤害程度更大，且更难以恢复。随着有效压力的增加，裂缝性岩心渗透率的下降程度明显大于基质性岩心，而当有效压力减小时裂缝性岩心渗透率的恢复程度却明显低于基质性岩心。

(4) 根据实验结果，可用指数关系描述孔隙度、渗透率随有效压力的变化规律

$$\phi = \phi_0 e^{-\alpha P_e}, \quad K = K_0 e^{-\beta P_e} \tag{1}$$

式中：α, β 是参数；P_e 为有效压力；ϕ_0，K_0 分别为有效压力为 0 时的孔隙度和渗透率。

2 低渗裂缝性砂岩油藏渗流的等效连续介质模型

有关裂缝性油藏的渗流模型应用最多的为双重介质模型，即裂缝渗流系统和基质渗流系统相对独立，中间通过流体质量交替方程联系。但对于低渗透砂岩油藏的裂缝而言，裂缝分布具有不均匀、不连续的特点，其自身不能形成渗流网络通道，因此，双重介质渗流理论显然已不适用于低渗裂缝性砂岩油藏。等效连续介质模型是将裂缝岩体模拟为具有对称渗透张量的各向异性连续体。由于可利用现成的连续介质理论，目前在水体渗流领域中应用较广。在油气田开发领域的渗流研究中，有关这方面的工作做得很少。相对于岩体中水的渗流，油藏涉及到油、气、水等多相流体的渗流，因此要复杂一些。但等效连续介质模型不失为解决裂缝性砂岩储藏中多相流体渗流的一种有效方法。

现考虑低渗裂缝性砂岩油藏中的任一模拟区块，测得基质岩心的渗透率为 K_m、垂直裂缝方向的总宽度为 b_m。裂缝所占的总宽度为 b_c。测试含单一裂缝岩心的等效宽度为 b_f，裂缝的线密度为 C_d，线连续性系数为 C_l。则假定存在一个等效的渗透系数，使得在同样的压力梯度的作用下，传导相同的流量 Q，则平行于裂缝方向的等效渗透率可定义为

$$K^p = K_m + (K_f - K_m) C_d b_f \tag{2}$$

类似地可以导出对于垂直裂缝方向的等效渗透率 K^n 为

$$K^n = \frac{K_f K_m}{K_f - (K_f - K_m) C_d b_f} \tag{3}$$

通常实验室所测的裂缝渗透率为贯通裂缝，其渗透率假设为 K_t，而实际油藏的裂缝大多为非贯通缝，因此可用线连续性系数 C_l 加以修正。所以 K^p 及 K^n 又可表示为

$$K^p = K_m + (C_l K_t - K_m) C_d b_f \tag{4}$$

$$K^n = \frac{C_l K_t K_m}{C_l K_t - (C_l K_t - K_m) C_d b_f} \tag{5}$$

由于 $K^p \neq K^n$，因此具有裂缝介质相当于主渗透系数为 K^p 和 K^n 的各向异性介质，其主轴方向为裂缝方向和裂缝垂直方向。

对于裂缝性油藏油水两相渗流问题，利用等效介质模型求解时，还必须确定等效介质模型的毛管压力和相对渗透率。在此用下标 m 代表基质岩块；f 代表含裂缝岩块，w 代表水，o 代表油。设基质岩块的孔隙度为 ϕ_m，裂缝岩块的孔隙度为 ϕ_f，则单元的总孔隙度为

$$\phi = \frac{\phi_m b_m + \phi_f b_c}{b_m + b_c} = \phi_m + (\phi_f - \phi_m) C_d b_f \tag{6}$$

由于基质岩块和裂缝岩块中毛管压力不平衡，基质和裂缝两种介质间将发生渗吸作用，渗吸作用的效果将使得两种介质间毛管压力趋于平衡，即有

$$p_{cm}(S_{wm}) = p_{cf}(S_{wf}) \tag{7}$$

由式(7)和实验分别测得的基质岩块、裂缝岩块的毛管压力曲线，即可计算等效连续介质的毛管压力曲线。首先给定一个基质饱和度 S_{wm}，利用基质毛管压力曲线查出该饱和度值下

的毛管压力，根据(7)式，利用裂缝岩块毛管压力曲线确定该毛管压力值下饱和度S_{wf}，由S_{wm}，S_{wf}和基质岩块、裂缝岩块的孔隙度，可由下式计算等效介质饱和度S_w

$$S_w=\frac{S_{wm}\phi_m(1-C_d b_f)+S_{wf}\phi_f C_d b_f}{\phi_m+(\varphi_f-\phi_m)C_d b_f} \tag{8}$$

这样得到等效介质毛管压力曲线的一组数据，沿S_{wm}从最小值到最大值的方向重复上述步骤，即可得到整条曲线。

等效介质相对渗透率曲线也可类似求得。给定一个基质饱和度S_{wm}，确定出S_{wf}和S_w，根据实验分别测得的基质岩块、裂缝岩块的相对渗透率曲线，由下式计算等效相对渗透率

$$k_{rw}(S_w)=\frac{K_m(1-C_d b_f)k_{rwm}(S_{wm})+K_f C_d b_f k_{rwf}(S_{wf})}{K} \tag{9}$$

$$k_{ro}(S_w)=\frac{K_m(1-C_d b_f)k_{rom}(S_{1m})+K_f C_d b_f k_{rof}(S_{1f})}{K} \tag{10}$$

通过以上分析可知，如已知基质和裂缝性岩心的孔隙度、渗透率、毛管压力和相对渗透率曲线，可通过以上方法求出等效连续介质的孔隙度、渗透率、毛管压力及相对渗透率曲线，利用这些参数，便可以利用连续介质力学的理论求解裂缝性砂岩油藏的渗流问题。

3 低渗裂缝性砂岩油藏流固耦合渗流的数学模型的建立

3.1 低渗裂缝性砂岩油藏渗流场的微分方程

由渗流力学的有关理论，将上述方法得到的等效参数代入，便可以得到低渗裂缝性砂岩油藏渗流的数学模型。主要包括如下几组方程

(1) 油组分方程

$$\nabla\cdot\left[\frac{K_{ij}k_{ro}}{B_o\mu_o}(\nabla P_o-\rho_o g\nabla D-TPG)\right]+\frac{q_O}{\rho_{OS}}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right) \tag{11}$$

(2) 气组分方程

$$\nabla\cdot\left[\frac{K_{ij}k_{rg}}{B_g\mu_g}(\nabla P_g-\rho_g g\nabla D-TPG)+\frac{R_{So}Kk_{ro}}{B_o\mu_o}(\nabla P_o-\rho_o g\nabla D-TPG)\right]+$$

$$\frac{q_G}{\rho_{GS}}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi\left(\frac{S_g}{B_g}+\frac{R_{So}S_o}{B_o}\right)\right] \tag{12}$$

(3) 水组分方程

$$\nabla\cdot\left[\frac{K_{ij}k_{rw}}{B_w\mu_w}(\nabla P_w-\rho_w g\nabla D-TPG)\right]+\frac{q_W}{\rho_{WS}}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right) \tag{13}$$

(4) 辅助方程

饱和度约束方程

$$S_o+S_g+S_w=1 \tag{14}$$

毛管压力方程

$$P_{cgo}=P_g-P_0,\qquad P_{cow}=P_o-P_w \tag{15}$$

以上式子中：K_{ij}为各向异性绝对渗透率；B为体积系数；μ为黏度；k_r为相对渗透率；S为饱和度；下标：o，g，w分别代表油、气、水。R_{so}为溶解油气比；D为海拔深度；ρ

为密度；ρ_{Gs} 为标况下气的密度；q_G 为标况下气的产量；g 为重力加速度；ρ_{Os} 为标况下油的密度；q_O 为标况下油的产量。式中：ρ_{Ws} 为标况下水的密度；q_W 为标况下水的产量；TPG 为低渗透介质渗流时的启动压力梯度。

3.2 流固耦合渗流油藏岩土变形场方程

将油藏岩土视为弹塑性介质，根据弹塑性力学的有关理论，可以得到油藏岩土变形场的数学方程。变形场方程包括以下三组：

(1) 平衡方程

根据有效应力原理，可得用有效应力表示的平衡方程

$$\sigma'_{ij,j} + (\alpha P \delta_{ij})_{,j} + f_i = 0 \tag{16}$$

式中：σ'_{ij} 为有效应力张量；α 为 Biot 系数；δ_{ij} 为 Kronecker 函数；f_i 为体积力载荷。

(2) 几何方程

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{17}$$

式中：ε_{ij} 为应变张量；u 为位移

(3) 本构方程

变形场本构方程采用弹塑性本构方程，本构方程的增量形式为

$$\{d\sigma'_{ij}\} = [D_{ep}]\{d\varepsilon_{ij}\} \tag{18}$$

式中：$d\sigma'_{ij}$ 为有效应力增量；$[D_{ep}]$ 为弹塑性矩阵；$d\varepsilon_{ij}$ 为应变增量。

以上方程构成了低渗透储层流固耦合渗流的数学模型。对于特定问题，补充其相应的定解条件后，便得到完整的流固耦合渗流数学模型。

4 低渗透油藏流固耦合渗流模型的数值解法和程序设计

对于岩土变形场，采用有限元方法计算。计算时选用空间八节点等参数单元进行离散。弹塑性处理采用初应力法。孔隙压力 p 作为均布体积力处理。渗流模型的求解采用常规的 IMPES 差分解法，即隐式求解压力方程，显式求解饱和度。该流固耦合模型求解的总体方案是显式迭代求解。渗流场的求解先于岩土变形场，采用有限差分法计算渗流场后，把所得孔隙压力增量传递给岩土变形场，岩土变形场采用有限元方法求解，利用所得的应力结果修正渗透率和孔隙度，然后进行下一时间步的计算，如此迭代，直到结束。

5 实例计算

根据上面的数学模型及解法，我们编制了计算低渗透油藏流固耦合渗流的程序。渗流计算程序是在原黑油模型的基础上改造而成的，变形场计算程序是在三维 8 节点弹塑性有限元程序的基础上改造的，两部分程序通过耦合关系(1)相联系。为检验本文的应用效果，对一口井采用衰竭式开采时的情况进行了数值模拟，并和不考虑变形时的黑油模型计算的结果进行了对比。产油井的工作制度为定压生产，其井底流压为 5MPa。计算之前，先对实验室测得的裂缝和基质性岩心的孔隙度、渗透率及相对渗透率数据进行等效处理，得到模拟时所用的数值。然后利用编制的软件进行计算。

实验室测得模拟区块的基质和裂缝性岩心的孔隙度分别为 8%和 10%，渗透率分别为 $3\times10^{-15}\,m^2$ 和 $9\times10^{-14}\,m^2$。根据以上方法，计算出裂缝密度为 3 米/条时等效连续介质的孔隙度为 8.336%，平行裂缝方向的渗透率为 $1.46\times10^{-14}\,m^2$，垂直裂缝方向的渗透率为 $3.6\times10^{-15}\,m^2$。图1，图2 分别为毛管压力和相对渗透率曲线等效处理的结果。

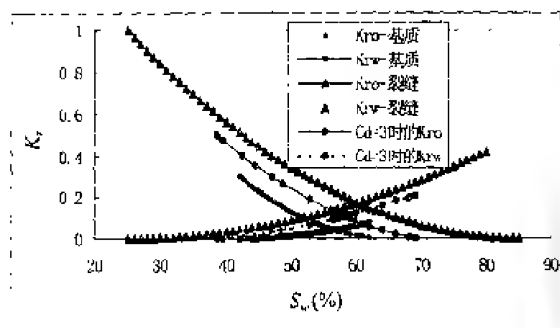


图 1　毛管压力曲线等效处理的结果

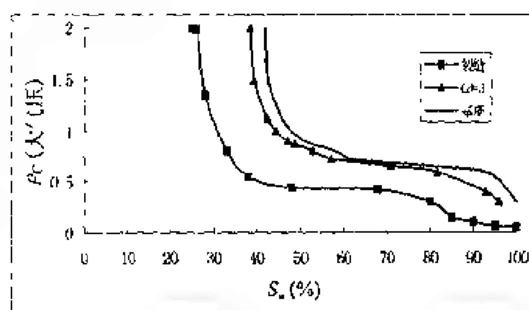


图 2　相对渗透率曲线等效处理的结果

模拟结果如图 3~6 所示。从图中可以看出，考虑耦合时油藏平均压力下降慢，采出程度较黑油模型低。这主要是由于低渗透油藏的塑性变形引起的。和中高渗透储层相比，低渗透油藏流固耦合效应非常明显。这说明在低渗透油藏数值模拟中，考虑流固耦合效应十分必要。

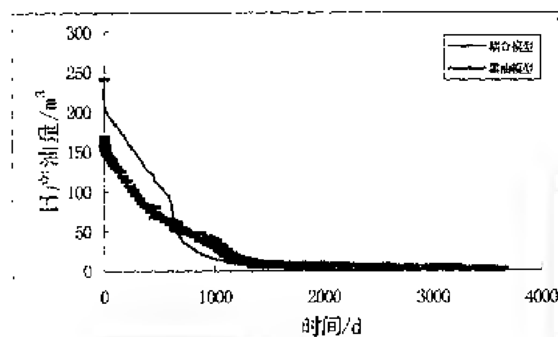


图 3　日油产量随生产时间变化曲线

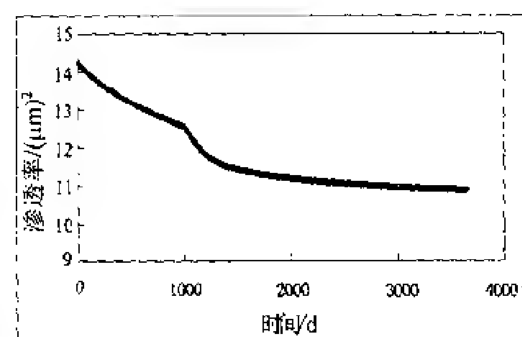


图 4　渗透率随生产时间的变化关系

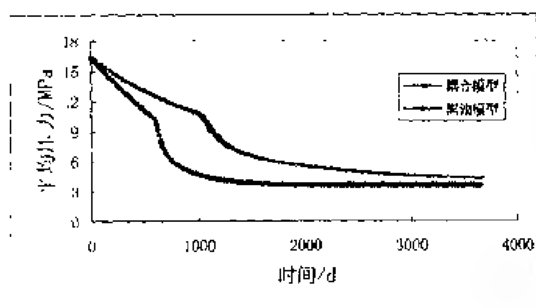


图 5　油藏平均压力随与生产时间的关系

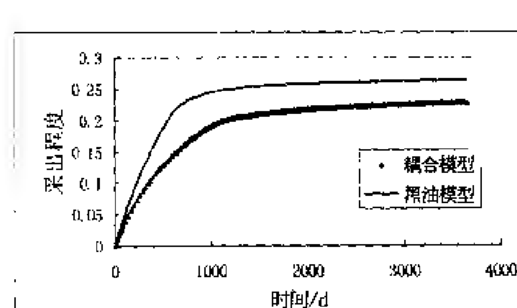


图 6　采出程度与生产时间的关系

参 考 文 献

1　Desa CS. Flow through porous media. Numerical Methods in Geo-technical Engineering. NewYork：McGraw-Hill，1977

2　Tortike WS，Farouq Ali S M. Reservoir Simulation Integrated with Geo-mechanics，JCPT，1993，(5)：28~37

3　邢景棠，周盛，崔尔杰. 流固耦合力学概述. 力学进展，1997，27(1)：19~38

4　J Bear 著，李竞生，陈崇希译. 多孔介质流体动力学. 北京：中国建筑工业出版社，1982

5　赵阳升. 有限元法及其在采矿工程中的应用. 北京：煤炭工业出版社，1993

6　刘建军，刘先贵. 煤储层流固耦合渗流的数学模型. 焦作工学院学报，1999，19(6)：391~395

7　刘建军，刘先贵等. 裂缝性砂岩油藏渗流的等效连续介质模型. 重庆大学学报，2000，21(增刊)：263~267

8　刘建军. 低渗透储层流固耦合渗流规律研究. 见：白以龙主编. 力学 2000. 北京：气象出版社，2000. 397~398

9　仵彦卿. 岩体水力学导论. 成都：西南交通大学出版社，1995

挟带细沙运动的方腔环流 [1)]

詹杰民

（中山大学应用力学与工程系，广州 510275）

摘要　用直接估计控制容积内颗粒的总量，来准确求出颗粒的浓度的方法[1]，结合颗粒的动量方程及水的连续性与动量方程，以 68μm 的细沙为研究对象，研究了方腔内顶盖拉动下的受驱环流特征。当方腔内无沙时，得到的结果与用流函数涡量法的结果完全一致，从而说明了流相数值求解过程的准确性。当方腔内沙的浓度较稀时(10^{-4})，颗粒相主要起了阻尼减速作用，随着浓度增大，浮力起了重要的作用，从而增加了流态的复杂性。本文首次发现了两相流的方腔双胞环流现象。

关键词　液-固两相流，方腔受驱环流，浮力效应

引　言

在自然界或工程实际中，流体-颗粒湍流现象是普遍存在的，如水中泥沙的运动，液力输送，污染物的水中运动等，这里流动涉及到颗粒之间，或颗粒液体之间的相互作用，过程非常复杂。因此研究液体-颗粒湍流流动具有重要的实际意义。目前，在国际上，在研究液固两相流动时，对于固相的处理，通常利用轨迹法(Trajectory)和双流体(Two-fluid)公式，而对于液相(连续相)，如果是层流，可用常见的 N-S 方程形式，如果是湍流，则可利用 k-ε 模式，大涡模拟模式或直接数值模拟方法等方法[1]。

数值模拟是重要的研究方法[2]，但要使数值模式能正确反映实际的液体-颗粒两相流动状况，实验也是必不可少的[3]。例如，群沙入水的实验研究和数值模拟，可以追溯到 Nakatsuji 等[4]和 Li 等[5]的工作。Nakatsuji 等发现：如果颗粒团的初始容积相对较大，而颗粒尺度相对较小，颗粒团的动态可以比拟为热运动；颗粒团的容积相对较小，且颗粒的沉淀速度相对较大，则颗粒将相对独立地运动，且该运动由作用于每个颗粒的拖曳力和浮力之间的平衡所控制。究竟浮力对颗粒的规律运动产生怎样的影响，本文将进行初步探讨。

1　液相与固相的控制方程

本文所用的控制方程与文[2]中基本相同，这里简要介绍：

1.1 液相

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\theta_f \boldsymbol{u}_f\right)=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\left(\theta_f \boldsymbol{u}_f\right)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\theta_f \boldsymbol{u}_f \boldsymbol{u}_f\right)=-\frac{1}{\rho_f}\nabla P-\mu_f\nabla^2\cdot\left(\theta_f \boldsymbol{u}_f\right)\frac{1}{\rho_f}\boldsymbol{F}+\theta_f \boldsymbol{g} \tag{2}$$

---

1)　国家自然科学基金(No. 19802023)，广东省自然科学基金博士启动基金(No. 984140)资助项目

F 为流体与颗粒间单位体积的动量交换率。方程(2)与文[2]和[6]中所用的方程的主要差别在于方程(2)中保留了黏性扩散项，当考虑边界层的影响或流速不太高时，该项的作用不能忽略。

1.2 颗粒相

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_p}{\mathrm{d}t}=D_p\left(\boldsymbol{u}_{f,p}-\boldsymbol{u}_p\right)-\frac{1}{\rho_p}\nabla P+\boldsymbol{g}-\frac{1}{\theta_p\rho_p}\nabla\tau \tag{3}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{u}_p/\mathrm{d}t$ 为颗粒的加速度，阻力系数 $D_p=C_d\dfrac{3}{8}\dfrac{\rho_f}{\rho_p}\dfrac{\left|\boldsymbol{u}_f-\boldsymbol{u}_p\right|}{r}$，其中

$$C_d=\frac{24}{Re}\left(\theta_f^{-2.65}+\frac{1}{6}Re^{\frac{2}{3}}\theta_f^{-1.78}\right) \tag{4}$$

雷诺数定义为

$$Re=2\rho_f\left|\boldsymbol{u}_f-\boldsymbol{u}_p\right|r/\mu_f \tag{5}$$

由上式知，小颗粒较大颗粒具有大的阻力值。

颗粒间的碰撞由颗粒间应力描述

$$\tau=\frac{P_s\theta_p{}^{\beta}}{\theta_{cp}-\theta_p} \tag{6}$$

P_s 为具有压力单位的常数，θ_{cp} 为紧致颗粒体积含量，$2\le\beta\le5$。

单个颗粒液相与固相间的相互作用的相间动量转换表示

$$D_p\left(\boldsymbol{u}_{f,p}-\boldsymbol{u}_p\right)-\frac{1}{\rho_p}\nabla P \tag{7}$$

将单元内所有颗粒的液相与固相间相互作用力叠加起来就可得到 $\boldsymbol{F}$ 力。

2 算法、算例和讨论

文[2]在采用质点网格方法进行求解时，不再将颗粒团简单地视为没有大小质点，而是利用 Lagrange 方法直接追踪颗粒团位置后，准确计算出每个颗粒团在不同控制容积内所在点的比例，从而正确计算出控制容积内颗粒的总量，即准确求出颗粒的浓度。这样做，避免了 Snider 等[6]采用双线性插值进行两相间的映射时，产生的极为庞大的计算量，同时 Snider 等方法还难以推广到高阶精度。因此，本文继续采用文[2]的基本方法。然而，由于方法涉及到在中等雷诺数(Re=2500)下在方腔四壁将出现的速度变化较大的边界层，本文将方法进一步推广到非均匀网格，在不改变总网格数的情况下，通过加密固壁边界附近的网格来提高计算精度，效果相当令人满意。限于篇幅，非均匀网格下的计算方法的细节将另文介绍。表 1 给出了计算时所选用的主要参数，其中选用 0.1681 的顶盖拖动速度可以使对应的雷诺数为 Re=2500，从而方便于与单相流的结果相比较。

为了保证结果的正确性，首先进行的计算是针对单相流做的验证性计算，此时，Re=5000，网格为 100×100。结果如图 1 示，流线部分是笔者用过去编写的流函数涡量法程序得到的[7]，可以看出两者完全吻合，从而证明了本文方法在流相计算方面是准确有效的。进一步，笔者计算了 Re=2500 下，挟带细沙运动的方腔两相环流，结果如图 2，图 3 所示。选

用雷诺数 2500 来进行研究，是由于如果仍用 Re=5000 和 100×100 的液相网格，相应的颗粒团数起码要达到约 10^5，才能较准确模拟两相环流，这样的计算量是非常庞大的，因此本文选用较低的雷诺数来进行初步的研究。

表 1　参数表

颗粒团数	14400	重力加速度 (m/s²)	9.8
顶盖拖动速度	0.1681	x 方向网格数	40
颗粒半径(μm)	68	y 方向网格数	40
颗粒密度(kg/ m³)	2420	宽 (cm)	100
流体密度(kg/ m³)	992	长 (cm)	100
P_s (pa)	75	流体黏度 (kg/m·s)	0.0667
β	3	θ_{cp}	0.7

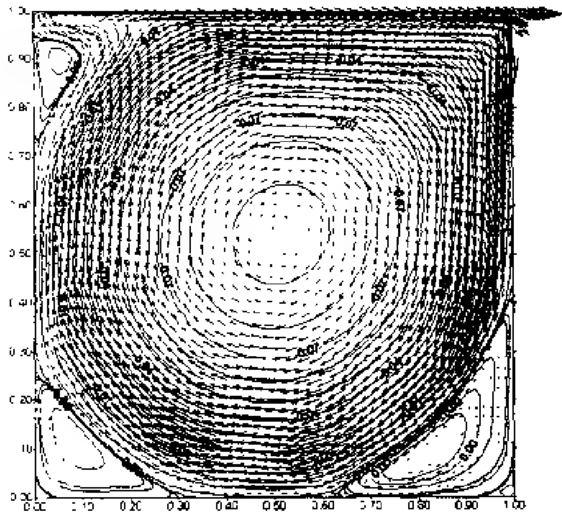


图 1　Re =5000 的单相方腔环流

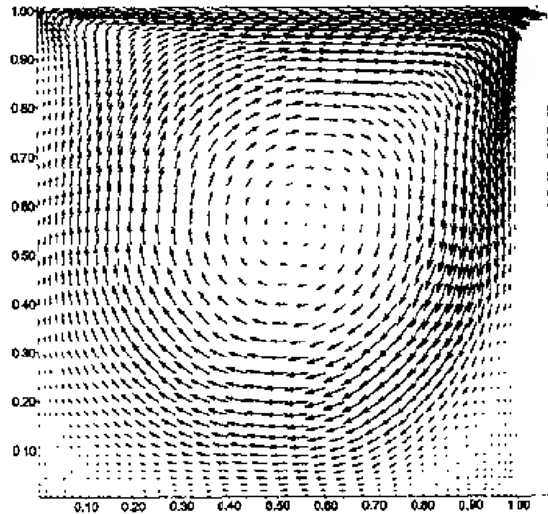
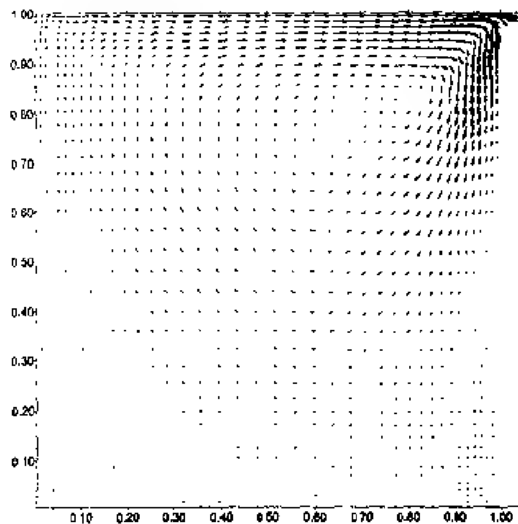


图 2　Re =2500 的单相方腔环流

为了便于对比，依然给出单相的方腔环流，如图 2 示。结果同样令人满意。图 3 所示的是流场内颗粒浓度为 10^{-4} 时的方腔环流，在初始时刻，除了顶盖拖动外，其余地方流体和颗粒均静止，颗粒以 10^{-4} 的浓度均布在整个方腔，虽然颗粒浓度较低，但影响不小。与单相情形相比，颗粒的阻尼效应相当明显，环流的强度大大减弱了。进一步增加颗粒浓度，流态不再是我们熟悉的环流形态。如图 4 所示，当颗粒浓度为 10^{-3} 时，基本的流动形态是接近于对称的，双胞环流。为了较清晰地观察流场结构，画矢量图时，图 4 的尺度比图 3 放大了一倍。由于边界条件并不对称，右胞逆时针环流与顶盖顺时针驱动条件的相互作用使得右上角形成了二次涡结构。产生这样的双胞结构的动力机制是什么？笔者认为，是浮力与顶盖驱动条件共同作用的结果。我们知道，当没有顶盖驱动条件时，颗粒将自由落下，流体将向上浮起[2, 6]，颗粒浓度越大，浮力越大。当浓度较小时，浮力只是起到阻尼作用，还不足以改变环流的基本形态；当浓度较大时，左边的顺时针向上流动与顶盖驱动条件是相协调的，但右

边的逆时针向上流动与顶盖驱动条件则不协调，相互作用的结果是环流不能再保持低浓度时或单相流时的结构，而是形成了较复杂的双胞结构。



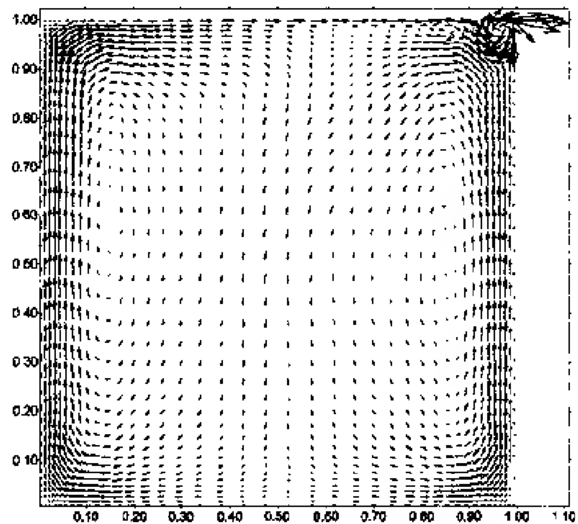


图 3 *Re* =2500 颗粒浓度为 10^{-4}的方腔环流

图 4 *Re* =2500 颗粒浓度为 10^{-3}的方腔双胞环流

因此，在研究液体颗粒两相流时，如果颗粒浓度较大，要准确模拟实际的流态和颗粒浓度分布，必须考虑流相与固相的耦合作用过程。

参 考 文 献

1 Crowe CT，Troutt TR and Chung JN Numerical models for two-phase turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*，1996，28：1~43

2 徐杰民，吴存亮，孙明光. 直接数值模拟液体颗粒两相流的关键——颗粒的准确追踪. 见：刘人怀主编，应用力学研究与实践，2000，77~82

3 徐杰民，李航准. 湍急入水泥沙的动态研究. 机械工程应用，专刊，2000

4 Nakatsuji K，Tama，M and Murota A. Dynamics behaviours of sand clouds in water *Int Conf on Phys*，Modelling of transport and dispersion，MIT Boston，1990，C 1-C.6

5 Li CW Convection of particle thermals. *Journal of Hydraulic Research*，1997，15 (3)：363~376

6 Snider DM，O'Rourke PJ and Andrews MJ. Sediment flow in inclined vessels calculated using a multiphase particle-in-cell model for dense particle flows. *International Journal of Multiphase Flow*，1998，24：1359-1382

7 Li YS，Zhan JM，Sun MG. Matching boundary-fitted grid generation to physical boundary conditions with applications to natural convection problems. *Numerical Heat Transfer*，Part A，1998，33：621~634

泡沫在多孔介质中的流动规律及其数值模拟

程　浩　郎兆新

（石油大学石油工程系，北京昌平 102200）

摘要　针对泡沫在三次采油中的应用，研究了泡沫在多孔介质中的产生和破灭机理；泡沫在多孔介质中的流动规律(流动方式、流速和干度等因素对泡沫流动的影响、选择性渗透率降低)。通过大量的实验调查和理论研究，提出了泡沫驱合理的物理模型和数学模型，并得出了模拟结果。

关键词　泡沫，多孔介质，提高采收率，数值模拟，流动规律

前　言

气驱中经常遇到的问题就是由气体指进、气体沿高渗带的窜流以及重力超覆引起的气驱扫效率低。为解决此问题，人们开始重点研究泡沫。基本思想就是：当气体以泡沫状分散在液体中时，气体的流度会降低，随水注入的表面活性剂可以稳定液膜，液膜起到滞留气体的作用，从而降低气体的流度，调整驱替剖面。成泡以后，气体分散在液体中，水相是连续相，而液膜则使部分气相成为非连续相。

1　泡沫在多孔介质中的流动

1.1 泡沫的产生和破灭

泡沫的产生有三个机理：液膜遗留、气泡截断和液膜分割[1]。当气体流速大于临界流速时，以截断和液膜分割的机理生成流动液膜；当气体的流速低于临界流速时，由遗留机理生成静止泡沫。在所有的机理中，截断是主要的机理。

泡沫由于液膜排液和气体的透过会破灭、聚并，此现象可以用 DLVO 理论解释。毛管压是使液膜变薄的作用力，与其平衡分离压。分离压是范德华力（吸引力）和静电力（双电层排斥力）作用的结果。当毛管压大于最大分离压时，液膜变薄、破裂。此外，油相的存在使泡沫不稳定，原因主要是油在气/水界面铺展，导致液膜变薄，降低了破裂的临界毛管力；其它原因还有油占据了气/水界面上表面活性剂的位置、表面活性剂向油相中的分配、油/水微乳液的形成消耗了表面活性剂以及拟乳化膜的破灭等等。

1.2 流动方式

对于水湿介质，流动泡沫在大孔道中存在，被捕集气体存在于中间尺寸的孔道中，而水相在小孔道中流动。

1.3 泡沫在孔隙介质中流动的初步规律

1.3.1 流速的影响

多数研究结果表明，压力梯度与气相流速无关，与液相流速成正比[2~4]。流度随气相流速的增加而增加，随液相流速的增加而降低。总的来说，泡沫还是剪切变稀的。

1.3.2 干度的影响

关于泡沫干度和泡沫流度的关系也开展了研究，但结果不一[3]。有必要提出一个合理的模型将貌似矛盾的结果统一起来。

1.3.3 选择性流度降低[5]

泡沫不但能降低气相流度，而且在一定条件下高渗岩心的流度下降要比低渗岩心中的流度下降厉害，即流度并不与岩心渗透率成正比，泡沫在给定压力梯度下在高渗岩心中的流度要比预期的低，泡沫的这种特性被称为选择性流度降低。泡沫具有一定的调适能力。

2 泡沫在孔隙介质中流动的统一模型

2.1 高干度区

高干度区泡沫的流动受临界毛管力控制。表面活性剂的稳泡作用很重要。

临界毛管力时，气体流度可由达西定律得知

$$\frac{k_{rg}}{\mu_g}=\frac{u_g}{u_w}\frac{k_{rw}(S_w^*)}{\mu_w} \tag{1}$$

气水同时注入时，压力梯度∇P可由S_w^*，从而由临界毛管力决定

$$\nabla P=-u_w\mu_w/kk_{rw}(S_w^*) \tag{2}$$

式中：k—绝对渗透率，k_{rg}，k_{rw}—气相、水相相对渗透率，μ_g，μ_w—气相、水相黏度，u_g，u_w—气相、水相达西流速，S_w^*—临界含水饱和度。

在聚并区，通过改变气相流速增加气体干度将导致泡沫结构变粗，而毛管力维持在临界毛管力附近，由上面两式知泡沫流度增加而压降不变；压降与液相流速成正比，与气相流速无关。泡沫流度与气相流速成正比，与液相流速成反比。

临界毛管力与表面活性剂类型和浓度、含盐度、渗透率和气相流速有关[6]。表面活性剂浓度增加，双电层排斥力增大，最大分离压力（从而临界毛管力）增大。渗透率上升，临界毛管力下降，泡沫更容易破裂。这是由于渗透率升高，流动泡沫所受到的扰动力变大，导致泡沫不稳定。在高干度区，气相流速增加，并保持液相流速不变，泡沫结构变粗，泡沫流度变大而压降保持不变。气相流速增加，临界毛管力下降。

2.2 低干度区

与高干度区不同，泡沫的结构不会发生大的变化，基本保持在孔隙尺寸大小左右，泡沫结构与气体流速和液体流速均无关。由于泡沫大小基本为孔隙大小，不会由分割和截断机理生成新的气泡。对于那些尺寸较小的气泡，由于气体从液膜表面透过，小气泡合并成孔隙尺寸大小的气泡。这样，低干度区泡沫的流动可以用屈服假塑性流体来模拟。只有当压力梯度超过屈服值时泡沫才会流动。圈闭在小孔中的泡沫相对于大孔中的泡沫不易流动。压力梯度与气体的圈闭和孔隙的毛管阻力有直接的关系。此时，表面活性剂的稳泡性能显得不是很重要，起重要作用的是岩石的孔隙结构。低干度区压降与气体流速成正比而与液相流速无关。气体流速增加可能导致圈闭气体量增加，从而压降增加，而液体流速在此过程中则不起作用。

3 泡沫驱的数值模拟

要想从机理上模拟泡沫在孔隙中的流动，必须考虑泡沫的结构，因此总量平衡模型是首选。总量平衡的思想类似于组分质量守恒原理。总量平衡模型通过流动气泡的密度和静止气泡的密度（单位体积中泡沫的个数）来表述气泡的个数和尺寸，并通过气泡的密度来影响泡沫的视黏度。考虑泡沫对气相相对渗透率和视黏度的影响。第一种情况下，静态泡沫液膜阻挡了气体流通的孔隙喉道；第二种情况下，气泡在孔隙中流动，此时泡沫的流动特性由泡沫流变性、泡沫生成、圈闭、聚并等机理控制。先计算流动气泡密度，再修正流动气泡的流度。

3.1 数学模型

总量平衡方程用来计算流动气泡和静态气泡的平均密度[4]。其表达式为

$$\frac{\partial}{\partial t}[\phi S_g X_f n_f+\phi S_g X_t n_t]=\nabla\cdot[n_f\vec{u}_f]+q_f+\hat{n}_f\hat{q}_g \tag{3}$$

式中：ϕ—孔隙度；S_g—气饱和度；n_f—流动气泡的平均密度；n_t—捕集气泡的平均密度；

X_f—流动气体的分流量；X_t—捕集气体的分流量；q_f—泡沫的生成和聚并项；$\hat{q}_g$—气体注入（产出）速率；$\hat{n}_f$—井点处流动泡沫密度；

泡沫的生成和聚并项用下式表达

$$q_f = \begin{cases} \phi S_g \left[k_1 v_w v_f^{1/3} - k_{-1} v_f n_f \right] & \text{当} v_f \geq v_c \text{时} \\ 0 & \text{当} v_f < v_c \text{时} \end{cases} \tag{4}$$

式中：k_1—泡沫生成速度常数；k_{-1}—聚并速度常数；v_c—临界流速。聚并速度常数为

$$k_{-1} = k_{-1}^0 \left(\frac{P_c}{P_c^* - P_c} \right)^2 \tag{5}$$

临界毛管力的表达式为

$$P_c^* = P_{c,\max}^* \tanh\left(\frac{C_s}{C_s^0} \right) \tag{6}$$

式中：C_s，C_s^0—水相表面活性剂浓度及浓度参考值；$P_{c,\max}^*$—最大临界毛管力。

气相相对渗透率为

$$k_{rf} = \begin{cases} \dfrac{k_{rg}}{1 + bS_g} & \text{当} v_f < v_c \text{时} \\ k_{rg}(S_f) & \text{当} v_f \geq v_c \text{时} \end{cases} \tag{7}$$

泡沫的黏度为

$$\mu_f = \mu_g + \frac{\alpha n_f}{v_f^{1/3}} \tag{8}$$

式中：v_f—气相真实流速；α—与表面活性剂结构和浓度有关的黏度系数。

与气泡的被捕集有关的式子为

$$X_t = X_{t,\max} \left(\frac{\beta n_t}{1 + \beta n_t} \right) \tag{9}$$

静止气泡与流动气泡的平衡关系为

$$n_t = \frac{K_f A_f n_f}{1 - K_f n_f} \tag{10}$$

(7)，(9)，(10) 式中 b，β，K_f，A_f为经验常数，由实验测定。

3.2 求解方法

先用隐式方法求解压力，再用显式方法同时求解组分的浓度和泡沫平均密度，然后根据泡沫的密度以及气相、液相真实流速修正气相的黏度和相对渗透率，再进入下一步计算（类似于 IMPES 方法）。为了控制数值弥散，在本泡沫模拟器中采取了灵活的自动时间步长方法以及多种数值弥散控制方法，包括组分浓度、泡沫平均密度以及相对渗透率的单点上游权法、两点上游权法、Chaudhari 方法、Leouard 三阶方法等。

3.3 数值模拟结果

岩心长 0.9m，横截面积 0.01m^2，孔隙度 0.25，渗透率 500md，在环压 4.8MPa 下向饱和地层水的岩心中同时注入 0.37%（重量百分比）的表面活性剂溶液和氮气，液相达西流速为

0.22m/d，气相达西流速为 0.89m/d，注入气体干度为 80%。为了单独检验泡沫的产生、聚并和传输过程，以及气相流度的降低，按照惯例[4]，模拟计算不考虑油相对泡沫的影响，只存在气、水两相，初始 S_w=1。相关的物性参数见表 1（参照 Kovscek 等[4]的数据）。

表 1　单管岩心驱替模拟参数

物性参数		泡沫参数	
k_{rw}^0	0.7	k_1	$6.6\times10^{13}s^{1/3}m^{-13/3}$
k_{rg}^0	0.3	k_{-1}^0	$1.7m^{-1}$
S_{wc}	0.2	$P_{c,max}^*$	30KPa
μ_g	0.018MPa·s	α	$2.0\times10^{-15}Pa\cdot s^{2/3}m^{\cdot 0/3}$
μ_w	1.0MPa·s	β	$1.0\times10^{-9}m^3$
ϕ	0.25	$X_{f,max}$	0.9

以下各图中注入时间以孔隙体积的倍数（PV）表示，距离以距离分数（x/L，岩心某点到岩心入口的距离与岩心长度之比）表示。图 1 为含水饱和度随注入量的变化，泡沫驱动类似于活塞式驱动。在前缘之前含水饱和度约为 0.3，前缘之后为 1.00，数值弥散控制得比较好。图 2 和图 3 分别为水相压力和流动泡沫密度的变化图。图 3 表明，在入口不远处即开始净产生泡沫，在表面活性剂溶液与地层水混合带的前缘，泡沫个数达到峰值；混合带中表面活性剂浓度变稀，泡沫部分破灭；在含水饱和度为 1 处完全不存在泡沫。从压力变化图中也可以看出入口处为泡沫净生成区，表现为：入口处压力梯度较小，随着泡沫的生成，压力梯度变大，至稀释带随着泡沫的破灭和聚并压力梯度重新变小。总的结果是含水饱和度小时，泡沫密度大，压力梯度大。入口处刚开始形成泡沫，含水饱和度比前缘之前的含水饱和度平均值 0.3 稍高。

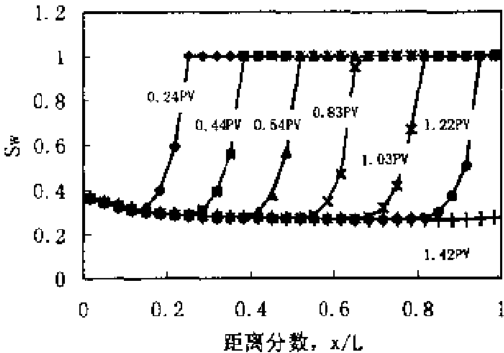


图 1　含水饱和度变化

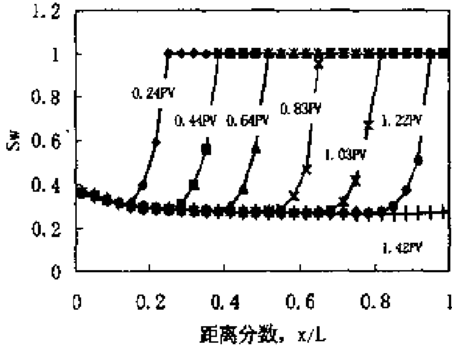


图 2　水相压力变化

对有油存在时油的消泡作用是通过与含油饱和度有关的消泡系数来体现的。图 4 为氮气和表面活性剂溶液同时注入含油饱和度为 0.4 的岩心中时流动泡沫密度的变化。有油时，泡沫结构变粗，泡沫密度变小；与油接触，泡沫部分消失，但仍能产生一定量的泡沫。

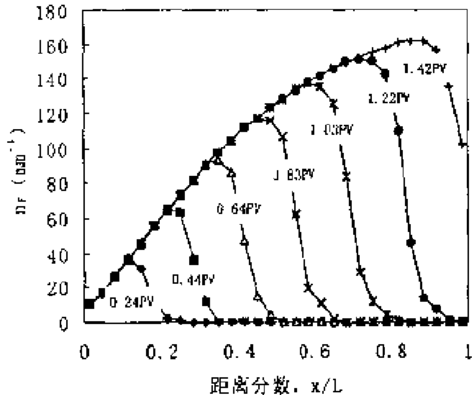


图 3　流动泡沫密度变化（无油时）

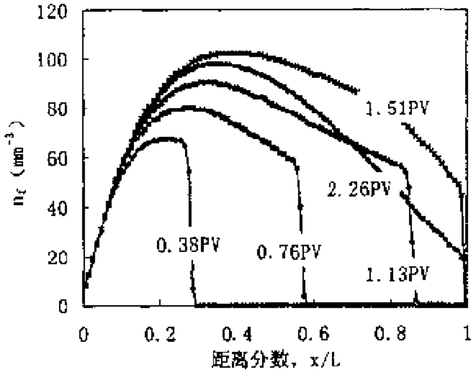


图 4　流动泡沫密度变化（有油时）

4 小 结

(1) 泡沫的产生机理有截断、液膜分割和液膜遗留，其中以截断机理为主：泡沫破裂主要是由液膜排液引起。

(2) 孔隙介质中泡沫在大孔道中存在，被捕集气存在于中间尺寸的孔道中，而水相在小孔道中流动；泡沫为屈服假塑性流体。

(3) 高干度时泡沫的流动受临界毛管力控制，稳态流动压降与气相流速无关而与液相流速成正比。低干度区压降与气体流速成正比而与液相流速无关，泡沫流动特性与岩石的孔隙结构有很大的关系。

(4) 可以用一个统一模型描述高干度和低干度泡沫在多孔介质中的流动。

(5) 用总量平衡模型对泡沫在多孔介质中的流动进行数值模拟，本泡沫驱模拟器可以反映出泡沫的产生、聚并和运移过程。

参 考 文 献

1 Rarsohoff TC，Radke CJ Mechanisms of foam generation in glass-bead packs. SPERE，1988 May. 573~85

2 Persoff P，et al A laboratory investigation of foam in sandstone at elevated pressure. SPEJ，1991 Aug 365~72

3 Yaghoobi Hossein. Laboratory investigation of parameters affecting CO_2-foam mobility in sandstone at reservoir conditions. SPE 29168，1994

4 Kovscek AR，Patzek TW，Radke CJ Mechanistic foam flow simulation in heterogeneous and multidimensional porous media SPEJ，1997，2

5 Rossen WR，Lu Q. Effect of capillary crossflow on foam improved oil recovery. SPE38319，1997

6 Khatib ZI，Hirasaki，GJ，Falls AH Effects of capillary pressure on coalescence and phase mobilities in foams flowing through porous media. SPERE，1988 Aug. 919~26

7 李和全等. 一个气液两相泡沫驱模型. 大庆石油学院学报，1999，23(3): 15~18

8 丁争鸣等. 一个实用的注蒸汽加泡沫过程的油藏数值模型. 石油学报，1994，15(2). 99~110

液固脉冲流化床数值模拟和实验研究 1)

晋国栋　聂永生　刘大有
（中国科学院力学研究所，北京 100080）

摘要　对液固脉冲流化过程进行了数值模拟和实验研究。采用双流体模型和推广的 Slis 模型模拟了脉冲流化过程。比较了两种模型的联系与差异，得到脉冲流化过程中颗粒速度和浓度分布、压强分布和床高，以及它们随时间的变化，同时得到了脉冲流化过程中 Slis 波的传播规律。使用压力传感器测量了不同床高处压力随时间的变化，用数字摄像机记录了床面及颗粒浓度分布随时间的变化过程，与计算结果具有较好的一致性。

关键词　脉冲流化床，数值模拟，实验对比

引　言

流态化是固体颗粒在垂直向上流动的流体作用下的流动过程。流态化具有许多优点：固体物料混合良好；液固之间的相对速度较大，传质、传热效率高；固体物料易于处理等[1, 2]。流态化技术已经渗透到物质转化、能源利用、环境保护等众多领域。但长期以来，影响流化床性能的主要因素是由于气泡存在引起气固接触效率降低。人们采用各种方法，如使用特殊的分布板和挡板等，来降低气泡影响。许多研究表明引入振动或脉冲送气的方法可以大大提高流态化质量[3~6]。目前已有了许多关于脉冲流化床的实验研究，但人们对其理论上的理解还远不够深入。

近年来，我们开展了脉冲流化床研究，主要兴趣在于动力学过程与物理机理。如果脉冲频率很低，可以把整个脉冲流化过程分解为简单膨胀与简单塌落两个独立的、互不影响的过程，采用两个数学模型分别模拟它们。模拟结果与实验结果有较好的一致性[7, 8]。但是，当脉冲频率不太低时，床层尚未充分膨胀就开始塌落，尚未充分塌落就开始膨胀，床内颗粒分布很不均匀，以前的模型就不适用了。本文采用双流体模型和推广的的 Slis 模型来模拟任何频率的脉冲流化过程。

Gera[9]等用双流体模型(TFM)模拟了大颗粒流化床中的气泡。Tsuo[10]用双流体模型计算了循环流化床（CFB）中的流型。Felice & Renzo[11]用双流体模型模拟气、液、固三相系统，他们把气、液两相作为单一、均匀的流体处理。双流体模型基于把颗粒与流体作为相互渗透的广义连续介质，已由许多的学者进行了推导[12~14]。但还没有见到有关用双流体模型模拟脉冲流化过程的文献。

Slis[15]提出了计算床层简单膨胀与简单塌落过程中床面变化的简化模型，计算结果与实验符合较好，但不能用于计算脉冲流化过程。本文通过补充脉冲流化过程中颗粒浓度和颗粒速度的间断关系式来推广 Slis 模型，可用于脉冲流化过程的计算。

1　双流体模型

我们的数学模型基于以下假设：

(1) 一维流动；

(2) 两相都是不可压缩的；

(3) 所有的颗粒有相同的尺寸；

(4) 忽略颗粒的无规则运动与碰撞；

---

1) 中国科学院化工冶金研究所多相反应开放实验室与西安交通大学动力工程多相流国家重点实验室资助项目

(5) 忽略壁面阻力。

这时，固相与液相的连续性方程与动量方程分别是[16]

$$\frac{\partial \alpha_p}{\partial t}+\frac{\partial(\alpha_p u_p)}{\partial x}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \alpha_f}{\partial t}+\frac{\partial(\alpha_f u_f)}{\partial x}=0 \tag{2}$$

$$\rho_p\left(\frac{\partial(\alpha_p u_p)}{\partial t}+\frac{\partial(\alpha_p u_p^2)}{\partial x}\right)=-\alpha_p\frac{\partial p}{\partial x}-\alpha_p\rho_p g+F_p \tag{3}$$

$$\rho_f\left(\frac{\partial(\alpha_f u_f)}{\partial t}+\frac{\partial(\alpha_f u_f^2)}{\partial x}\right)=-\alpha_f\frac{\partial p}{\partial x}-\alpha_f\rho_f g-F_p \tag{4}$$

$$\alpha_p+\alpha_f=1 \tag{5}$$

$$F_p=\frac{k\mu_f}{d_p^2}\alpha_p(1-\alpha_p)^{(1-n)}(u_f-u_p)^{[17]} \tag{6}$$

其中α_p和α_f分别是固相与液相的体积分率，u_p，u_f分别是颗粒与流体的速度，ρ_p，ρ_f分别是颗粒与流体的密度，p是压力，F_p是单位体积中固相与液相间的相互作用力，μ_f为流体粘度，d_p为颗粒直径，k与n为与颗粒雷诺数有关的常数。

边界条件和初始条件表示如下，其中$h(t)$是床层高度，H_{bed}是液固流化床装置的高度(1150mm)。

$$x=0: \quad u_p(t,0)=0\,,\ \alpha_p(t,0)=1-(U/u_T)^{1/(n+1)} \tag{7}$$

$$x=H: \quad u_p=\mathrm{d}h/\mathrm{d}t \tag{8}$$

$$x=H_{\text{bed}}: \quad p=(t,H_{\text{bed}})=0 \tag{9}$$

$$t=0: \quad \alpha_p(0,x)=\alpha_p^0,\ u_p(0,x)=0,\ h(0)=h^0 \tag{10}$$

求解由方程(1)~(10)组成的方程组可以得到颗粒浓度$\alpha_p(t,x)$，速度$u_p(t,x)$和$u_f(t,x)$，压力$p(t,x)$和床高$h(t)$。

采用有限差分法解方程组。由于液-固两相流区域有一个不断移动的上边界，其上的差分节点使用拉格朗日坐标，内部差分节点使用欧拉坐标。

2 Slis 模型的推广

上节中的双流体模型在数学上是一个非经典的双曲型方程，即方程(1)~(4)组成的方程组的特征根中有两个虚部很小的复根。复特征根的出现，不仅意味着特征方法不适用，一般认为它意味着微分方程的初值问题变得不稳定了。不管用什么方法都会遇到计算不稳定的问题[16]。我们的计算实践表明，增加空间步长有利于计算的稳定，这是由于随着空间步长的增加，差分格式的数值耗散效应在起稳定作用。但这也给计算带来的误差较大，特别是入口流量变化幅度较大，脉冲频率较高时、数值误差变大。这表现为：(1)脉冲流化过程中形成的间断较实际变厚；(2) 脉冲流化过程中颗粒浓度变化幅度沿床高的衰减较实际的为快。为此我们进一步简化双流体模型，即推广 Slis 模型，来求解脉冲流化过程。同时对两种模型的结果进行比较。

首先引入颗粒弛豫时间τ和沉降速度u_T的定义

$$\tau=\frac{d_p^2\rho_p}{k\mu_f},\quad u_T=\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_p}\right)g\tau-\frac{(\rho_p-\rho_f)gd_p^2}{k\mu_f} \tag{11}$$

忽略方程（3），（4）中右边的惯性项，由方程（6）得

$$U(t)-u_p(t,x)=u_T[1-\alpha_p(t,x)]^{(n+1)} \tag{12}$$

把（12）代入（1）消去u_p，得

$$\frac{\partial\alpha_f}{\partial t}+\{[(n+1)\alpha_f^n-(n+2)\alpha_f^{n-1}]u_T+U\}\frac{\partial\alpha_f}{\partial x}=0 \tag{13}$$

得到与 Slis[15] 一样的结果。

由于脉冲流化过程中床层中有间断存在，补充如下的间断速度关系式

$$V_{\text{dis}}=\frac{(1-a_{f,f})u_{p,f}-(1-a_{f,b})u_{p,b}}{a_{f,b}-a_{f,f}} \tag{14}$$

其中$a_{f,f}$，$a_{f,b}$为间断前、后的流体相体积分率，$u_{p,f}$，$u_{p,b}$为间断前、后的颗粒的速度。

由方程（12），（13），（14）和边界条件（7）就可以求解脉冲流化过程。首先有（14）确定某时刻间断的位置，用特征线法由（13）求间断前、后和其他点的颗粒浓度，由（12）确定颗粒速度。

3 实　验

图 1 是试验装置示意图。流化床由一个内径 29mm，高 1150mm 的有机玻璃管组成，下端有一个多孔的分布板。使用四个压力传感器同时测量了不同高度的压力，压力信号经放大与 A/D 转换后由计算机采集并处理。使用数字摄像机记录床层表面的变化过程以及床内颗粒浓度的分布。用水做实验介质，所用颗粒及其性质如表 1 所示。

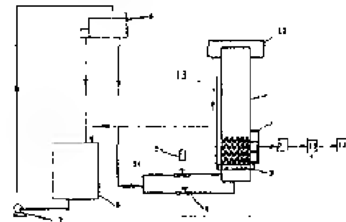


图1 实验装置图

1 流化床； 2 压力传感器； 3 分布板； 4 球形阀； 5 时间继电器与电磁阀； 6 下部水箱； 7 离心泵； 8 上部水箱； 9 放大器； 10 A/D 转换器； 11 计算机； 12 集水器；13 标尺；14 流量计

表 1　颗粒的物理性质

颗粒	d_p (mm)	ρ_p (kg/m^3)	u_T (m/s)	n
玻璃珠	1.8	2 500	0.20	1.716 5

颗粒被脉动的流体流化。进入流化床的流体有两路，一路为稳定流，另一路为脉冲流。流量随时间的变化由涡轮流量计计量，通过 A/D 转换后由计算机采集。脉冲周期、开启半周期与关闭半周期由时间继电器控制电磁阀来实现。

4 结果分析与实验对比

4.1 双流体模型模拟结果与实验对比

当来流速度发生周期性的变化，而变化的周期小于流化床充分膨胀和塌落的时间时，即床层尚未充分膨胀就开始塌落，尚未充分塌落就开始膨胀，床内颗粒分布很不均匀，就会发生脉冲流化过程。模拟结果表明，床层较矮，脉冲频率较低，脉冲流化床中高浓度区与低浓度区交替出现，具体的动力学过程分析，请参阅[18]。

为了检验数值模拟结果的有效性与否，在图（1）所示的小型流化床模型上进行脉冲流化实验，采用数字摄像机记录了床内颗粒浓度及床面的变化过程 (图 2，图 3)，用压力传感器记录了脉冲流化过程中床层内某些点的压力变化过程（图4）。

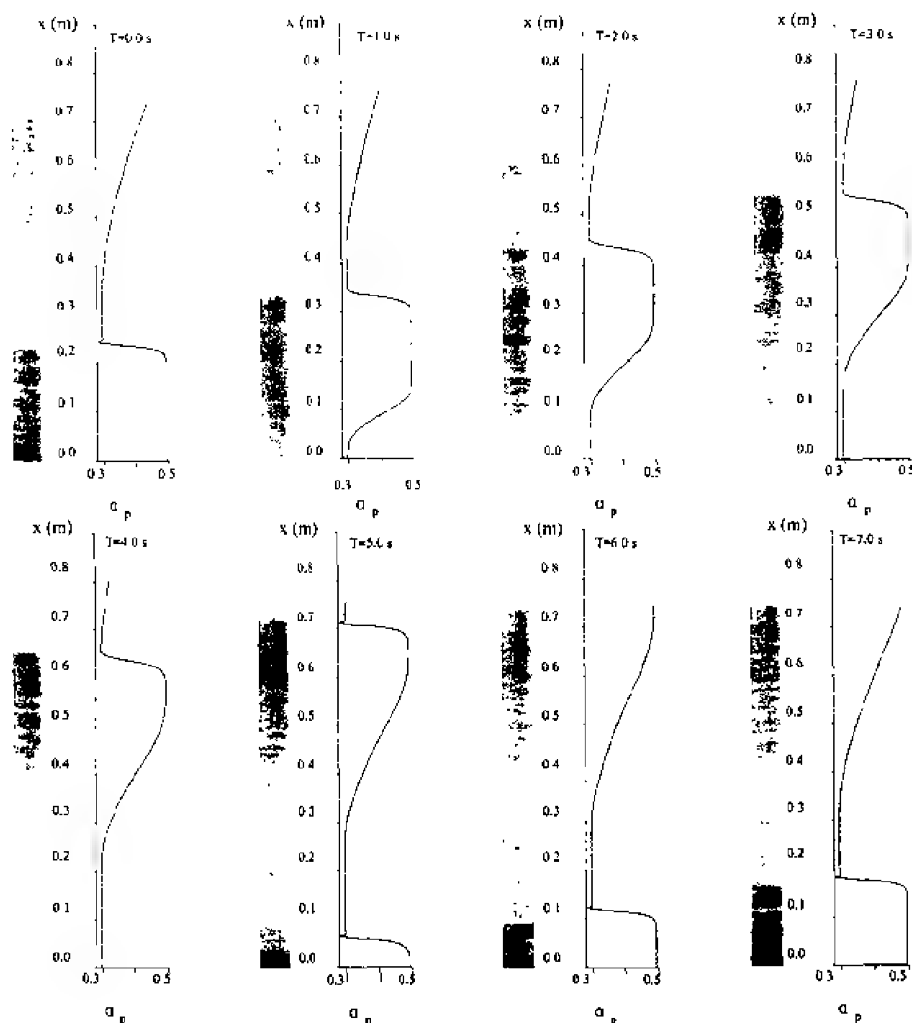


图 2 TFM 模拟床内颗粒浓度分布与实验对比图

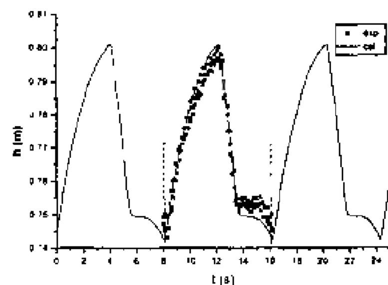


图 3 TFM 模拟床高与实验对比图

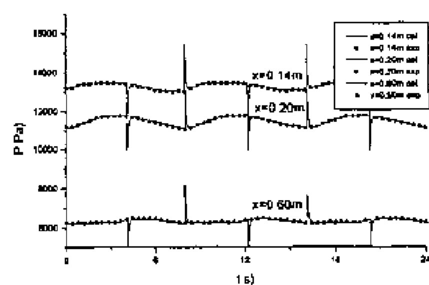


图 4 TFM 模拟压力与实验对比图

4.2 双流体模型与推广的 Slis 模型计算结果的比较

双流体模型与推广的 Slis 模型计算结果的比较见图(5)，可以看出，用双流体模型算出的结果由于数值耗散作用，衰减明显变快，二者差异显著(图 5(a))。但在床层较矮，波系还没

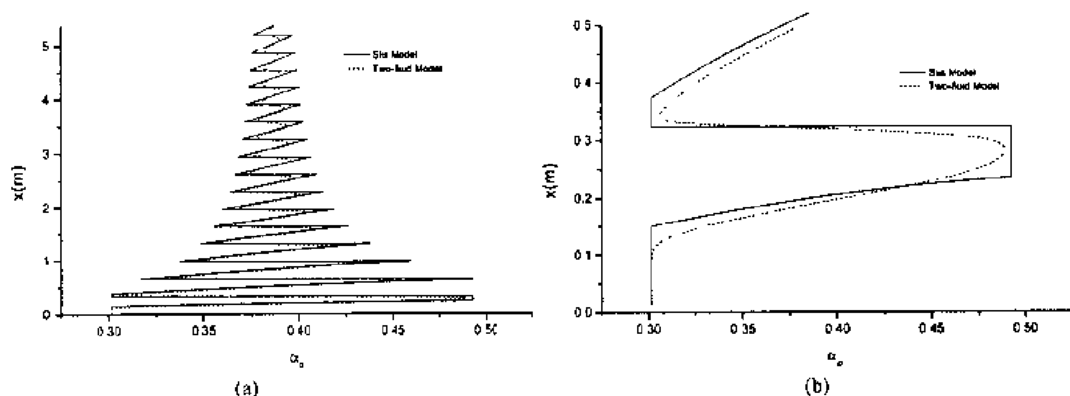
有相交时，二者的结果还是相近的(图 5(b))。在本算例中，$n=1.3$，流量$U(t)$是在U_1与U_2之间周期变化的方波，$U_1=0.034\mathrm{m/s}$，$U_2=0.073\mathrm{s}^{-1}$，$u_T=0.172\mathrm{m/s}$。由$\alpha_{p,i}=\left(U_i/u_T\right)^{1/(n+1)}$ $(i=1,2)$求得的$\alpha_{p,1}=0.493$，$\alpha_{p,2}=0.30$。采用的周期是开半周期与闭半周起分别为 2s。

4.3 脉冲流化过程中颗粒浓度变化幅度的衰减规律

当床层较高，频率较高时，由于床内波系的相互作用，沿高度方向二、三个周期以后，颗粒浓度变化的幅度呈二阶负指数方式的衰减（图 5，图 6）

$$A_{\alpha_p}=(0.9A_{\alpha_{p,0}})\exp\left(-\frac{x-x_0}{a1}\right)+(0.1A_{\alpha_{p,0}})\exp\left(-\frac{x-x_0}{a2}\right) \tag{15}$$

其中x_0是间断与膨胀波开始相交的高度，$A_{\alpha_{p,0}}$是颗粒浓度变化的最大幅度，$a1$，$a2$ 为衰减系数，其随频率的变化以负指数规律衰减如图（7）所示。其中开半周期为整个周期的 50%。



(a) (b)

图 5 脉冲流化过程中 Slis 波沿床高衰减

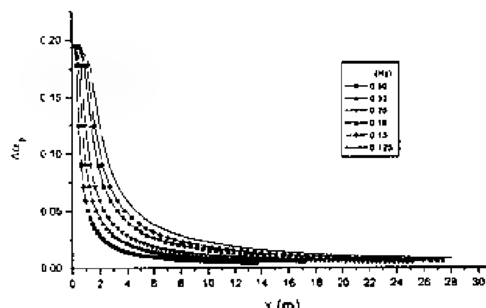
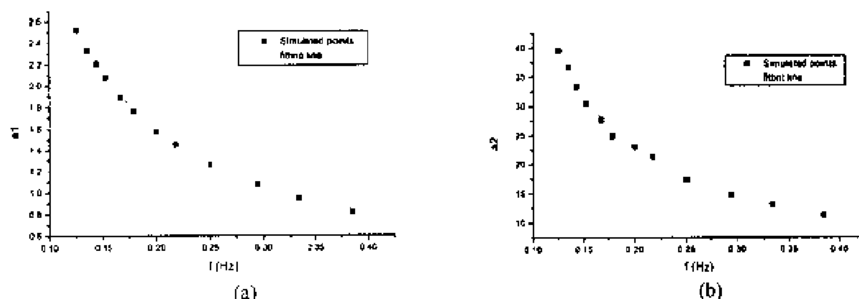


图 6 颗粒浓度变化幅度随床高的变化关系



(a) (b)

图 7 颗粒浓度变化幅度的衰减系数随频率的变化关系

可以看到，初始振幅的 90%以较快的速度衰减，初始振幅的 10%以较慢的速度衰减，振荡可以维持很高的床高。在频率为 0.1~0.4Hz 的范围内，衰减系数与频率的关系可表示为

$$a1 = 0.6937 + 5.8586\exp(-f/0.10597) \tag{16}$$

$$a2 = 10.5287 + 122.5798\exp(-f/0.0859) \tag{17}$$

4.4 Slis 波的传播速度

理论分析与数值计算表明，Slis 波以与平均入口流速及其对应的颗粒浓度在床层内传播。

$$\overline{U} = (U_1T_1 + U_2T_2)/(T_1 + T_2) \tag{18}$$

$$\overline{\alpha_p} = 1 - (\overline{U}/u_T)^{1/(n+1)} \tag{19}$$

$$\overline{V}_{\mathrm{Slis}} = [(n+1)(1-\overline{\alpha}_p)^n - (n+2)(1-\overline{\alpha}_p)^{n+1}]u_T + \overline{U} \tag{20}$$

5 结 论

(1) 本文采用双流体模型和推广的 Slis 模型模拟了脉冲流化过程，并说明了二者的联系与差异。在床层较矮，频率较高时，二者的差异不明显，双流体模型与实验结果有较好的一致性。但床层较高，频率较高时，双流体模型的计算结果与实际差异较大。这主要是由于数值粘性引起的，而推广的 Slis 模型可以克服这一缺点，由此所引入的误差相对于数值粘性的误差要小得多。这表明推广的 Slis 模型能在更广的范围模拟脉冲流化过程。

(2) 当床层较矮，频率较低时，脉冲流化床中高浓度区与低浓度区交替出现，当床层较高，频率较高时，由于床内存在波系的相互作用，颗粒浓度变化幅度呈二阶负指数方式沿床高衰减，且衰减系数随频率增加以一阶负指数方式的衰减。

(3) Slis 波以与平均流速相对应的速度传播。

参 考 文 献

1 RENZO DI FELICE. *Chemical Engineering Science*，1995，50(8)：1213

2 Needham DJ & Merkin JH *J Fluid.Mech*，1983，131：427-454

3 Wong HW，Baird MHI. *Chem Eng J*，1971，2：104

4 Kobayasni M，Ramaswami D，Brazelton WT. *Chem Eng Prog Sym Ser*，1970，66 (105)：58

5 Bhattacharya SC，Harrison D. *Instn Chem Engrs*，1976，54：281

6 Baird MHI. *British Chem Eng*，1966，11 (1)：20

7 聂永生. 博士论文，中国科学院力学研究所，1998

8 Nie Y，Liu D *Powder Technology*，1998，99：132

9 Gera D et al. *Powder Technology*，1998，98：38

10 Tsuo YP and Gidaspow D. *AIChE J*，1990，36(6)：885

11 Felice D，Renzo. *Chemical Engineering Science*，2000，55 (18)：3899

12 Murry JD. *J Fluid Mech*，1965，21：465

13 Garg SK，Pritchrtt JW. *J Appl Phys*，1975，46：4493

14 Homsy GM et al. *Int J Multiphase Flow*，1980，6：305

15 Slis PL，et al. *Appl Sci Res*，Section A，1959，8：209

16 刘大有. 二相流体动力学. 北京：高等教育出版社，1993

17 Tsinontides SC，Jackson R. *J Fluid Mech*，1993，255：237

18 昔国栋，聂永生，刘大有. 第五届全国多相流、非牛顿流、物理化学流学术会议，2000. 1-7

竖直螺旋槽管壁面液膜流动特性的研究

梅　宁　张则荣　陆建辉

(青岛海洋大学工程学院，青岛 266003)

摘要　对竖直螺旋槽管壁面液膜形成及流动特性进行了研究，建立了单组分流体的物理和数学模型并得出了解析解。结果表明：液膜的形状主要受表面张力影响，在表面内弯处液膜较厚，而在槽道起始部液膜较薄。相对于光滑直管，竖直螺旋槽管壁面液膜具有均匀的厚度分布和更好的传热传质性质。

关键词　竖直螺旋槽管，液膜形成，液膜厚度

引　言

吸收式制冷设备及精馏塔等化工设备多利用管壁上形成小流量液体膜实现热量和质量的交换，如竖管壁的降膜和横管的喷淋。然而，由于表面张力的作用和液体在光滑管壁上的流动特征，初始形成的液膜产生收缩而不能形成覆盖全表面的液膜，使管的传热效率下降。在这种情况下，工程上多用增加管数以增加换热面积来解决。螺旋槽强化传热管壁是利用竖管管壁表面的刻槽产生的液体表面应力平衡的改变和流体在越过槽间边界时的流体交汇，使得液体在管表面得到最大程度的润湿以得到外管壁上覆盖全表面的液膜[1]。自 Nusselt[3]开创对光滑的柱面管壁在冷凝和蒸发时的传热传质特性研究以来，Gregorig[4]首先对轴向直槽竖管壁的研究结果表明其确有明显的强化传热效果，但其强化传热机理仍然不清楚。一般认为是管壁槽的几何形状克服了表面张力对传热传质的影响，但从理论到试验均无证明。Mori[5]，Webb[6]和 Honda[7]只考虑了轴向直槽竖管壁的冷凝过程，认为在槽边缘存在薄液膜而在中心存在厚液膜。没有给出温度和速度分布的表达。Sideman[8]在假设轴向流量为常数且表面张力很小时得轴向速度解。本文进行了螺旋槽竖管的降膜形成及流动特性的首次探索，建立了描述该管壁传热过程的拟线性模型，得到了薄液膜的厚度和速度分布的解析解。

1　螺旋槽竖管几何形状和槽道曲线坐标系

螺旋槽管的几何形状如图 1 所示。流体由管的顶部在重力作用下通过一个狭缝进入螺旋管槽道，槽道中的流体可以越过其边界进入相邻的下层槽道。

槽道的横截面可以是任何几何形状，在与螺旋线切向垂直的截面上的截线在该截面上的曲线方程为：$Y^{*}s=f(X^{*}s)$。

为此，我们可以建立正交曲线坐标系，如图 2 所示。对每个槽道，螺旋线是 Z 轴。在槽道的每个横截面上的槽道截线是 S 轴（坐标s'），每个 S 坐标点的法向是 n 轴（坐标n'）。则坐标变换的拉梅系数是

$$h_1=\left[\left(\frac{\partial X_s^{*}}{\partial s'}\right)^2+\left(\frac{\partial Y_s^{*}}{\partial s'}\right)^2+\left(\frac{\partial Z_s^{*}}{\partial s'}\right)^2\right]^{1/2}=1-K_b^{*}\cdot n' \tag{1}$$

$$h_2 = \left[\left(\frac{\partial X_s^*}{\partial n'}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y_s^*}{\partial n'}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z_s^*}{\partial n'}\right)^2\right]^{1/2} = 1 \tag{2}$$

$$h_3 = \left[\left(\frac{\partial X_s^*}{\partial z'}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y_s^*}{\partial z'}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z_s^*}{\partial z'}\right)^2\right]^{1/2} =$$

$$\left[\left(X_s^* + \frac{n' \cdot f'}{(1+f'^2)^{1/2}} + r\right)^2 \frac{\cos^2\phi}{r^2} + \left(Y_s^* - \frac{n'}{(1+f'^2)^{1/2}}\right)\frac{\cos^2\phi \sin^2\phi}{r^2} + \sin^2\phi\right]^{1/2} \tag{3}$$

速度矢量是

$$V^* = U_s \cdot \boldsymbol{e}_s + V_n \cdot \boldsymbol{e}_r + W_z \cdot \boldsymbol{e}_z \tag{4}$$

其中，K_b^* 为槽管横截线的曲率半径，h_0^* 为液膜入口处厚度，U_s, V_n, W_z 为在 s，n，z 方向上的速度分量，V^* 为流体的速度，P^* 为流体的当地压力，B 为流体的体积力，ρ 为液体密度，a 为槽道的跨度，μ 为流体的动力黏度，φ 为槽道螺旋角，T 为液体温度，T_s 为液体饱和温度，T_w 为槽道壁面温度，λ 为液体导热系数，C_v 为液体比热。Φ 为过程的耗散函数，D 为液体蒸汽的扩散系数，C 为液体蒸汽的密度

$$Re = \frac{\rho \cdot u^* h_0^*}{\mu} \qquad U^* = \frac{\rho \cdot g \cdot h_0^{*2}}{\mu}$$



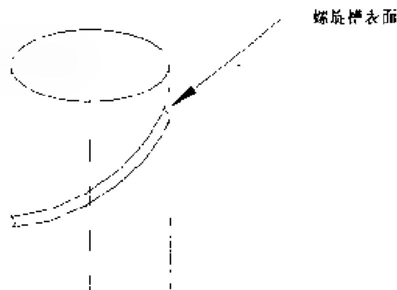
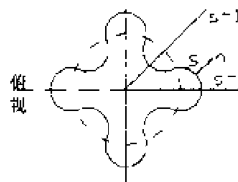


图1 螺旋槽表面的几何形状





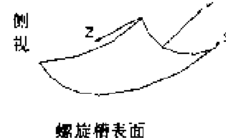


图2 正交曲线坐标系

2 基本方程和求解

本文认为螺旋槽道流动为重力驱动低流速不可压黏性层流，其基本假设是：

(1) 液膜厚度远比最小的几何尺度小。

(2) 液膜流动的雷诺数很小，可以忽略惯性力的影响。

(3) 流动是稳态小雷诺数的，可以忽略 Navier-Stokes 方程中的对流项和耗散函数。

(4) 流动基本特性由基本方程的主项控制。

(5) 液体密度和黏度为常数。

(6) 在液体表面上的环境压力为常数，且表面传质由液体内的传热特性控制。

为了方便求解，对方程和参数进行无量纲化

$$s=\frac{s'}{a},n=\frac{n'}{h_0^*},z=\frac{z'}{L},X_s=\frac{X_s^*}{a},Y_s=\frac{Y_s^*}{a},K_b=a\cdot K_b^*,W_e=\frac{\rho\cdot g\cdot a^2}{\sigma},P_r=\frac{Cv\mu}{\lambda},\delta=\frac{h_0^*}{a}$$
$$\varepsilon=\frac{h_0^*}{L},\lambda=\frac{a}{L},\theta=\frac{T-T_w}{T_s-T_w},U^*=\frac{\rho\cdot gh_0^{*2}}{\mu},P=\frac{P^*}{\sigma/a},U=\frac{U_s}{U^*},V=\frac{V_n}{U^*\cdot\delta},W=\frac{W_z}{U^*} \tag{5}$$

在液体自由表面，膜厚度为

$$n=h(s,z) \tag{6}$$

即

$$F=n-h(s,z)=0 \tag{7}$$

自由表面的曲率

$$K_F=\nabla\cdot \boldsymbol{N} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{N}=\left[\left(-\frac{1}{h_1}\frac{\partial h}{\partial s}\right)\boldsymbol{e}_s+\boldsymbol{e}_n-\frac{1}{h_3}\frac{\partial h}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right]\Big/\left[1+\frac{1}{h_1^2}\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)^2+\frac{1}{h_3^2}\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2} \tag{9}$$

总应力

$$\tau=\rho gh^*\left[-P\frac{W_e^{-1}}{\delta}+2\left(\frac{\delta}{h_1}\frac{\partial U}{\partial s}+\frac{\delta\cdot V}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial n}\right)\right]\boldsymbol{e}_s+\left[-P\frac{W_e^{-1}}{\delta}+2\delta\frac{\partial V}{\partial n}+\frac{\varepsilon}{h_3}\frac{\partial U}{\partial z}+\right.$$
$$\left.\frac{\delta\cdot h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{W}{h_3}\right)\right]\boldsymbol{e}_n+\left[-P\frac{W_e^{-1}}{\delta}+2\left(\frac{\varepsilon}{h_3}\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{\delta\cdot V}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial n}+\frac{\delta\cdot U}{h_1h_3}\frac{\partial h_3}{\partial s}\right)\right]\boldsymbol{e}_z \tag{10}$$

表面力的平衡条件

$$\tau\cdot \boldsymbol{N}=-\sigma\cdot K_F \tag{11}$$

方程的主项为

$$P\approx\frac{K_b}{h_1}-\frac{\delta}{h_1^2}\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}+\frac{1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial n}\approx\frac{K_b}{h_1}\approx\Psi(s) \tag{12}$$

液面传质平衡条件

$$\rho \boldsymbol{V}^*\cdot \boldsymbol{N}=-\lambda\nabla T\cdot \boldsymbol{N}/q \tag{13}$$

其中　$J_a=C_v\Delta T/h_{fg}$，$\Delta T=T_s-T_w$，h_{fg} 为液体潜热或反应热。

为了求解基本方程，进行以下简化并且设定槽道几何条件

$$h_1=1-\delta\cdot K_b\cdot n\approx 1 \tag{14}$$

$$h_3\approx \text{const} \tag{15}$$

螺旋槽表面的曲率为

$$\left(\frac{\partial^2 X_s}{\partial s^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 Y_s}{\partial s^2}\right)=K_b^2 \tag{16}$$

$$X_s = \int_0^s \sin K_s \mathrm{d}s + X_0 \tag{17}$$

$$Y_s = \int_0^s \cos K_s \mathrm{d}s + Y_0 \tag{18}$$

$$K_s = \int_0^s |K_b| \mathrm{d}s \tag{19}$$

$$K_b = K_1 + K_0 \cos(\pi s) \tag{20}$$

$$K_1 = \pi / N \tag{21}$$

忽略 h_2, h_3 两项，得连续方程

$$\frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial h_3 U}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\varepsilon}{\delta \cdot h_3}\frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{22}$$

动量方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} = \frac{We^{-1}}{h_1}\frac{\partial P}{\partial s} - \cos\phi\cos(K_s) \tag{23}$$

$$\delta\frac{\partial^2 V}{\partial n^2} + \delta \cdot U \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial s}\right) = \frac{We^{-1}}{\delta}\frac{\partial P}{\partial n} + \cos\phi\sin(K_s) \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} = \frac{\varepsilon \cdot We^{-1}}{\delta \cdot h_3}\frac{\partial p}{\partial z} - \sin\phi \tag{25}$$

能量方程

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2} = \delta \cdot R_e P_r \left(\frac{U}{h_1}\frac{\partial \theta}{\partial s} + V\frac{\partial \theta}{\partial n} - \frac{\varepsilon \cdot W}{\delta \cdot h_3}\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) \tag{26}$$

由边界条件：$\partial P / \partial n \approx 0, P = P(s,z)$。$n = 0, U = 0, W = 0$。$n = h(s,z), \partial U / \partial n \approx 0, \partial W / \partial n \approx 0$

得出速度分布为

$$U = \left(We^{-1}\frac{\partial P}{\partial s} - \cos\phi\cos(K_s)\right)\left(\frac{1}{2}n^2 - nh\right) \tag{27}$$

$$V = -\int_0^1 \frac{1}{h_1 h_3}\left(\frac{\partial h_3 U}{\partial s} + h_1\frac{\varepsilon}{\delta}\frac{\partial W}{\partial z}\right)\mathrm{d}n \tag{28}$$

$$W = \left(\frac{\varepsilon We^{-1}}{\delta h_3}\frac{\partial P}{\partial z} - \sin\phi\right)\left(\frac{1}{2}n^2 - nh\right) \tag{29}$$

进而解出液膜厚度

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\delta Re P_r \dot{m}}{Ja} \tag{30}$$

$$\frac{\partial A_1 h^3}{\partial s} + W_e\frac{\varepsilon}{\delta}\sin\phi\frac{\partial h^3}{\partial z} = \frac{3Q}{h} \tag{31}$$

其中 $Q = \dfrac{k_l \Delta T}{\rho \cdot h_{fg} h_0^* \delta U^*}, A_1 = W_e \cos(K(s))\cos\phi - k_b{}'$

$$z = \sin\phi \int_{s_0}^{s} \frac{\mathrm{d}s}{W_e \cos(K(s))\cos\phi - k_b^{'}} \tag{32}$$

$$h_w = \left(\frac{[W_e \cos\phi \cos(K(s)) - k_b^{'}]\big|_{s=s_0}}{W_e \cos\phi \cos(K(s)) - k_b^{'}]\big|_{s=s}} \right)^{1/3} h_0 \tag{33}$$

$$h = \left(\left(\frac{A_1|s_0}{A_1|s} \right)^{4/3} - \frac{4Q\int_{s_0}^{s} A_1^{1/3}\mathrm{d}s}{(A_1|s)^{4/3}} \right)^{1/4} \tag{34}$$

$$A_1 = 0 \tag{35}$$

$$h^4 = \exp\left(\frac{4}{3} A_1^{'} \frac{z}{\cos\phi}\right) h_0^4 - \int_0^z 4Q \exp\left(-\frac{4}{3} A_1^{'} \frac{z}{\cos\phi}\right)\mathrm{d}z \tag{36}$$

3 结果和讨论

方程(32)~(36)的解随螺旋槽道的几何尺寸、流体性质和传热特性而有所不同。本文以表 1 所列参数的结果进行讨论。

表 1 螺旋槽的几何尺寸和流体性质

参数	K_η	N	h_0	ΔT	W_e	J_a	Re	Pr
数值	3	4	1	0	26.3	0.001	37	1.9

螺旋角的影响如图 3 所示。随着螺旋角的减小，不同位置上的液膜趋向均匀。与文献[1]的竖直槽管相比，螺旋槽具有更均匀的液膜厚度分布。相对于竖直槽管而言，s 分量的动量方程存在重力项，因此其解的表达中增加了螺旋角一项，导致存在螺旋角时的最大液膜厚度位置不在槽道的几何对称中点上，随着螺旋角的减小，大体上最大液膜厚度位置趋向于 s 轴原点移动。

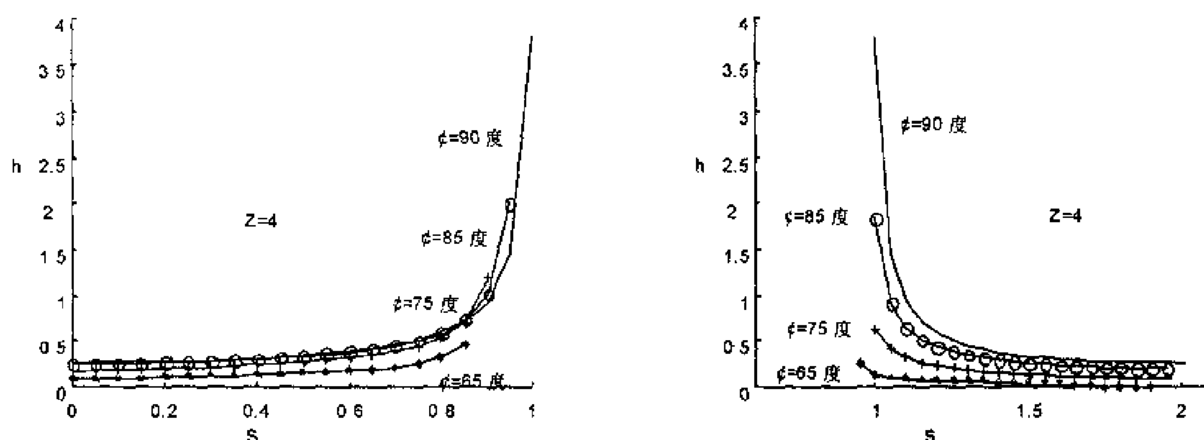


图 3 螺旋角变化对液膜形成的影响

竖直螺旋槽管液膜的形成过程如图 4 所示。随着液膜向下流动，初期的均匀膜由于表面张力的作用有所收缩。考虑单槽道内的流体流动时，槽道前缘和后缘的液膜变得较薄，而积聚点增厚。与文献[1]的竖直槽管相比，显然螺旋槽管的聚积点液膜厚度要小得多。其原因在于：一方面，s 向的速度不仅从前缘向着积聚点流动，后缘速度向着背离积聚点流动，如图 5 所示，使得液膜在整个表面得以展开。另一方面，槽道倾斜一个螺旋形的角度后，流体有可能越过后缘边界汇入下一个槽道，而竖直槽管的各槽道间不可能有流体的相互掺混。正是由于流体的相互掺混，使得液体沿管壁均匀分布得以可能实现。

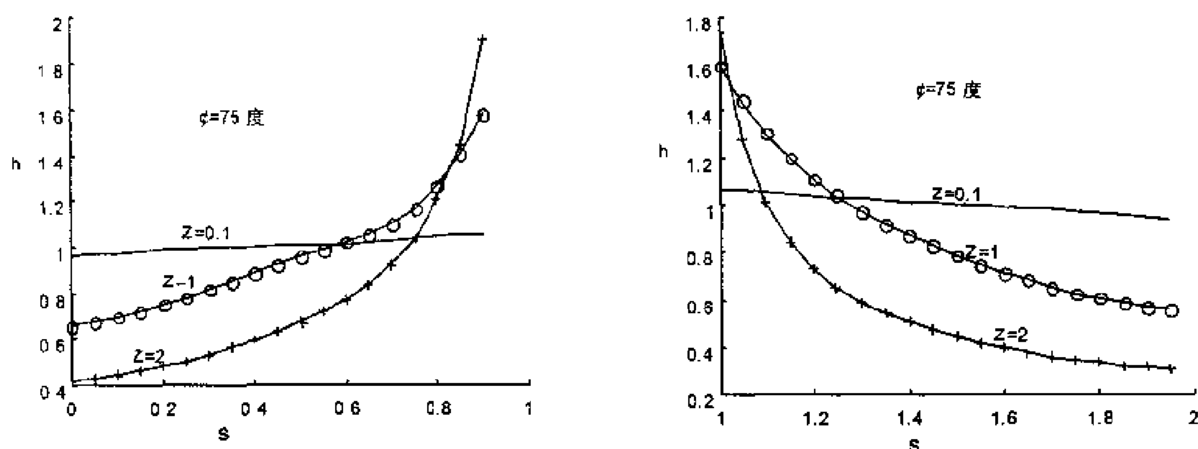


图 4　液膜形成的过程

液膜表面的速度分布曲线表明：在较厚液膜处，螺旋线方向和槽道周向速度较大。在重力作用下，较薄的液膜由于附壁效应和黏性的作用，流动速度较慢。较厚的液膜流动速度相对较快。

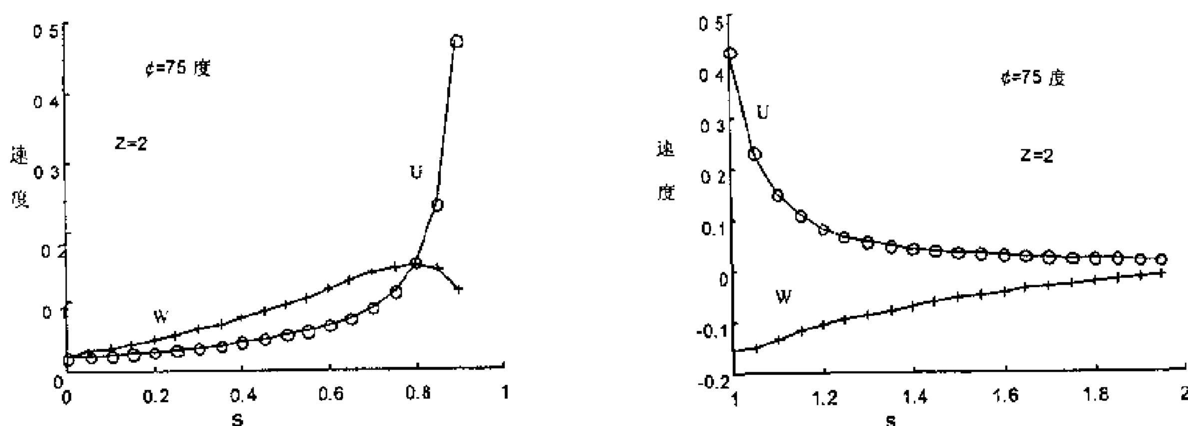


图 5　螺旋线方向和槽道周向液膜表面速度曲线

4 结 论

(1) 重力驱动的壁面液膜形成和流动特点与竖直槽管有较大不同。最大液膜厚度位置偏离了几何对称点，液膜周向速度具有一致性。这使得液膜具有更均匀的分布。

(2) 本文给出的液膜温度梯度表达式表明：液膜的传热和传质是相互耦合的。液膜厚度的解析表达式可分为由于流体流动特性形成的厚度分布和由于传热传质引起的厚度分布两项。

参 考 文 献

1 Mei Ning, Conlisk AT The flow and heat and mass transfer on a twisted and fluted tube. 52nd Annual Conference of APS, 1999, 11, BN.07, USA

2 卜宇铮等. 多孔薄层强化竖管外壁凝结换热的理论研究. 工程热物理学报, 1998, 19(5): 629~632

3 Nusselt W. Die oberflachenkondensation des wasserdampfes. *Z Vereines deutscher Ing*, 1916, 60: 568~575

4 Gregorig R. Hautkondensation an funegewellton oberflachen bei berucksichtigung der oberflachenspannungen Z *Angew Math Phy*, 1954, 5: 34~43

5 Mori Y et al. Optimized performance of condensation with outside condensingsurface. 18th Annual Heat Transfer Conf, San Diego, 1979, 6-8 August. 55

6 Webb RL. A generalized procedure for the design and optimization of fluted Gregorig condensing surface. *J of heat Transfer*, 1979, 101: 335

7 Honda H et al. Semi-empirical equation for condensation heat transfer on vertical fluted tube. Winter Annual Meeting of the ASME, New Orleans, LA, 1984, 9-14 Dec

8 Sideman S et al. Film flow and heat transfer on a vertically grooved surface. Proc of 7th Int Het Transfer Conf, 1982, 153

9 王补宣等. 竖槽液膜流动稳定性的分析. 工程热物理学报, 1999, 20(4): 457~461

驻波管中的颗粒聚集现象及其分析

吴　嘉　　李冰航　　席葆树　　许宏庆　　周礼蔚

（清华大学工程力学系，北京 100084）

摘要　水平放置的驻波管中的微小颗粒群在声辐射压和声流的作用下会形成众所周知的 Kundt 条纹，而竖直放置的驻波管中的微小颗粒群在声辐射压和声流的作用下会形成有趣的颗粒悬浮层。分析表明，这种悬浮分层现象对颗粒大小有一定的分级作用，在粉尘工业中有一定的应用前景。

关键词　驻波管，Kundt 条纹，颗粒悬浮

引　言

颗粒在声场中会受到时均不为零的稳定的力的作用。King[1]从流体力学的基本方程出发，基于理想不可压假设首先得到了球形颗粒所受到的这种驱动力的表达式，它与声辐射压力相关。此后的许多学者先后对 King 的理论模型作了修正与补充，得到了更加完善的结果。在驻波管中，颗粒群在声场作用下会形成规则的条纹结构，如不考虑壁面作用，则颗粒群会向波幅或波节平面聚集，具体情况决定于颗粒的材料密度和声传播的介质密度之比。由于 Kundt 首先在驻波管中发现了这一现象，所以又称 Kundt 条纹。

声流是驻波场中另一种非线性效应。Rayleigh[2]的理论研究结果表明，声流是沿管轴线对称的、空间规则排列的的稳定旋涡结构。Andrade[3]用流动显示的方法给出了驻波管中声流的图谱，证实了 Rayleigh 的理论推导结果。此后的许多学者也先后对声流问题作了各种研究。近来声源强度的不断提高使人们对声悬浮、声凝聚等具有强大实际应用背景的现象产生了强烈的兴趣。高声强的应用研究体现出了诱人的前景。

本文就是关于驻波声场中颗粒聚集行为的。以往的研究多是对其中驻波管水平放置时产生的条纹现象的分析，本文在现有实验台上给出了这种现象。在进一步的实验中发现，在驻波管竖直放置时，其管底的颗粒会腾空而起，在声辐射压和声流的共同作用下形成稳定、清晰的颗粒悬浮层。

1　实验装置

实验装置如图 1 所示。（给出的是驻波管竖直时的情况）

信号由 XD1022 低频信号发生器供给，经功率放大器(Model-SA600)驱动低频大功率电动扬声器(200W)。驻波管由有机玻璃材料构成，管壁厚 4mm，内径 55mm，管长 470mm。反射端为 2mm 厚的钢板，中间打有 φ 7mm 的孔，1/4 英寸的传声电容由此引入，测量驻波管中声压。

传声电容信号由 FDC-2A 型传声放大器测量，并可接计算机通过 AD 板进行采集，便于信号后处理。颗粒为热电厂现场采集的粉煤灰，经筛选分级，选取较小的作为实验对象，大小分布在 1~20μm 之间，其材料真密度为 $2.5\times10^3 kg/m^3$。

由于传声电容无法在高尘环境中使用，故先不放置颗粒，在特定频率下测量出驻波管反射端声压（即声压波幅平面）

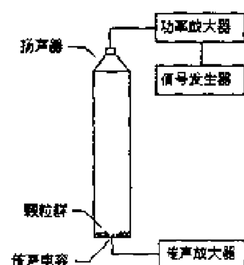


图1　实验装置简图

和电动扬声器输入电压之间的关系曲线。实验时反射端完全封闭，通过测量扬声器的输入电压并利用上述关系曲线得到驻波场的声压级，即驻波强度。由于在共振频率下管中非线性现象最为强烈，故选取各共振频率作为实验频率。在扬声器一定的输入电压下，测得反射端声压幅值曲线如图 2 所示。可以看出，该扬声器的工作频率在 2kHz 以下，由声学理论可知，管中仅有平面波传播。（$\omega<2.41C/R$，其中 C 为声速，R 为驻波管半径）

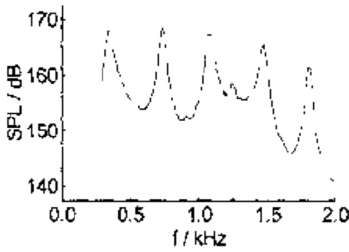


图 2 驻波管反射端声压在不同频率下的测量结果

2 水平驻波管中的颗粒 Kundt 条纹现象

图 3 为实验初始管内状况，其中管底沉淀的白色条带就是均匀分布的微小颗粒群。在声场作用下，其中部分较大的颗粒将保持在管底在声辐射压和声流的作用下向压力波幅（速度波节）平面运动，并最终在那里聚集形成颗粒条纹，如图 4 所示，信号频率为驻波管的四阶共振频率。



图 3 实验初始时管内状况



图 4 管内大颗粒形成的 Kundt 条纹

Andrade 认为颗粒条纹的形成与围绕颗粒的声涡动密切相关。在声振动、声环流和声涡动的共同作用下，会形成不同样式的颗粒条纹（关于管中的声环流本文后面还将作详细介绍）。由于管壁的状况十分复杂，其处于管中声环流的边界层中，流场情况比较复杂。另一方面，Andrade 的实验及其分析均基于速度的空间变化及温度梯度很小，从而可以忽略内摩擦及热传导的作用的情况，而实际情况十分复杂，实验时尤其在高频下管壁发热明显。管中的小颗粒会扬起后随管中声环流运动。流动显示结果表明，实际的声流结构与 Andrade[3]的实验结果差别很大，而且在反射端声压级达到 160dB 以上时管中出现明显的湍流结构，而这种规则的颗粒条纹现象并不会被破坏，由此可以看出，Andrade[3]的分析有待进一步完善。另一方面，我们从后面的分析可以看出，单纯从辐射压的角度也是无法得到这种颗粒聚集规律的。实验中还发现，随着声场强度的提高，条纹的宽度明显减小，而且在一定声强以后，将不出现二级以上的其它条纹，颗粒仅聚集在驻波管的压力波幅，即速度波节平面上。

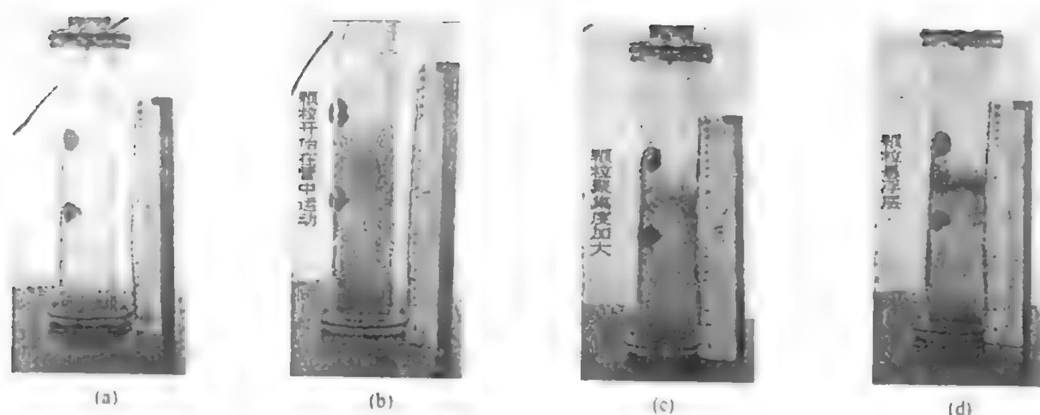
3 竖直驻波管中的颗粒悬浮分层现象

驻波管的初始状态如图 5(a)所示。在一阶共振频率（365Hz）下打开扬声器，逐步调节功放输出，增加驻波管内的声压级。由一般的驻波理论可知，颗粒开始所处的位置（即管底）为速度波节平面，即压力波幅平面。在管内声压级较低时颗粒并无偏离该位置的运动迹象，仅在管底作微小振动，随着驻波强度的提高，部分颗粒（可以直观发现为一些较微细的颗粒）开始出现大幅度的跳跃，有偏离平衡位置的趋势。进一步的，这种运动延伸到驻波管整个下半部分，如图 5(b)所示，由观察可知，颗粒由管壁上升，到压力波节平面附近（即管的中部）后沿管中轴线下落，形成规则的旋涡运动。图 5(b)中的箭头所指即为颗粒运动方向。

当驻波强度继续增大，上述颗粒跟随的旋涡运动加剧以至规则对称的性质消失。逐渐地，

在管的中部，即压力波节平面附近，颗粒浓度加大，如图 5(c)所示。继续增加驻波强度，就会在压力波节平面附近产生一清晰稳定的颗粒悬浮层，如图 5(d)所示。整个图 5 给出了一阶共振频率下，驻波管中颗粒悬浮层形成的完整过程。值得注意的是，颗粒在压力波节（速度波幅）平面悬浮状态十分稳定。

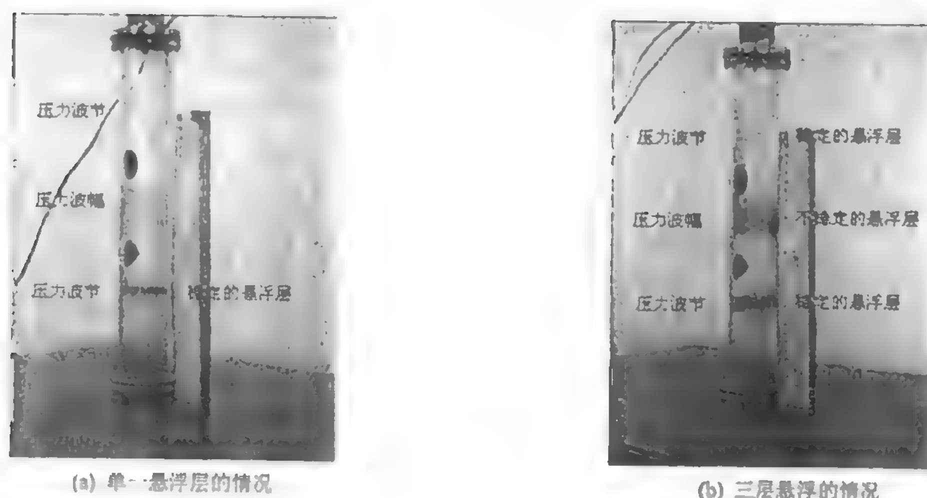
进一步地，对二阶共振的情况也进行了观察研究。图 6 给出了二阶共振频率下最终的两种悬浮情况。当声压级达到一定大小并且不再变化时，颗粒层逐渐形成并稳定在由反射端向上的第一个压力波节平面附近，如图 6(a)所示。如果此时给驻波场一个扰动，如改变扬声器输出，则悬浮层中一部分颗粒会上行，分别到达下一个压力波幅或波节平面附近后再次形成清晰的悬浮层，如图 6(b)所示。实验中继续对高阶共振下的情况作了记录分析，基本过程及特点同上。



(a)　　(b)　　(c)　　(d)

图 5　颗粒悬浮层的形成

(a) 驻波管中的起始状态；(b) 颗粒开始在管中跟随声流的旋涡运动；(c) 颗粒向压力波节平面聚集；(d) 形成颗粒悬浮层



(a) 单一悬浮层的情况　　(b) 三层悬浮的情况

图 6 二阶共振下悬颗粒浮层的状况

4　分析和讨论

4.1　声辐射压在颗粒分层悬浮现象中的作用

King[1]给出了刚性小球在平面驻波中所受到的辐射压的大小

$$\overline{P}=\frac{10}{3}\frac{\pi^2 r^3}{\lambda}\overline{E}\sin\frac{4\pi x}{\lambda} \tag{1}$$

其中，r 为颗粒半径，λ 为波长，x 为颗粒所处位置距管底反射端的距离，$\overline{E}$ 是驻波管中的平均能量密度，在驻波强度一定的情况下管中各点的 $\overline{E}$ 具有相同的表达式，即

$$\overline{E}=\frac{2\pi^2\rho_P}{\lambda^2}|A|^2 \tag{2}$$

其中，ρ_P 是介质密度，$|A|$ 为波动方程中速度势 ϕ 的振幅。

在特定的频率下（即 λ 一定），当驻波强度一定时，由（1）式可以给出半径为 r 的球形颗粒（假设实验中的煤灰颗粒为球形）所受辐射压沿管长的变化曲线，如图 5 所示。

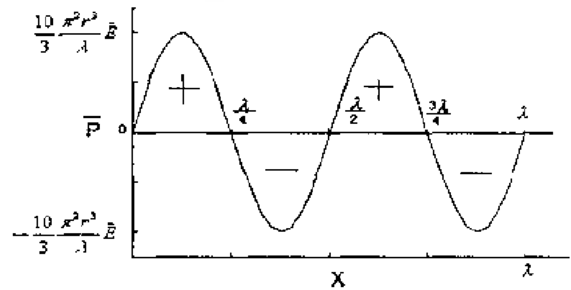


图 7 颗粒沿管长所受到的辐射压

由此可以看出，颗粒在波节和波幅平面（速度、压力一致）所受的辐射压力均为零。在它们的中间截面所受的辐射压力最大，但方向周期性变化。另外非常有意义的一点是，在管中辐射压力均指向压力波节平面（即速度波幅平面）。（图中的“+”、“-”表示出了辐射压的方向）

另一方面可以看到，如果颗粒一旦偏离辐射压为零的波节、波幅平面，那么有两种可能性，如果颗粒原来处于压力波幅平面（如管底），在不考虑重力作用的情况下，偏离平衡位置后颗粒将受到指向压力波节平面的辐射压力的作用，从而向压力波节平面运动；如果颗粒原来就处于压力波节平面，则偏离后颗粒会在辐射压力的作用下重新回到该平面。所以管中辐射压力为零的波幅波节平面分为两类：一是颗粒一旦离开，平衡状态即被打破，称为不稳定悬浮面，即压力波幅平面；二是颗粒离开后还能回到初始位置，称为稳定悬浮面，即压力波节平面。

4 2 声流在颗粒悬浮分层现象中的作用

声流是考虑声波传播的二阶近似（振幅为有限值）而产生的时均不为零的流动。在封闭管中产生声流现象必然受到固体管壁边界的影响，Rayleigh[2]指出这种流动的主要特征是靠近固体边界的声波在 Stokes 周期边界条件作用下的耗散。Schlichting[4]用小参数近似（以 u_0/C 为小参数，u_0 为质点振动振幅，C 为声速）的方法求解了周期性边界问题，二阶近似下解得紧靠边界层外的滑移速度 u_s 的表达式

$$u_s=u_{s0}\sin 2nx,\quad u_{s0}=\frac{3u_0^2}{8C} \tag{3}$$

其中，$n=\omega/C$（ω 为声场的频率）。由边界层理论，该速度值可作为求解外部声流的边界条件，其中的 u_{s0} 即为声流的特征速度值。由此并进一步简化求得的声流表达式为

$$u=-u_{s0}\left(1-\frac{2r^2}{R^2}\right)\sin 2nx,\quad v=u_{s0}nR\left(\frac{r}{R}-\frac{r^3}{R^3}\right)\cos 2nx \tag{4}$$

由上式不难看出，它表示的就是波节、波腹平面间的对称旋流，如图 8 所示。

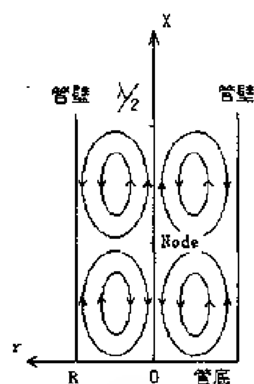


图 8 声流理论解示意图

由上示意图可以看出，该流动的特点是沿管壁的流动由压力波幅指向压力波节，在管中央则相反。Andrade[3]的流动显示实验验证了这一结果的正确性。在本实验中，管中的颗粒由四周向上升腾（如图 5(b)中的箭头所指），部分形成稳定的悬浮层，部分颗粒跟随声流运动从管中央部分回落。由此可知，沿管壁上升的气流正是导致管底颗粒偏离其平衡位置（即辐射压为零的平面）的主要因素。其中一部分非常微细的颗粒能够完全跟随声流在管中作旋涡运动，此时黏性力起主要作用，由于颗粒太小，辐射压的作用（沿表面积的积分）可以略去不记。

4.3 颗粒悬浮层的形成

大多数位于管底的颗粒受到扰动（主要是声流的扰动，也包括声场其它参数，如声强、频率等变化产生的扰动）后进入辐射压不为零的区域。由前面的分析可知，由管底向上，辐射压在 $\lambda/8$ 的范围内是逐渐增大的。如果颗粒所处位置的辐射压的作用大于它的重力时（此时的辐射压方向和重力方向相反），它就会上升。由于辐射压力随位置在变化，当这两个力平衡时，颗粒就会稳定的悬浮在管中，即

$$P=\overline{P}A=\frac{10}{3}\frac{\pi^2r^3}{\lambda}\overline{E}\sin\frac{4\pi x}{\lambda}4\pi r^2=g\rho_P\frac{4}{3}\pi r^3 \tag{5}$$

其中，A 为颗粒表面积，g 为重力加速度，ρ_P 为颗粒密度，由于颗粒很小，忽略由于其尺寸产生的辐射压大小的变化。如果颗粒受到扰动后不能达到辐射压等于自身重力的区域时，它就会落回管底，然后在扰动的作用下不停的在管底跳跃。

由式（5）可解得半径为 r 的颗粒的悬浮位置为

$$x=\frac{\lambda}{4\pi}\arcsin\frac{g\rho_P\lambda}{10\pi^2r^2\overline{E}} \tag{6}$$

从该式不难看出，在一个辐射压变化的周期（$\lambda/2$）里有两个位置可以悬浮颗粒，即在图 7 的“-”区间里有两个点可以和重力平衡。其实这两个位置的稳定性差异很大，较靠近管底的位置颗粒由于惯性及其它干扰的作用很容易上行进入辐射压大于重力的区域从而继续上行，而过了辐射压最大的位置后的平衡点处于非常稳定的状态，即其上面位置的辐射压力减小，不足以平衡重力，而下面位置的辐射压力比重力大会继续使颗粒上行，故即使受到扰动，只要颗粒的运动范围保持在一定的区域里（在整个“-”区间中颗粒都会回到平衡位置，在“+”区间中如果向下的位移超过下面一个重力平衡点，则颗粒就不会回到原来的平衡位置了），颗粒都会重新回到平衡位置。由辐射压的极值可以得到管内可能悬浮的颗粒的最大直径，这样这种现象实际上可以达到颗粒初步分级的作用。

在驻波管的高阶共振频率下发现，如果没有外界或实验条件的变化，则管中只会出现第一悬浮层(如图 6(a))。如果此时改变驻波强度，则由于声流强度的增加及对颗粒本身的干扰使颗粒有可能会超过上述位移范围而进入下一个平衡位置，形成新的悬浮层(如图 6(b))。由上述理论可知，在所有的颗粒悬浮层中，压力波节平面为稳定悬浮层，该层上下两侧的辐射压力均指向该层，所以即使颗粒受到干扰产生一定的偏移也会很快回来。在这种力的作用下，

颗粒悬浮层很薄，颗粒状态较稳定(如图 6(b))；而压力波幅处的悬浮层则十分不稳定，因为其上下的辐射压力均指向该平面以外，如果不考虑重力作用，颗粒很难在该平面形成悬浮，在重力、辐射压力和微小的外界扰动的作用下，颗粒表现出上下振荡，所以悬浮层较厚(如图 6(b))。

实验中还发现经过一段时间的发展，随声流运动的微细颗粒逐渐减少以至消失。这是由于它们不断与处于悬浮层的大颗粒产生碰撞及自我之间的碰撞，从而产生声凝聚效应所致。这样，管中能够跟随声流的颗粒越来越少，以至消失。最后管中的颗粒形成多级悬浮状态，并在声场条件不变的情况下可以一直维持。

5 总 结

本文分别对水平及竖直放置的驻波场中的微小颗粒群的聚集现象进行了实验研究，综合以往的声流及辐射压理论对其进行了解释。可得到如下结论：

(1) 水平放置的驻波管中的颗粒会产生 Kundt 条纹现象。对这一现象的分析有待进一步深入；

(2) 竖直放置的驻波管中特定大小范围的颗粒群在辐射压和声流的作用下产生了特殊的分层现象；较小的颗粒会跟随声流运动，其它大部分颗粒受声流的扰动进入辐射压不为零的区域，然后在该辐射压的作用下运动到辐射压与重力平衡的平面处；

(3) 在不考虑重力的情况下各波幅波节平面都是辐射压为零的平面，但颗粒悬浮的稳定性不同，压力波节平面为稳定悬浮层，而压力波幅平面为不稳定悬浮层，原因是驻波管中的所有点的辐射压力均指向压力波节平面；

对这一现象的深入认识将在粉尘分级、无容器制备和颗粒输运等方面有很实际的意义。

参 考 文 献

1 King LB. On the acoustic radiation pressure on sphere. *Pro R Soc Lond*, 1934, A147: 211~240

2 Lord Rayleigh. Theory of Sound[M]. New York: Dover Publications, 1896. second edition, 1945 re-issue

3 And-ade EN da C. On the Circulations Caused by the Vibration of Air in a Tube[J]. *Proc R Soc Lond*, 1931, A134: 445~470

4 Schlichting H. Boundary Layer Theory[M] Pergamon, 1955

应用孔隙网络模型研究致密介质中气体渗流的滑脱效应[1)]

刘庆杰　王金勋
(中国石油勘探开发研究院油层物理与渗流重点实验室，北京 100083)

摘要　基于气体分子运动的平均自由程与毛细管半径的关系，采用 Aduzmi 提出的叠加公式，考虑了气体在黏性力及分子扩散双重作用机制下流动规律。通过二维规则的孔隙网络模型研究了气体在致密岩心中渗流的滑脱效应，模拟结果表明气体的渗透率与平均压力的关系符合 Klinkenberg 公式；对于不同的岩心，渗透率越大，Klinkenberg 系数越小。

关键词　气体渗流，致密岩石，孔隙网络模型，滑脱效应

引　言

流体流经孔隙介质的流量与压降的关系受流体本身及孔隙结构的共同影响。在大多数情况下，流量与压降的关系可以用达西定律表示，即流量与压降呈线性关系。而在某些特殊情况下，流量与压降的关系不再符合达西定律，在高流速情况下由于惯性项的作用，使得流量与压降的关系出现非线性，一般采用 Forchheimer 方程来描述，即

$$-\frac{dp}{dx}=\frac{\mu}{K}v+\rho\beta v^2 \tag{1}$$

Thauvin F 和 Mohanty KK[1]采用孔隙网络模型研究了在高速渗流时的非达西特征，并探讨了孔隙结构对非达西系数的影响。

在低渗透率的致密岩石中，气体的低速渗流也表现为非达西渗流的特征。这种现象可以归结为气体分子的运动以及致密岩石中孔隙过于狭细。此时气体的渗透率不再为常数，而是与孔隙介质中的平均压力有关，即所谓的 Klinkenherg 效应[2]

$$K_g=K_o\left(1+b/P_a\right) \tag{2}$$

本文将孔隙空间理想化为由众多毛管构成的相互连通的孔隙网络，基于孔隙水平，即狭小毛管中气体流动的力学规律建立一种孔隙网络模型，一方面印证了在低渗透孔隙介质中气体低速渗流的滑脱效应，另一方面力图揭示不同孔隙几何分布对气体渗流的影响。

1　单根毛细管中的气体流动的双重作用机制

气体的运动受黏性力及分子扩散的共同作用。当毛细管的直径足够大，以及平均压力较大时，气体在毛管中的流动服从 Hagen-Poiseullie 定律，即

$$q_p=\frac{\pi r^4}{8\mu}\frac{\Delta p}{l} \tag{3}$$

式中 r 为毛管半径，l 为毛管长度，μ 为气体的黏度。在气体分子运动的平均自由程和毛细管的半径 r 相当时，气体的流动服从 Knudsen 公式，表示为与平均压力 $\bar{p}$ 的有关的函数，即

1) 国家重点基础研究专项资助项目

$$q_s = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2\pi RT}{M}}\frac{r^3}{l}\frac{\Delta p}{\overline{p}} \tag{4}$$

式中 T 为绝对温度，M 为分子量，R 为气体常数。气体分子运动的平均自由程决定了气体运动受黏性力或分子扩散控制。分子运动的平均自由程表示为

$$\overline{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \tag{5}$$

在气体分子运动的平均自由程大于孔道半径 r 时，Knudsen 公式是适用的，而在平均自由程长度极其狭小时，Poiseuille 公式仍是适用的。

Aduzmi[3]提出介于两种状态之间，可以采用一种叠加的形式

$$q = \frac{\pi r^4}{8\mu}\frac{\Delta p}{l} + \varepsilon\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2\pi RT}{M}}\frac{r^3}{l}\frac{\Delta p}{\overline{p}} \tag{6}$$

式中 ε 为 Aduzmi 系数，Aduzmi 通过实验认为 ε 的取值约为 0.9。ε 实际上表示的是气体可滑脱边界层的相对大小，而可滑脱边界层的厚度 t 显然是与气体分子运动的平均自由程有关的。在一定的热力学条件下，气体运动的平均自由程是常数。将 Aduzmi 系数定义如下

$$\varepsilon = \frac{A_{\text{slip}}}{A_{\text{total}}} = \frac{(2r-t)t}{r^2} \tag{7}$$

式中 $A_{\text{total}}, A_{\text{slip}}$ 分别为滑脱层的截面积及毛管的截面积。显然当 $t=0$ 时，$\varepsilon = 0$，$t = r$ 时，$\varepsilon = 1$。

2　孔隙网络模型概况

孔隙网络模型是近年来逐渐发展起来的一种采用计算机模拟技术研究孔隙介质的技术。它的主要思路是采用理想化的网络来替代复杂的孔隙介质内的孔隙空间，基于统计物理中逾渗理论的基本思路以及孔隙介质中的微观渗流物理机制，来模拟孔隙介质中的渗流及驱替规律。

图 1 为我们采用的配位数 $z=6$ 的二维孔隙网络，构成网络的孔隙单元为圆柱状的单个毛管，毛管半径的采用如下分布，即

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x_2^2}\exp\left(\dfrac{x^2}{x_2^2}\right) & x \le x_3 \\ 0 & x > x_3 \end{cases} \tag{8}$$

式中，$x = r - r_{\min}, x_2 = \overline{r} - r_{\min}, x_3 = r_{\max} - r_{\min}$，$r$ 为毛管的半径，$r_{\min}, r_{\max}, \overline{r}$ 分别为最小、最大及平均毛管半径。采用这种类型的分布没有任何实际的背景，只是出于方便的考虑。尽管有在许多孔隙网络模型中采用这种分布[1]，但实际上采用何种连续型的分布描述孔隙半径的分布并无定论。图 2 为孔隙半径分布的直方图。

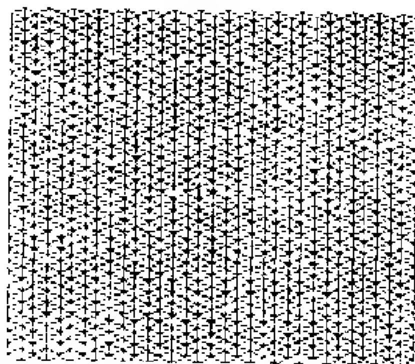


图 1　配位数为 6 的孔隙网络

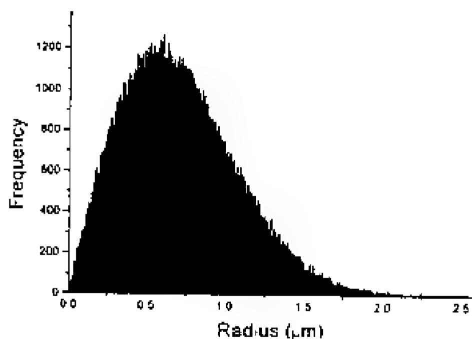


图 2　孔隙半径的分布直方图

在孔隙网络的两端施加一定的压力差ΔP，其余边界采用周期性边界条件。对于每个毛管单元，其气体流量与节点压差的关系按照(6)式考虑双重作用机制。在每一节点 i，依照物质平衡的原则，有

$$\sum_{j=l,m} q_{ij} = 0 \tag{9}$$

这样，对于所有的节点，以矩阵的形式表示节点的流量平衡，得到如下线性方程组

$$\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} \tag{10}$$

式中 $\boldsymbol{G}$ 为导流系数矩阵，$\boldsymbol{P}$ 为未知压力列阵，$\boldsymbol{Q}$ 节点流量矩阵。采用 LDL 直接分解，得到节点压力，进而得到流经网络的总流量 Q_t，于是渗透率为

$$K = \frac{Q_t}{\Delta P} \tag{11}$$

3　结果分析

我们通过孔隙网络模拟得到了致密介质中气体渗透率与平均压力的关系，该曲线与实验得到的结果一致。气体的渗透率与平均压力的关系如图 3 所示，随着平均压力的增大，气体的渗透率逐渐降低，在平均压力达到一定程度时，气体的渗透率趋于稳定。气体渗透率与平均压力的倒数的关系如图 4 所示，它们较好的符合线性的关系，如同(2)式所表示的那样。

对于不同的岩心，其孔隙半径的分布是表示孔隙结构特征的重要信息。在我们的模拟中，通过调整分布密度函数，得到了不同的孔隙大小分布的孔隙网络。在这些孔隙网络中，狭小孔隙占总孔隙的数目有所变化，这使得 Klinkenberg 系数 b 有明显变化。表 1 显示，随着平均孔隙半径的增大，气体渗透率增大，而气体的滑脱系数 b 减小。

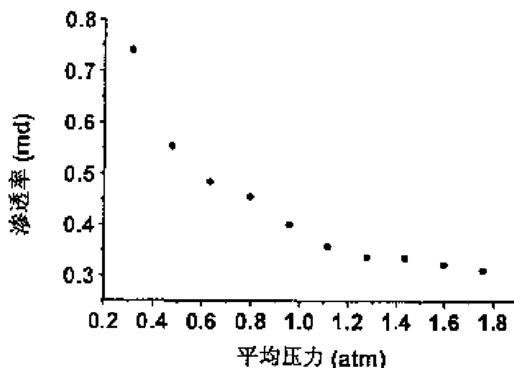


图 3　气体渗透率与平均压力的关系

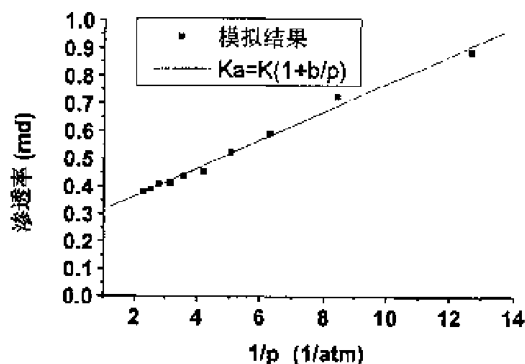


图 4　渗透率与 1/p 的线性关系

表 1　气体渗透率与滑脱系数的关系

模拟编号	最大孔隙半径(μm)	平均孔隙半径(μm)	气体渗透率(md)	滑脱系数(atm)
1	4.0	1.06	0.5473	0.189
2	3.5	0.88	0.262	0.195
3	2.6	0.71	0.107	0.199

4 结　论

采用孔隙网络模型研究气体低速渗流时的滑脱效应，能够真实的反映气体渗流过程中多重物理机制的共同作用及相互影响，同时也反映了孔隙结构对滑脱效应的影响。本文的初步模拟结果表明在考虑包括黏性力及分子扩散在内的双重作用机制的情况下，气体在致密岩石中的滑脱效应可以得到较好的解释。模拟结果也揭示了滑脱系数与孔隙结构的内在关系，相信通过更全面细致的工作，滑脱系数与孔隙结构之间的关系会更加明朗。

参 考 文 献

1 Thauvin F，Mohanty KK. Network modeling of Non-Darcy flow through porous media. *Transport in Porous Media*，1998，(31) 19~37

2 Klinkenberg LJ. The permeability of porous media to liquids and gases. Drill and Prod Prac，API，1941

3 Turgay Ertekin. Dynamic gas slippage: A unique dual-mechanism approach to the flow of gas in tight formation，SPEFE，1986

单相流体在变形介质中的多维渗流

宋付权　张慧生　刘慈群

(复旦大学力学与工程科学系，上海 200433) (中国科学院渗流流体力学研究所，河北廊坊 065007)

摘要　对于某些类型的多孔介质，如高压下的油层、低渗透油层和黏土等，在压力的作用下，介质将发生变形。而在以往的油藏工程基础计算中却没有考虑介质变形的影响，在自然资源日益紧张的今天，大量异常油藏投入开发，对这个问题的研究就显得非常重要。以指数形式的渗透率变形规律为基础，研究了单相流体在变形多孔介质中的定常和不定常多维渗流，流动的形式包括垂直油井的径向渗流、垂直裂缝井的椭圆柱渗流，以及水平井的椭球形渗流，得到了垂直井、垂直裂缝井和水平井的稳态压力分布公式，以及不稳定试井公式；分析了介质变形对原油生产和油井试井分析的影响。

关键词　低渗透油藏，变形介质，渗流，试井分析

引　言

试验表明：在油藏生产中，随着压力的下降，多孔介质的孔隙度下降，渗透率减小，这种现象称为多孔介质的压敏效应，相应的多孔介质称为变形介质。在高、中渗透油藏的开发中，岩石骨架变形对渗透率的影响不大，因此在一般计算中未考虑渗透率和孔隙度随压力的变化。而对于高压油藏、低渗透油藏和黏土介质，渗透率的变化对流体渗流的影响较大，这时必须考虑介质变形的影响。为了解决这个问题，国内外许多学者开始用流固耦合渗流力学理论 [1~3]研究之，然而流固耦合方法比较复杂，正在探索之中；另一种方法是考虑介质随压力变化，建立基本渗流微分方程，并进行分析求解。

资料表明[4~7]，孔隙度、渗透率随压差近似呈指数变化，即

$$K_{\mathrm{D}}=\frac{K}{K_{\mathrm{i}}}=e^{-\alpha_{\mathrm{k}}(p_{\mathrm{i}}-p)}=e^{-\beta p_{\mathrm{D}}} \tag{1}$$

式中：K 为渗透率，m^2；α_{k} 为渗透率变形系数，1/pa；β 为无量纲渗透率变形系数；p 为压力，pa；下标：D 为无量纲；i 为原始状态。

本文即用渗透率随压力变化的指数模型来分析变形介质中多维[8]定常渗流和不定常渗流。

1　定常渗流

达西定律[9]是经典渗流力学的运动方程，不考虑重力时的形式为

$$v=-\frac{K}{\mu}\nabla p \tag{2}$$

式中：v 为流速，m/s；μ为原油黏度，pa·s。

1.1 垂直井的定常渗流

由式(1)和达西定律可得稳定径向流压力分布方程为

$$\frac{1}{\beta_{\mathrm{v}}}\left(1-e^{-\beta_{\mathrm{v}}p_{\mathrm{vD}}}\right)=\ln\frac{r_{\mathrm{eD}}}{r_{\mathrm{D}}} \tag{3}$$

式中

$$p_{vD}=\frac{2\pi K_i h(p_e-p)}{\mu BQ},\quad \beta_v=\alpha_k\frac{\mu BQ}{2\pi K_i h},\quad r_D=\frac{r}{r_w}$$

r 为半径，m；Q 为产油量，m^3/s；h 为油层厚度，m；B 为地层体积系数；下标：v 为垂直井；e 为油藏边界；w 为井筒边界。

(3)式经变形得到压力分布公式

$$p_{vD}=-\frac{1}{\beta_v}\ln\left[1-\beta_v\ln\left(\frac{r_{eD}}{r_D}\right)\right] \tag{4}$$

当 $\beta_v=0$ 时，(4)式简化为

$$p_{vD}=\ln\left(\frac{r_{eD}}{r_D}\right) \tag{5}$$

即为不考虑渗透率变化影响时的常规径向流稳态压力分布公式。

由(1)式和(4)式可得地层中各点的无因次渗透率

$$K_D=1-\beta_v\ln\frac{r_{eD}}{r_D} \tag{6}$$

图 1 和 2 分别绘出了变形系数 β_v=0，0.05，0.1 时，垂直井渗流的稳态压力分布和渗透率分布，表明同样产量时，β_v 越大，渗透率越低，压力消耗越大。

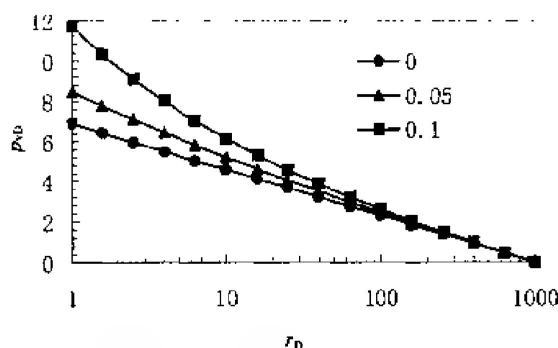


图 1 变形系数 β_v 影响的垂直井的稳态压力分布(r_{eD}=1000)

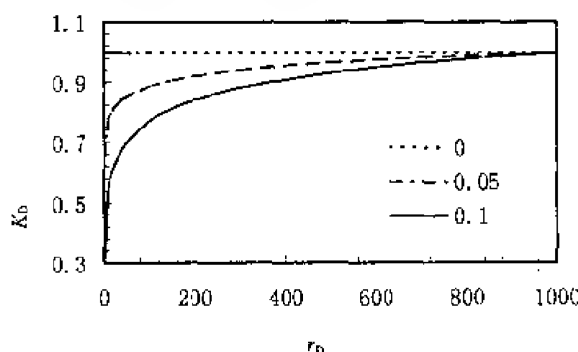


图 2 变形系数 β_v 影响的垂直井的渗透率分布(r_{eD}=1000)

1.2 垂直裂缝井的定常渗流

假定沿 x 坐标方向垂直裂缝井（简化为线源）的长度 $2x_f$，当油井生产时，在地层中形成等压椭圆柱面。直角坐标和椭圆坐标的关系为

$$x=a\cos\eta,\quad y=b\sin\eta \tag{7}$$

$$a=x_f\cdot\cosh(\xi),\quad b=x_f\cdot\sinh(\xi) \tag{8}$$

式中：x，y 为直角坐标，m；η，ξ为椭圆坐标；a，b 分别为椭圆的长半轴和短半轴，m；x_f 为裂缝半长，m；sinh(.)和 cosh(.)分别为双曲正弦和双曲余弦函数；下标：f 为垂直裂缝井。

椭圆柱的体积为

$$V=\pi abh=\pi x_f^2 h\sinh\xi\cosh\xi \tag{9}$$

假设 A 为 y 方向椭圆柱过流断面的面积，可近似为

$$A=4ah=4x_f h\cosh(\xi)$$

平均短轴半径为

$$\bar{y}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}y\cdot d\eta=\frac{2b}{\pi}=2x_f\sinh\xi/\pi$$

对于低渗透油藏，平均流速和达西公式在椭圆坐标中可表示为

$$v=\frac{QB}{A}=\frac{QB}{4x_f h\cosh\xi}=\frac{K_i K_D}{\mu}\frac{\partial p_f}{\partial y} \tag{10}$$

假定油藏的外边界为椭圆形供给边界，对方程从 (ξ,p_f) 到 (ξ_e,p_{fe}) 进行积分得稳态流动的压力分布公式为

$$p_{\rm fD}=-\frac{1}{\beta_{\rm f}}\ln\left[1-\beta_{\rm f}(\xi_{\rm e}-\xi)\right] \tag{11}$$

式中

$$p_{\rm fD}=\frac{2\pi K_{\rm i}h(p_{\rm fe}-p_{\rm f})}{\mu BQ},\quad \beta_{\rm f}=\alpha_{\rm k}\frac{\mu BQ}{2\pi K_{\rm i}h}$$

图 3 分别绘出了变形系数$\beta_{\rm f}$=0，0.1，0.2 时，垂直裂缝井渗流的稳态压力分布，表明同样产量时，$\beta_{\rm f}$越大，压力消耗越大。

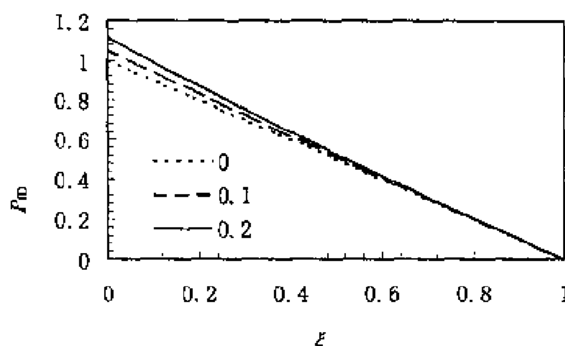


图 3 变形系数$\beta_{\rm f}$影响的垂直裂缝井的稳态压力分布($\xi_{\rm e}$=1)

1.3 水平井的定常渗流

椭球的体积公式为

$$V=\frac{4}{3}\pi ab^2=\frac{4}{3}\pi L^3(\sinh\xi)^2\cosh\xi \tag{12}$$

式中：L 为水平井半长，m。

假设 A 为 r 方向椭球过流断面的面积，可近似为圆柱的表面积

$$A=2a(2\pi r)=8L^2\sinh\xi\cosh\xi \tag{13}$$

式中：r 为平均短半轴，

$$r=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}r\cdot{\rm d}\eta-\frac{2b}{\pi}=2L\sinh\xi/\pi \tag{14}$$

因此平均流速和达西公式在椭圆坐标中可表示为

$$v=\frac{QB}{A}=\frac{QB}{8L^2\sinh\xi\cosh\xi}=\frac{K_{\rm i}K_{\rm D}}{\mu}\frac{\partial p_{\rm h}}{\partial r} \tag{15}$$

下标：h 为水平井。

假定油藏的外边界为椭球形供给边界，对方程(14)从$(\xi,p_{\rm h})$到$(\xi_{\rm e},p_{\rm he})$进行积分得稳态流动的压力分布公式为

$$p_{\rm hD}=-\frac{1}{\beta_{\rm h}}\ln\left\{1-\beta_{\rm h}\left[\ln\tanh(\xi_{\rm e}/2)-\ln\tanh(\xi/2)\right]\right\} \tag{16}$$

式中

$$p_{\rm hD}=\frac{4\pi K_{\rm i}L(p_{\rm he}-p_{\rm h})}{\mu BQ},\quad \beta_{\rm h}=\alpha_{\rm k}\frac{\mu BQ}{4\pi K_{\rm i}L}$$

图 4 分别绘出了变形系数$\beta_{\rm h}$=0，0.05，0.1 时，垂直裂缝井渗流的稳态压力分布，表明同样产量时，$\beta_{\rm h}$越大，压力消耗越大。

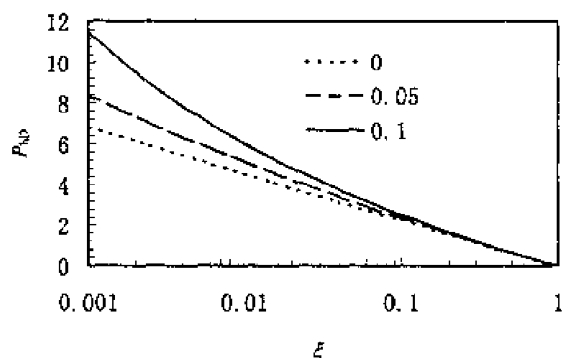


图 4 变形系数$\beta_{\rm h}$影响的水平井的稳态压力分布($\xi_{\rm e}$=1)

2 不定常渗流

假设油藏介质各向同性，流体未可压缩，不考虑重力的影响，初始时刻，油藏处于稳态。研究单相流体在变形介质中的多维不定常渗流，推导各类油井的试井公式。

2.1 垂直井的不定常渗流[10]

由平均质量守恒方程

$$t_{vD}=\int_1^{R_D} r_D\cdot p_{vD}\cdot dr_D \tag{17}$$

得近似解

$$p_{vD}=-\frac{1}{\beta_v}\ln\left[1-\beta_v\ln\left(R_D/r_D\right)\right] \tag{18}$$

式中：R 为压力影响半径，m；t 为时间，s；ϕ为孔隙度；c_t 为综合压缩系数，1/Pa；

$$t_{vD}=\frac{K_i t}{\mu\phi_i c_t r_w^2}$$

由平均质量守恒方程得压力影响边界传播公式为

$$t_{vD}=\frac{1}{4}\left[R_D^2-2\ln(R_D)-1\right]+\frac{\beta_v}{4}\left[2\ln^2(R_D)-2\ln(R_D)+R_D^2-1\right] \tag{19}$$

当 $r_D=r_{wD}=1$ 时，式(18)和(19)组成了变形介质中垂直井不定常渗流的试井公式。如图 5 所示，为变形系数β_v 影响的垂直井的典型试井曲线，表明介质变形对试井曲线的影响主要在后期，径向流特征段消失，压力、压力导数曲线上翘。

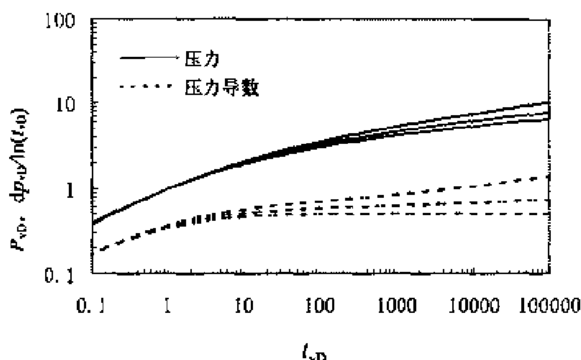


图 5 变形系数β_v影响的垂直井的典型试井曲线

(从下至上：β_v=0，0.01，0.1)

2.2 垂直裂缝井的不定常渗流[11]

假定油层各向同性，垂直裂缝井在定产量生产的条件下，微可压缩流体的平均质量守恒方程的无量纲形式为

$$t_{fD}=\frac{1}{2}\int_0^{\xi_R} p_{fD}\cosh(2\xi)d\xi \tag{20}$$

下标：R 为压力影响边界；

无量纲定义为

$$t_{fD}=\frac{K_i t}{\mu\phi c_t x_f^2}$$

令试探解为

$$p_{fD}=-\frac{1}{\beta_f}\ln\left[1-\beta_f(\xi_R-\xi)\right] \tag{21}$$

将上式代入方程(20)中得

$$t_{fD}=\frac{1}{8}\left[\cosh(2\xi_R)-1\right]+\frac{\beta_f}{16}\left[\sinh(2\xi_R)-2\xi_R\right] \tag{22}$$

相应的井底压力公式为

$$p_{fD}=-\frac{1}{\beta_f}\ln\left(1-\beta_f\xi_R\right) \tag{23}$$

由(22)式和(23)式组成无限导流垂直裂缝井的试井公式。如图 6 所示，为变形系数β_f 影响的垂直裂缝井的典型试井曲线，表明介质变形对试井曲线的影响主要在后期，径向流特征段消失，压力、压力导数曲线上翘。

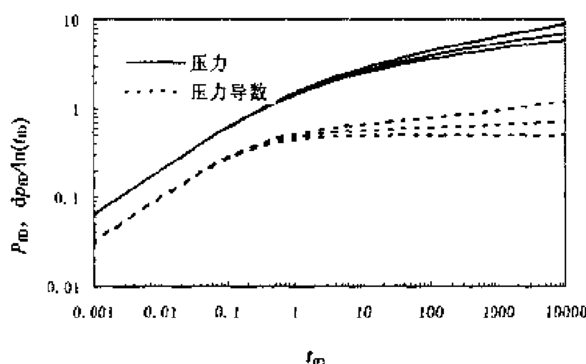


图 6 变形系数β_f影响的垂直裂缝井的典型试井曲线

(从下至上：β_f=0，0.01，0.1)

2.3 水平井的不定常渗流[12]

假定水平井为线汇，定产量生产时，

经过t_D时刻，压力影响等压椭球面的长半轴和短半轴分别为：$a = L\cosh\xi_R$和$b = L\sinh\xi_R$。

压力影响等压椭球面符合以下条件

$$\xi = \xi_R, \qquad p_{hD} = 0 \tag{24}$$

假定水平井定产，流体微可压缩，由平均质量守恒定律可得

$$t_{hD} = \frac{1}{3}\iiint_{V_{DR}} p_{hD}\,\mathrm{d}V_D = \int_{\xi_w}^{\xi_R} p_{hD}(\cosh^2\xi - \tfrac{1}{3})\sinh\ \xi\cdot\mathrm{d}\ \xi \tag{25}$$

式中

$$V_D = \frac{V}{4\pi L^3/3} = \cosh^3(\xi) - \cosh(\xi),\quad t_{hD} = \frac{K_i t}{\mu\phi c L^2}$$

假定水平井的不稳定压力试探解为

$$p_{hD} = -\frac{1}{\beta_h}\ln\{1 - \beta_h[\ln\tanh(\xi_R/2) - \ln\tanh(\xi/2)]\} \tag{26}$$

油藏内边界条件为

$$\xi = \xi_w = \sinh^{-1}\left(\frac{\pi r_w}{2L}\right) \approx \frac{\pi r_w}{2L},\quad p_{hD} = p_{hwD}$$

因此考虑启动压力梯度的水平井的井底压力公式为

$$p_{hwD}(\xi_R) = -\frac{1}{\beta_h}\ln\{1 - \beta_h[\ln(4L/\pi r_w) + \ln\tanh(\xi_R/2)]\} \tag{27}$$

将方程(26)代入方程(25)中，在影响体积内积分可得时间和影响椭球坐标的关系：

$$t_{hD} = -\int_{\xi_w}^{\xi_R}\frac{1}{\beta_h}\ln\{1 - \beta_h[\ln\tanh(\xi_R/2) - \ln\tanh(\xi/2)]\}(\cosh^2\xi - \tfrac{1}{3})\sinh\xi\cdot\mathrm{d}\xi \tag{28}$$

方程(27)和(28)组成了水平井的近似试井公式。如图 7 所示，为变形系数β_h影响的水平井的典型试井曲线，表明介质变形对试井曲线的影响主要在后期，球形流特征段消失，压力、压力导数曲线上翘。

3 结 论

以指数形式的渗透率模型为基础，通过对变形介质中多维定常和不定常渗流的分析，得出以下结论：

1) 得到了变形介质中多维定常渗流的压力分布公式；

2) 得到了变形介质中，各类油井不定常渗流的试井公式，并绘制了典型试井图版；

3) 分析表明：流量一定时，介质变形使压力消耗增大；介质变形对试井曲线的影响主要在后期，后期特征段消失，压力、压力导数曲线上翘。

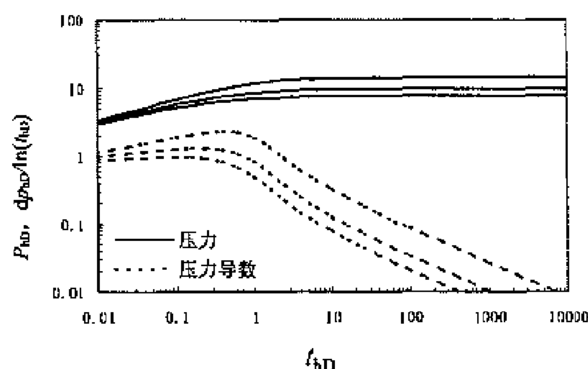


图 7 变形系数β_h影响的垂直井的典型试井曲线

(从下至上：β_h=0，0.01，0.1)

参 考 文 献

1 Fung LS. A coupled geomechanic-multiphase flow model for analysis of in-situ recovery in cohesionless oil sands. *J Cana Petr Tech*, 1992，31(6)：56~66

2 冉启全，李士伦等. 流固耦合油藏数值差分理论与方法研究. 渗流力学进展. 北京：石油工业出版社，1996：276~280

3 徐曾和，章子霞 二维轴对称耦合流动问题的解析解与应用. 力学与实践，1992，14(6)：44~49

4 Jitendra Kikani，Oswaldo A，Pedrosa Jr. Perturbation analysis of stress-sensitive reservoirs. *Soc Petr Eng Formation Evaluation*，1991 379~386

5 A Pedrosa Jr Pressure transient response in stress-sensitive formation. *Soc Petr Eng*，-15115

6 Ian Palmer，John Mansoorl How permeability depends on stress and pore pressure in coa beds：a new model *Soc Petr Eng Reservoir Evaluation & Engineering*，1998, 539~544

7 Zhang MY，Ambastha AK. New insights in pressure-transient analysis for stress-sensitivereservoirs. *Soc Petr Eng*，-28420

8 刘慈群. 单相和两相流体多维渗流问题. 第十届全国水动力学学术会议论文集，北京：海洋工业出版社，1996. 439~445

9 Muskat M.. The flow of homogeneous fluid throught porous media New York，McGraw-Hill，1946

10 宋付权，刘慈群 变形介质油藏试井分析方法 油气井测试，1998，7(2)：1-5

11 刘慈群，杨介. 垂直裂缝井的压力动态分析方法. 试采技术，1989，10(试井特辑)：22~26

12 宋付权，刘慈群. 水平井椭球渗流模型分析与应用. 油气井测试，1996，5(2)：25~29

开口泄爆过程流动与燃烧相互作用的实验研究

胡　俊　浦以康　贾　复　万士昕

(中国科学院力学研究所，北京 100080)

摘要　在体积为 0.025m^3 的柱形容器中，对 4.1%的丙烷-空气预混气底端中心点火，顶端开口泄爆过程进行了实验研究。实验考察了在大小两个泄爆面积，不同泄爆压力下容器内的压力发展历史和火焰演化过程。实验结果表明，小口泄爆时，容器内压力会继续上升，泄爆流动引起火焰演变为近莲花状；大口泄爆时，容器内压力历史出现双峰，火焰演变为近 tulip 形火焰。就不同泄爆条件下容器内泄爆流动与燃烧发展的相互作用进行了讨论。

关键词　爆炸，开口泄爆，泄爆压力，泄爆面积，火焰变形

引　言

“开口泄爆”是防止工业装置或容器内发生严重爆炸灾害而广泛应用的一种减灾技术手段[1]。开口泄爆过程是一个耦合了可燃介质流动与热化学反应的非定常过程，它受到燃料物性、容器形状、流动状态、泄爆口位置、面积、泄爆压力等诸多因素的影响。对泄爆过程中流动与燃烧相互作用机理的认识是安全泄爆设计理论的基础。

虽然基于大量实验数据和观测，逐渐形成了一系列工业防爆和开口泄爆规范[2, 3]，但由于缺乏恰当的泄爆理论指导，应用的把握性和通用性都不令人满意。由于对泄爆真实物理过程观测、认识的困难，目前泄爆机理研究还大多集中于球形，方腔形容器中心点火等较为理想的条件[4~8]。对于工业装置中广泛应用的大长径比(L/D>4)柱形容器，其容器内的等容爆炸过程与泄爆过程较之球形、方腔容器内的爆炸、泄爆过程有较大差异，目前对其开口泄爆的研究从实验观测到机理探讨都还相对缺乏，研究工作必须从基本的实验研究入手。

本研究工作的目的，就是对大长径比柱形容器的泄爆过程进行实验研究，通过对容器内爆炸压力历史的测量和火焰演化传播过程的光学记录，描述柱形容器泄爆的基本物理过程，为泄爆机理研究提供合理的模型基础。在此基础上对大长径比柱形容器泄爆过程中压力、火焰面的发展变化特点与泄爆流动间的相互作用进行了初步探讨。

1　实验装置、实验步骤及实验内容

开口泄爆实验系统由配气系统、柱形泄爆实验容器、点火与泄爆控制系统、高速摄影系统、压力监测与数据采集系统构成，示于图 1。为便于对火焰的演化过程进行高速光学观测记录，柱形容器采用透明有机玻璃制成。容器长 1m，内径 0.18m。

实验步骤为：高压电火花在容器底面中心点火起爆，当容器内压力上升至预定破膜压力，泄爆口开启泄爆；泄爆监测系统监测泄爆口开启的压力与时间，高速 CCD 与压力传感器记录整个过程中容器内火焰的发展传播和压力变化历史。

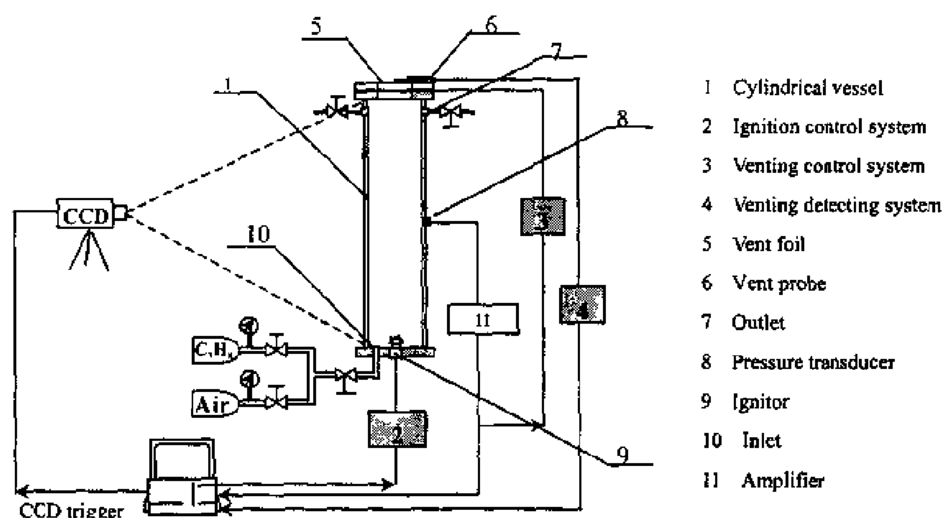


图 1 柱形容器开口泄爆实验装置

实验考察了 4.1%的丙烷-空气预混气，在底端中心点火，顶端开口泄爆方式下，容器内火焰传播过程和压力发展情况。实验中采用了直径分别为 100mm，50mm 的大小两个圆形泄爆口，泄爆压力的范围为 0~0.2MPa。容器内初始压力均为外界环境压力(以下讨论的压力均为超过环境压力的超压部分)。

2 主要实验结果

2.1 不同泄爆口面积下的压力发展历史

图 2，图 3 分别给出泄爆口直径为 50 mm，100mm（泄爆口面积与容器横截面面积之比为 V_r=7.7%，30.8%）时，不同泄爆压力范围内，容器内爆炸压力随时间发展的典型曲线。

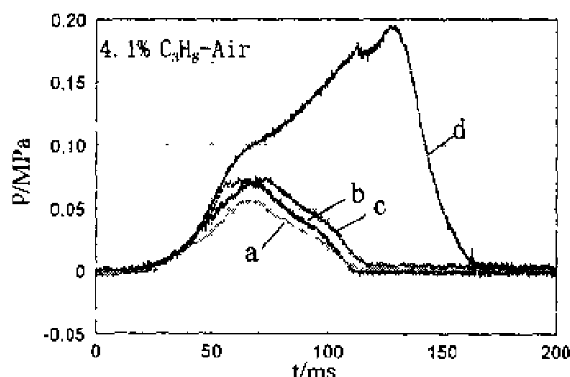


图 2 泄爆口直径为 50mm 时，不同泄爆压力下容器内爆炸压力发展曲线

泄爆压力(MPa)：a—0.02；b—0.04；c—0.07；d—0.18

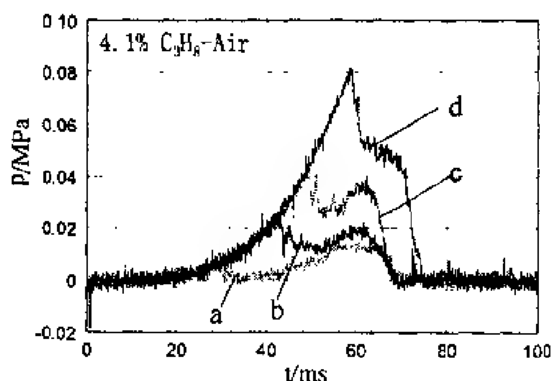


图 3 泄爆口直径为 100mm 时，不同泄爆压力下容器内爆炸压力发展曲线

泄爆压力(MPa)：a—0.005；b—0.02；c—0.05；d—0.08

对于小泄爆口泄爆(V_r=7.7%，图 2)，实验考察了泄爆压力为 0.02~0.18MPa 范围内的情况，其总的特点是：泄爆口开启后压力并未立即下降而是继续上升，达到最大压力后缓慢下降。

当泄爆口面积增大(V_r=30.8%，图 3)，在 0.005~0.1MPa 的泄爆压力范围内，表现出如下特点：泄爆口开启后压力立即下降，但随后缓慢回升，形成压力的双峰现象；达到第二峰值后，压力急剧下降。

2.2 不同泄爆口面积下的火焰演化过程

封闭条件下容器内火焰传播特性是研究泄爆影响的基础。图 4 给出了等容爆炸过程中火焰发展传播特性。照片清晰地展示了柱形容器内爆炸发展的两阶段特性[9, 10]。第一阶段(图 4a~e)：火焰从初始半球形逐渐拉长为半椭球形，此阶段容器内的燃烧可认为是绝热；非绝热燃烧的第二阶段(图 4f~k)：火焰侧面近柱形部分触壁消失，顶端反向凹陷形成所谓的“tulip”火焰[11]，并稳定传播直至爆炸结束。

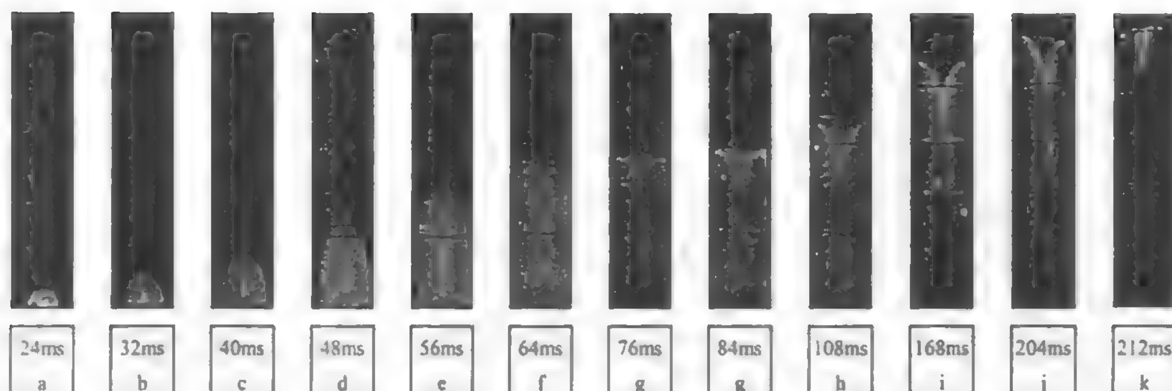


图 4 柱形封闭容器内火焰传播过程

对于小泄爆口泄爆(V_r=7.7%)，当泄爆压力在 0.02~0.1MPa 范围内时，图 5 给出了与图 2 中曲线 b 对应的典型的火焰演化照片(容器上半部照片)。泄爆口开启后，火焰面顶端逐渐变平，中心发亮并向上凸起，四周缓慢上翘，逐渐演变为近似莲花形火焰，稳定向上传播最后泄出容器。

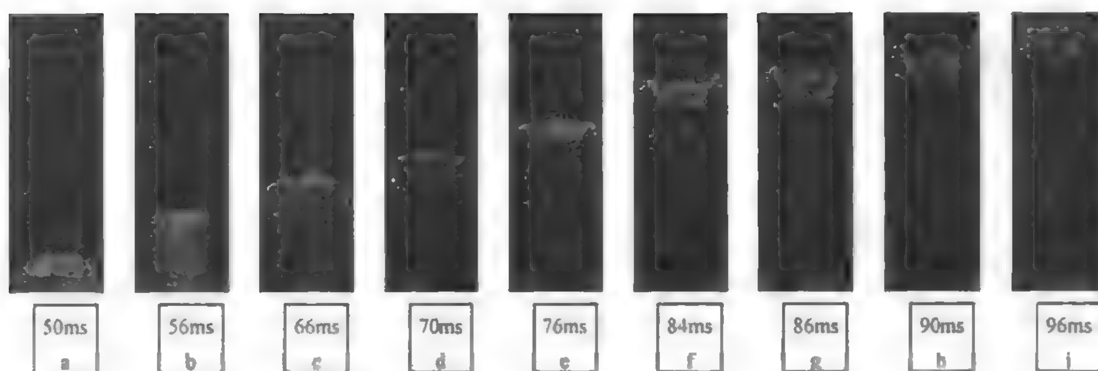


图 5 柱形容器泄爆过程中火焰传播过程

4.1% C_3H_8-air，P_v=0.04MPa，t_v=48ms，V_r=7.7%

对于大泄爆口(V_r=30.8%)，在 0.02~0.1MPa 的泄爆压力范围内，典型的火焰演化过程(容器上半部照片，与图 3 曲线 b 工况对应)如图 6 所示：泄爆口开启后，火焰传播加速，火焰面前缘变平，中心部分变亮下凹，下凹部分逐渐拉长形成类似于等容燃烧中 tulip 形状的火焰。

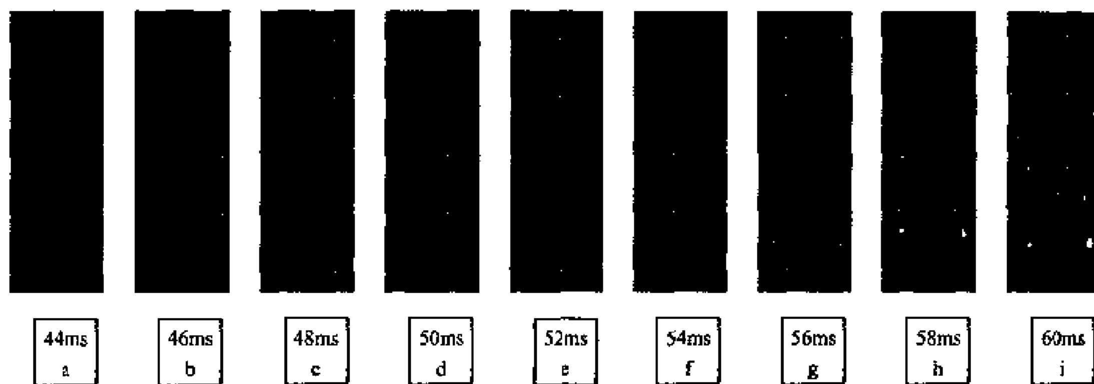


图 6 柱形容器泄爆过程中火焰传播过程

4.1% C_3H_8-air，P_v=0.02MPa，t_v=42ms，V_r=30.8%

3 讨 论

3.1 不同泄爆条件下容器内压力发展趋势

泄爆过程中容器内压力主要决定于两个过程相互作用的综合效果：一是容器内由于燃烧而致的气体的净生成率，主要由火焰面面积与燃烧速率决定；另一是气体从泄爆口流出的泄流率，它决定于泄爆口大小和容器内压力等。

泄爆口开启前，容器内爆炸发展遵从等容燃烧规律。气体的净生成率表现为容器内压力上升速率。从容器的等容爆炸压力曲线，可以得到对应不同泄爆压力时(开口瞬间)容器内压力上升速率的变化规律。泄爆口开启后，气体从泄爆口的流出造成容器内压力的下降。泄爆口开启瞬间，由气体泄流引起的容器内压力下降速率速可按照一维等熵流动估计为[5]

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}\dfrac{R\cdot T_v}{V}\left[-918A_v\left(\dfrac{p_v-p_2}{T}\right)^{1/2}\right] & (\text{亚音速泄流} \quad p_v\le 1.89P_2)\\[2ex] \dfrac{R\cdot T_v}{V}\left(-1.392\dfrac{A_v p_v}{T_v^{1/2}}\right) & (\text{音速泄流} \quad p_v>1.89P_2)\end{cases} \tag{1}$$

其中 p_v 为泄爆压力，p_2 为环境压力，T_v 为未燃气温度，A_v 为泄爆口面积，γ 为未燃气比热比，R 为气体常数。

图 7 给出了泄爆口开启瞬间，不同泄爆压力下容器内燃烧产生的压力上升速率和气体泄流引起的压力下降速率(绝对值)曲线。

对应不同的泄爆压力，比较压力的上升和下降速率曲线，可以看出：较小泄爆口(直径为 50mm，V_r=7.7%)的压力下降速率曲线 a 与等容燃烧压力上升速率曲线 A 有两个交点，当泄爆压力处于两点之间时，燃烧造成的压力上升占主导

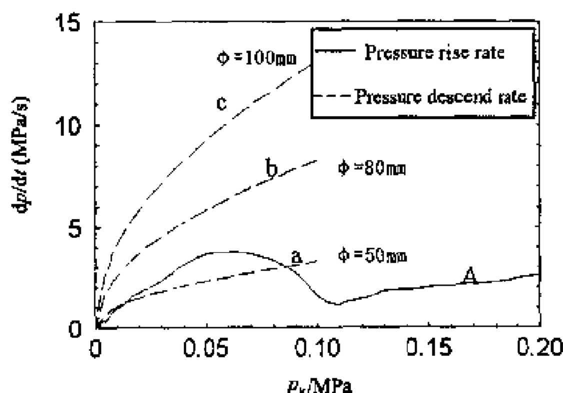


图 7 不同泄爆压力下，容器内压力上升速率与下降速率的比较

地位，泄流不足以抵消压力的净增长。这就是大多数小泄爆口实验，在泄爆压力较小时，泄爆后容器内压力继续增长的机制。随着泄爆压力的增高(燃烧的发展进入了相对平缓段）曲线 a 高于曲线 A，泄流造成的压力下降成为主导，因此小泄爆口在高泄爆压力泄爆时，压力也会表现出单调下降。较大的泄爆面积的条件下，对应的压力下降速率曲线 b，c 全都高于压力上升速率曲线 A，这就是较大开口泄爆时，泄爆压力普遍立即下降的原因。但是正如图 3 中曲线 a，b，c，d 所表示的，较大开口面积的泄爆过程中压力仍有回升现象。这是泄爆过程中燃烧的特征所在，它应是泄爆后气体流动造成的湍流增强和流动造成的火焰面变形加大所引起的燃烧加强。

3.2 泄爆流动对容器内火焰演化过程的影响

泄爆容器内压力发展历史，是泄爆流动与容器内燃烧状况综合作用的最终结果，而泄爆过程中火焰面形状特征、焰面面积以及传播速度等特性的变化，则直接反映了泄爆流动与容器燃烧相互作用的具体过程。

从火焰传播照片中，可以提取火焰传播速度的变化规律。图 8 给出了在等容爆炸和大、小口泄爆时，火焰传播速度的比较。结合前面给出的泄爆过程的压力、火焰发展历史，讨论泄爆流动对容器内爆炸发展的影响。

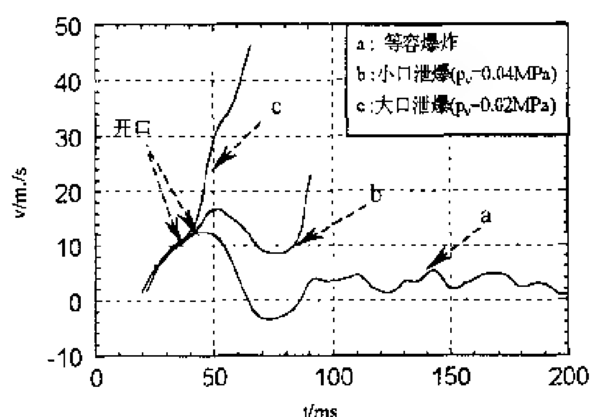


图 8 等容爆炸与开口泄爆过程中火焰传播速度比较

对于小口泄爆，从图 8 中(曲线 b)可以看出，开口后，火焰传播速度略有增大，但火焰面变形不大(图 5(a)~(b))，表明此时泄爆流动对火焰的影响还较弱，但由于此时泄流率较小，容器内压力继续上升；随着火焰面逐渐演变为莲花形(图 5(d))，容器内压力上升至最大值，泄流也随之增强，容器内压力开始下降；由于火焰面面积的增大，为莲花形火焰也保持较为稳定的速度传播(图 5(e)~(h))，使得容器内压力以较为缓慢速度下降，直至火焰泄出容器(图 5(f))，容器内压力才迅速下降至外界环境压力。

对于大口泄爆，泄爆开口后，火焰传播速度骤增(图 8 曲线 c)，火焰面迅速向 Tulip 火焰转化(图 6(a)~(c))，泄爆流动较为强烈，压力迅速下降；随着火焰变形加速，近 tulip 火焰的形成(图 6(d))，火焰面面积和泄流引起的湍流使得燃烧加剧，容器内气体生成率重新超过泄流率，压力开始回升；但由于泄流导致火焰传播速度较大，火焰迅速泄出容器，容器内压力经历短暂上升后，迅速降至常压。

总的看来，小口泄爆时，开口后容器内压力会继续上升，变化较为平稳，泄爆流动对容器内燃烧增强作用不太明显；而大口泄爆时，虽然压力衰减较快，但泄爆流动对对容器内燃烧有明显的增强效果，导致压力重新上升形成双峰。

4 结束语

开口泄爆是一个流动与燃烧相互耦合的复杂过程，合理的泄爆理论，必须正确描述泄爆

流动、容器内燃烧状况与压力变化之间的联系机制。通过对泄爆过程中，不同泄爆条件下容器内压力变化历史和火焰传播特性的观测和初步探讨，使我们有可能大体上把握大长径比柱形容器开口泄爆的基本物理过程与发展趋势，但进一步细致刻画泄爆过程中燃烧发展、演化的动力学过程，还必须借助流场测量，数值模拟等手段，才有可能揭示出其内在的联系，这是我们正在继续的工作。

本文实验工作得到了波兰宇航研究所的大力协助，并在波兰洛兹工业大学热工及制冷技术实验室协助下完成，在此表示感谢。

参 考 文 献

1 Eckhoff RK. Dust Explosions in the Process Industries. US：Butterworth-Heinemann Ltd，1991

2 VDI 3673 Part1. Pressure Venting of Dust Explosions. Dusseldorf：Verein Deutscher Ingenieure，1995

3 NFPA 68. Guide for Venting of Deflagrations. Quincy：National Fire Prevention Association，1994

4 Bradley D，Mitcheson A. The venting of gaseous explosions in spherical vessels，I-Theory. *Combustion and Flame*，1978，32：221~236

5 Nagy J，Verakis C. Development and Control of Dust Explosions. New York：Marcel Dekker Inc，1983. 166~176

6 Canu P，Rota R，and Carra S. Venting gas deflagrations a detailed mathematical model tuned on a large set of experimental data. *Combustion and Flame*，1990，80：49~64

7 Schumann St，Rastogi AK. Dust explosion venting：experiments and numerical modeling. *Loss Prevention and Safety Promotion in the Process Industries*，1995，1：231~242

8 Mercx W P M. Modeling and experimental research into gas explosions. *Loss Prevention and safety Promotion in the Process Industries*，1995，1：333~347

9 Markstein GH. Nonsteady Flame Propagation. Oxford：Pergamon Press，1964. 113~119

10 Pu YK. Fundamental characteristics of laminar and turbulent flames in cornstarch dust-air mixture. [Ph D Thesis]. Montreal：McGi l University，1987. 105~106

11 Ellis O C DE C. Flame movement in gaseous explosive mixtures. *Fuel in Science and Practice*，1928，7：502

长江口深水航道整治工程对盐水上溯的影响研究

盛根明

（上海勘测设计研究院，上海 200434）

摘要　采用 Trisula 模型对深水航道-12.5m 和-15.0m 的不同航槽深度以及 350m 和 700m 不同的航槽概化宽度方案进行了盐水入侵的比较计算，通过计算进一步揭示了深水航道工程对长江口盐水上溯所带来的影响。

关键词　数学模型，模拟计算，深水航道，影响，盐水上溯

引　言

长江口深水航道整治工程实施后，河口拦门沙区域将形成航深-12.5m、底宽 350m 的主航槽。随着通航要求的日益提高，今后有可能进一步建设成为 15.0m 航深的深水航道。

天然情况下，拦门沙似一道门坎起到削弱盐水异重流上溯的作用。长江口深水航道整治工程实施后，是否会加剧外海盐水的入侵？尤其在枯季大潮条件下，是否会对上海市现有的陈行、宝山水库以及规划中的青草沙水源地带来影响？以往，国内多家单位就上述问题，针对-12.5m 航深、350m 底宽的航槽进行过不少研究。本文采用 Trisula 模型，针对-12.5m 和-15.0m 不同的航道深度以及 350m 和 700m 不同的航槽概化宽度(350m 仅考虑航槽底宽，700m 考虑了航槽边坡)作比较计算，以进一步研究深水航道航槽的不同深度和不同宽度对盐水上溯的影响。

1　数学模型[1~3]

由荷兰 Delft 水力研究所开发研制的 Trisula 模型是一个比较有名的商业软件，在世界范围内广泛使用。Trisula 主要用于流场和浓度场的模拟计算。本文主要应用 Trisula 进行长江口的流场和盐度场的模拟计算。有关模型的原理和计算方法本文不作专门介绍。

1.1 计算区域及计算网格

1.1.1 计算区域

根据研究的需要，应尽量考虑到边界控制条件对计算成果的影响。一方面，口外的盐度边界条件应尽量不受季节变化的影响，取比较固定的值，这样对模拟各种水文条件下的盐水入侵提供了可能；另一方面，长江口深水航道整治工程规模巨大，口外边界必须足够远，才能尽可能地避免边界控制条件对计算成果的影响。为此，取计算区域上边界为天生港，口外下边界最远离岸边约 135km 以上，此处的水体含氯度基本上已接近海洋水体的含氯度。

1.1.2 计算网格

计算网格为曲线正交网格，网格的疏密根据需要确定，工程部位比较密，网格数为114×97。

1.2 地形资料

采用长江口 1996 年水下地形图，由 AUTO-CAD 系统支持的数字化仪读入计算机，并由

有关软件处理。

1.3 时间步长

计算时间步长取 $\Delta t = 600\text{s}$ 。

1.4 初始条件

$u(x,y,z) = 0.0$ m/s

$v(x,y,z) = 0.0$ m/s

$z(x,y,z) =$ 常数

$c(x,y,z) = (\text{ppt})$

1.5 边界条件

1.5.1 上边界

1.5.1.1 水流计算边界条件

Trisula 模型可采用流量或潮位作为上边界的控制条件，由于上边界天生港没有实测流量过程资料，因此实际计算时取用实测潮位进行控制。

1.5.1.2 盐度计算边界条件

天生港已不受外海盐水入侵的影响，因此含氯度（计算中盐度常以含氯度表示）取 0 即可。

1.5.2 口外边界

1.5.2.1 水流计算边界条件

Trisula 程序对口外边界既可以采用潮位也可以采用潮汐调和常数作为控制条件，模型本身具有根据潮汐调和常数计算天文潮位的功能。口外边界处没有实测潮位系列资料，因此实际计算时，进行了专门的研究：

首先采用大洋潮波计算模型计算出口外水边界上多个控制点（取 9 个控制点）的潮位过程，然后对这些潮位过程采用潮汐调和分析模型分别推求潮汐调和常数。程序取用 Q_1，O_1，P_1，K_1，N_2，M_2，S_2，K_2，M_4，MS_4，M_6 共 11 个分潮，根据计算所得各个分潮的潮汐调和常数（振幅、频率等）作为口外边界的控制条件，控制点之间采用线性插值。

1.5.2.2 盐度计算边界条件

口外水边界九个控制点上的含氯度的取值根据全潮水文测验的分析成果确定。

1.6 糙率系数[4~5]

Trisula 模型的糙率大小既可以用曼宁系数也可以用谢才系数。本文计算采用曼宁系数。

在作流速、水位率定时可以合理地变化整个计算区域的曼宁系数，使得流速、水位与实测值尽量吻合，经过反复调试，曼宁系数取 0.009~0.013。

1.7 扩散系数

由于长江口地区没有含氯度方面的扩散系数资料，因此在作含氯度的率定时，参考以前类似工作的一些成果合理地进行一些调整，使得计算成果尽量与实测成果接近。经过多次调试，纵向和横向扩散系数都取 $100.0\text{m}^2/\text{s}$。

2 模型的率定

2.1 水文条件

流速、水位的率定采用 1984 年 8 月 28 日 10 时~8 月 29 日 23 时的实测资料，计算时段大通平均流量约为 $41870\text{m}^3/\text{s}$。

含氯度的率定采用 1987 年 2 月 11 日 0 时~2 月 28 日 23 时的实测资料，计算时段大通平均流量约为 7 600m³/s。

2.2 水流率定成果

水流率定成果主要有水位、流速两个方面。

2.2.1 水位

根据七丫口、南门、石洞口、吴淞、三条港、连兴港、高桥、中浚、芦潮港、九段东等站的实测资料进行了水位的率定，限于篇幅本文仅给出了其中的七丫口、三条港、中浚、高桥站的水位计算值与实测值的比较成果（图 1）。图中实线表示实测值，虚线表示计算值，从计算结果看水位比较吻合。

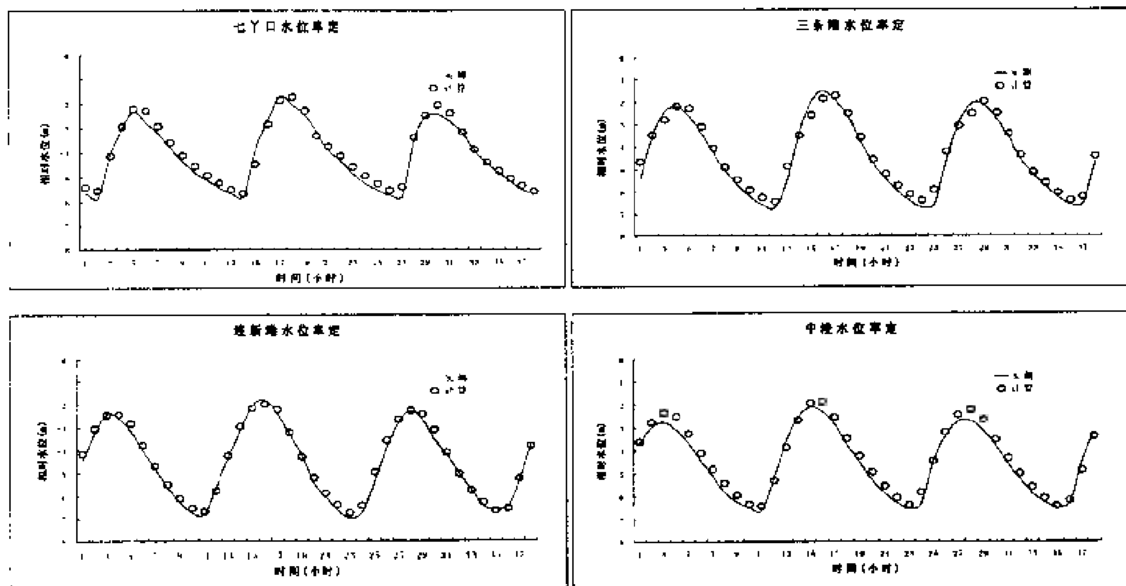


图 1　水位率定

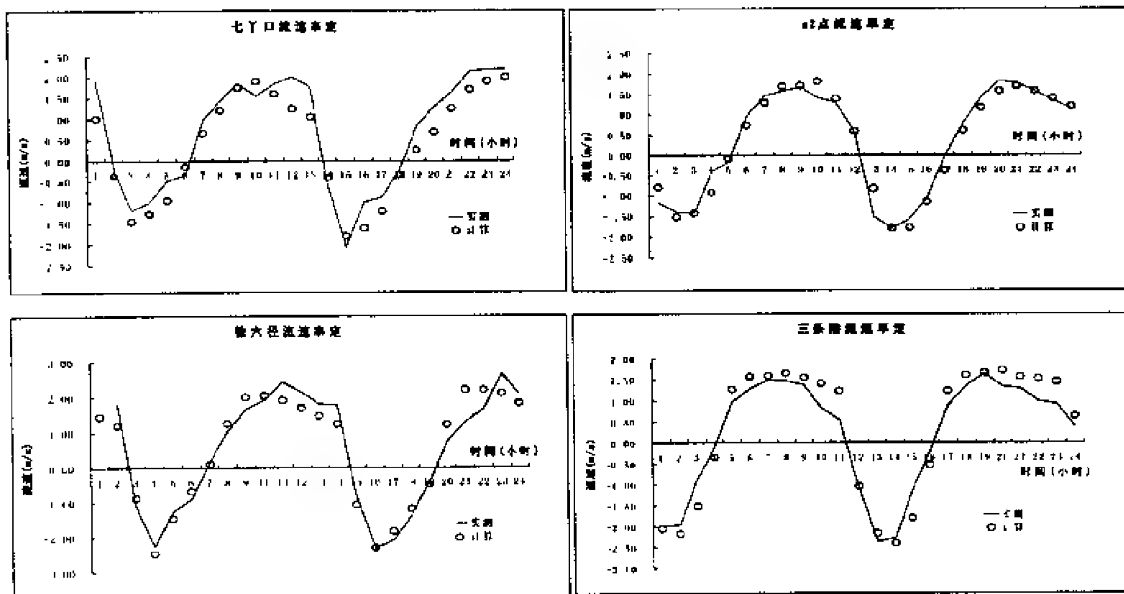


图 2　流速率定

2.2.2 流速

根据徐六泾断面、七丫口断面、三条港断面、S2（南港）、N3（北港）、SP3（南槽）、NP1（北槽）等的实测流速资料进行了流速的率定，限于篇幅本文仅给出了其中的徐六径、S2、七丫口、三条港的流速计算值与实测值的比较成果（图 2）。图中实线表示实测值，虚线表示计算值，从计算结果看流速过程比较吻合。

2.3 盐度的率定成果

图3给出的是高桥、宝钢、六效港、青龙港等站含氯度实测值与计算值的比较过程线，图中实线表示实测值，虚线表示计算值，从计算成果可以看出含氯度的变化趋势是比较吻合的。

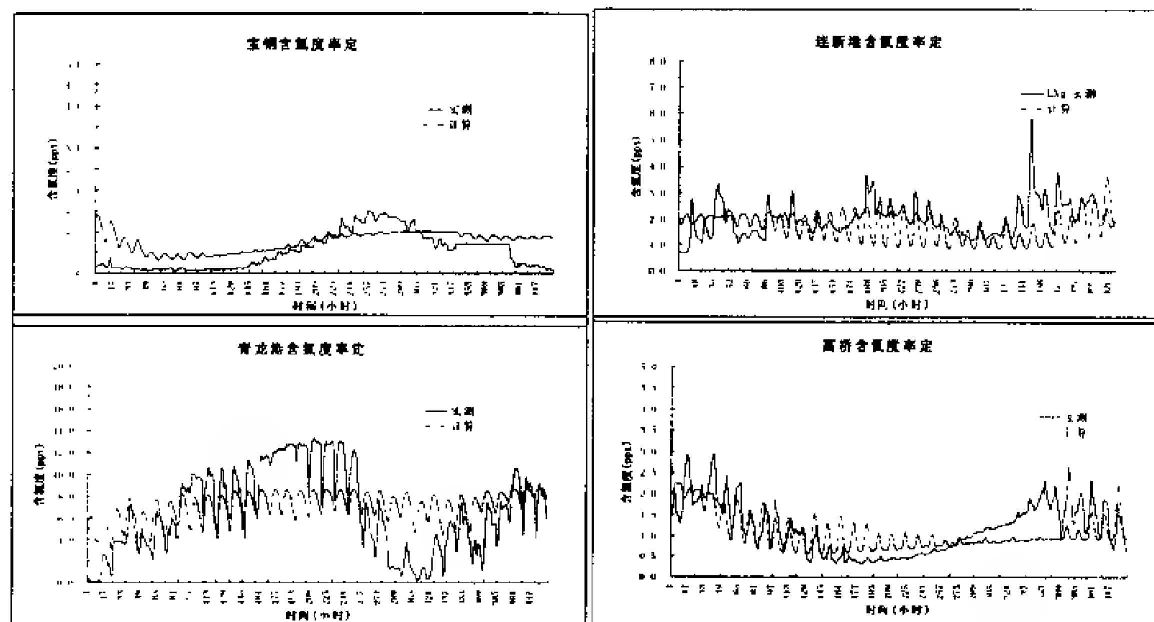


图 3 含氯度率定

3 长江口深水航道整治工程对盐水入侵的影响计算

3.1 计算时段

1987 年枯季，长江上游流量较小，为十年一遇的特枯年份，长江口盐水入侵十分严重，因此计算时段选择 1987 年枯季有一定的代表性。

盐度计算从开始到稳定需要一定的时间，为此本文计算时段取 1987 年1月1日~2月28日，而计算成果从 1987 年 2 月 11 日开始输出。

3.2 计算成果

为了解长江口深水航道航槽断面积变化对长江口盐水入侵的影响，本文计算了以下几组方案：

(1) 天然情况
(2) 航槽宽度 350m，深度-12.5m
(3) 航槽宽度 350m，深度-15.0m
(4) 航槽宽度 700m，深度-12.5m
(5) 航槽宽度 700m，深度-15.0m

本文选择长江口的高桥、吴淞、北槽-1、北槽-2、七丫口、宝钢、堡镇、南门、共青圩、六效港、青草沙-1、青草沙-2、青草沙-3、青草沙-4、青草沙-5、石洞口等站点作为工程前后的成果比较点。限于篇幅各比较点的含氯度比较过程线图不在本文例出。

4 成果分析

4.1 南北港含氯度的变化

1987年枯季实测盐度资料表明，天然情况下北港（堡镇、六效）的含氯度比南港（吴淞、高桥）明显要高。计算给出的堡镇和吴淞、六效和高桥的含氯度过程线也具有相同的趋势。但是，当深水航道整治工程实施后，南、北港的含氯度十分接近，这说明长江口深水航道整治工程实施后，对南港的影响要明显大于北港。

4.2 盐水上溯的影响范围

长江口深水航道整治工程对盐水入侵的影响范围视航道的规模不同而有所不同：

方案 2 和方案 3 的影响范围相对较小，吴淞以下为“强影响区”，工程后含氯度增加一般超过 30%，石洞口和吴淞之间为“影响过渡区”，石洞口以上基本不受影响。 越近下游影响越大，对北槽的影响最大，南港次之，对南支下段影响相对较小。

方案 3 的影响程度要比方案 2 略强，这说明如果仅考虑加大主航槽的航深，则对航道断面积的改变相对较小，对盐水入侵的影响也不会很大。

方案 4 和方案 5 的影响范围比较大。石洞口以下为“强影响区”，宝钢和七丫口之间为“影响过渡区”，七丫口以上基本不受影响。

同样，方案 5 的影响程度要比方案 4 的略强。

上述成果表明，航道浚深后，边坡相应延长，航道的实际过水断面积将增加，计算中如果考虑到这一因素，则工程后盐水入侵的距离将会有所增加。

5 结 论

(1) 口外水边界采用大洋潮波计算成果，通过调和分析得到调和常数，可提高模型的模拟精度。

(2) 长江口深水航道整治工程对南港盐水入侵的影响要比北港大。

(3) 不同深度的航道对长江口盐水入侵的影响有所不同，一般来说航道增深影响会增大，但增大不明显；

(4) 如考虑边坡的影响，加大主航槽的概化宽度，则工程后盐水上溯的距离会加大。

(5) 上海市规划拟建的青草沙水源地取水口位于北港一侧，长江口深水航道整治工程实施后对北港的影响较小，因此对青草沙水源地不会带来明显的不利影响。

(6) 计算结果表明，即使将主航槽概化成 700m 宽，航深 15m，在长江特枯水文年条件下，工程后石洞口以上基本不受影响。因此，工程后对上海市现有的陈行和宝钢水库也不会带来明显不利的影响。

参 考 文 献

1 Mahmood k，Yevjevich V et al. 著. 林秉南等译校. 明渠不横定流. 北京：水利电力出版社，1987

2 江德灌. 计算水力学理论与应用. 南京：河海大学出版社，1989

3 W 金士博著，杨汝今，刘兆昌等编纂. 水环境数学模型. 北京：中国建筑工业出版社，1987

4 韩乃斌，蒋星科. 长江口南北支二维氯度数学模型. 海洋工程，1996

5 盛根明. 长江口北支围垦对南支水质改善的预测. 上海水利水力技术，2000

珠江口盐场高度分层下的水动力特性研究 1)

包　芸　任　杰

(中山大学近岸海洋研究中心，广州 510275)

摘要　采用基于 Backhaus 的三维斜压模式计算珠江口水动力特性。改进了原模式的盐度差分格式和方程，采用二阶精度差分格式并引入了物理扩散项。改进后盐度差分方程能较好地反映珠江口盐度成层现象。给出了两个点的水位数值模拟与实测值的对比，给出了包含八个口门珠江口的计算潮流场及盐场，讨论了盐度高度成层条件下珠江河口水动力特性。

关键词　数值模拟，珠江口，三维斜压模型

引　言

珠江是我国华南地区第一大河，其周边地区是我国经济最活跃的区域之一。珠江河口湾及内陆架地带的环境状况对该地区的经济的发展至关重要。数值模拟珠江河口水动力的特点是该区域海洋环境立体监测的一个部分，也是整个水质、泥沙等海洋环境数值 的基础。珠江河口是世界上最复杂的河口之一，河网系统纵横交错。入海口门众多。近两年通过对珠江口大量的实测资料分析，发现夏季的珠江河口层化现象异常显著，盐度垂向梯度大。因此，采用三维斜压模型模拟珠江河口的水动力特性，较好地反映出夏季盐度高度分层这一现象，对整个数值模拟都显得十分重要，对研究珠江河口的水动力环境以及对粤、港、澳的经济发展都有很大价值。

德国汉堡大学的 Backhaus 在 80 年代中提出了一个研究陆架海的三维斜压模式，该模式在全世界许多陆架海上得到了广泛的应用。本文在采用基于 Backhaus 的三维斜压模式模拟珠江河口盐度发层的研究过程中，发现原模式在缺少盐度扩散项的情况下，盐度垂向混合充分，盐度等值线基本垂直。完全无法模拟出高度成层的珠江河口夏季垂向盐度分布。基于此，我们对盐度守恒方程进行了改进，主要修正了原模式盐度计算差分格式及方程求解形式，改进后的结果可以较好地反映珠江口盐度分层现象。数值模拟了夏季丰水期珠江口水动力特性，图 1 包括八个口门在内的珠江河口计算海区范围。南北距离约 110km，东西距高 150km，并标出了伶仃洋西槽纵剖面位置，模拟时间为 1999 年 7 月 21 日-26 日，资料来源于“818/09/01 珠江环境立体监测示范区”7 月航次综合测量。

1　偏微分控制方程

所用的坐标系是右手笛卡儿坐标系，水平方向为 X，Y 方向，垂直向上为 Z 轴方向，Z 轴的零面取在静水面上。模式所用的偏微分方程为

连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{1}$$

1)　国家 863-818-09-01 资助项目

x 方向的运动方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+A_H\nabla^2u+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_v\frac{\partial u}{\partial z}\right)+F_x \tag{2}$$

y 方向的运动方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}-fu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+A_H\nabla^2v+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_v\frac{\partial v}{\partial z}\right)+F_y \tag{3}$$

垂向静力平衡方程

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g \tag{4}$$

海水的状态方程

$$\rho=\rho(T,S,p)=\rho_0+\rho' \tag{5}$$

温度守恒方程

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}=K_H\nabla^2T+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_v\frac{\partial T}{\partial z}\right)+S_T \tag{6}$$

盐度守恒方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial z}+v\frac{\partial S}{\partial y}+w\frac{\partial S}{\partial z}=K_H\nabla^2S+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_v\frac{\partial S}{\partial z}\right)+S_S \tag{7}$$

2 计算模式

本文数值计算采用基于 Backhaus 的三维斜压模式，该模式首先对原偏微分方程在垂向层 h 进行积分，得到相应的层积分输运方程、盐度和温度方程；而后对层积分方程进行差分化。其中，盐度和温度方程均采用显格式。压力梯度项分解为正压和斜压两个量项，对运动方程中的正压梯度力项，垂向应力项引入半隐式差分格式。为克服在时间向前积分过程中，因科氏力而引起的线性不稳定，在运动方程中，对科氏力项引入一个稳定的二阶旋转矩阵。变量在网格上的分布采用常用的 Arakawa-C 格式。

3 改进盐场模拟

本文分析和研究珠江河口盐场的模拟和改进。

3.1 原模式中盐场计算方程及差分格式

原模式在模拟盐度守恒方程中只考虑了对流项

$$\frac{\partial S}{\partial t}+w\frac{\partial S}{\partial z}=O^s,\quad O^s=-u\frac{\partial S}{\partial x}-v\frac{\partial S}{\partial y}+S_S$$

其中数值计算采用一阶精度的可选择性向量逆风格式，求解为显格式。

在模拟过程中我们发现，盐场分布即斜压对整个潮流场的计算结果影响很大，随意给出盐度初场，计算值将可能偏离于实际值而产生较大的流场误差，而且修正缓慢。因此盐度初场分布要基本合理。

原模式很难模拟出盐度高度分层现象，经分析研究，发现 Backhaus 模式原本是一个陆架海模式，虽然考虑了斜压的影响，但是由于一般情况下盐度梯度不大，由一阶精度的逆风差分格式的截断误差所产生的数值耗散也不大。而珠江口盐度高度成层，应采用二阶精度的差

分格式，以避免数值耗散误差。并加入略去的物理扩散方程，这才能更好地反应珠江河口盐场特征。

3.2 改进后的盐场计算方程及差分格式

考虑扩散影响的盐度方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t}+w\frac{\partial S}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(K_V\frac{\partial S}{\partial z}\right)+O^s$$

$$O^s=-u\frac{\partial S}{\partial x}-v\frac{\partial S}{\partial y}+K_H\nabla^2 S+S_S$$

其中，K_v为垂向涡动扩散系数，K_H为水平涡动扩散系数。

对垂向扩散项采用半隐式差分格式：

对于半隐式格式$\theta=1/2$

垂向对流项采用中心差分格式：

差分方程中的水平对流项和水平扩散项均采用二阶精度的中心差分格式，以减小数值耗散误差，综合两个差分方程可以得到盐度的完整的垂向半隐式方程，它是一个三对角方程，采用常用的追赶法求解。

3.3 盐度垂向分布改进前后的对比

图 1 为从虎门至桂山岛一线的纵剖面垂向盐度分布改进前后的对比图，图上可见，盐度分布成层性有了很明显的改善，改进后的盐度等值线基本呈水平状，显示出了盐场高度分层现象。这说明盐度方程差分格式的改进十分有效。

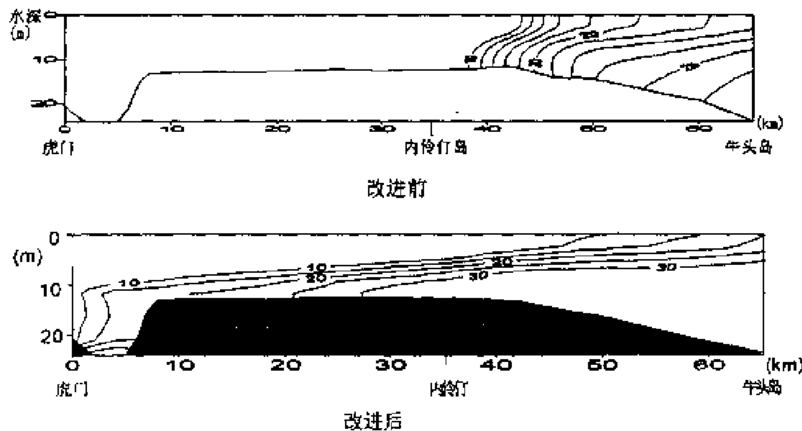


图 1 纵剖面垂向盐度分布改进前后的对比图

4 流场及盐场数值模拟

模式计算的时间步长为$\Delta t=45\text{s}$，空间步长$\Delta x=\Delta y=500\text{m}$。计算中的海域开边界条件以水位实测值给出。计算主要针对珠江河口夏季丰水期流场及伶仃洋盐场高度成层现象进行模拟研究。

4.1 水位

图 2 给出了赤湾和大横琴两个站的水位计算值与实测值的对比结果。模拟时间为 1999 年 7 月 21~26 日。由于计算关系，时间对应为 145~288h 的六天结果。实线为计算值，虚线为实测值。总的来讲，对比结果基本令人满意。赤湾的潮差明显大于大横琴的潮差。

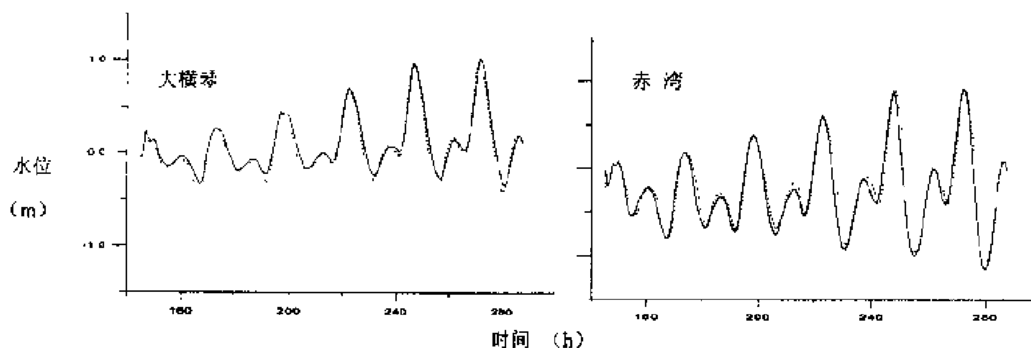


图 2 赤湾和大横琴水位计算值与实测值的对比

4.2 流态分析

图 3 为涨急流态的典型流场图，图 4 则为落急流态的典型流场图。

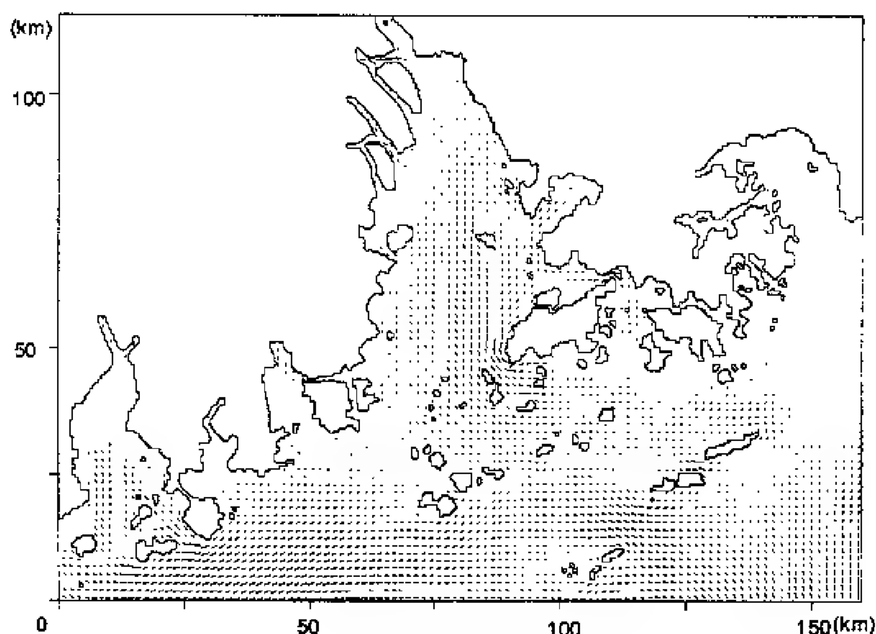


图 3 涨急流态

涨急流态（图 3）

珠江口潮汐为不规则半日潮，落潮历时比涨潮历时长。与落急时相比，流速则要小，整个区域的流速基本上不超过 1.0m/s。

从外海涌来的潮流在伶仃洋汇集，到达大濠岛附近的湾口以后，东侧的流速要大于西侧，这是绕岛射流的结果。流速在这里达到最大，刚好 1.0m。继续向湾内前进，地形放宽，则流速开始逐渐变小。水流进入复杂的香港海区以后，流向随地形的改变而改变，而流速大小一直保持在比较低的水平。

来自磨刀门的速度较大的径流，出海以后受口门放宽和上溯潮流的双重影响，流速迅速降低，在大横琴和三灶岛之间形成了流速低流速区，流速可达到 0m/s。

黄茅海海区流向基本上与岸线平等。到达虎跳门和崖门出口以后，受径流顶托而在口外形成低流速区。

落急流态（图 4）

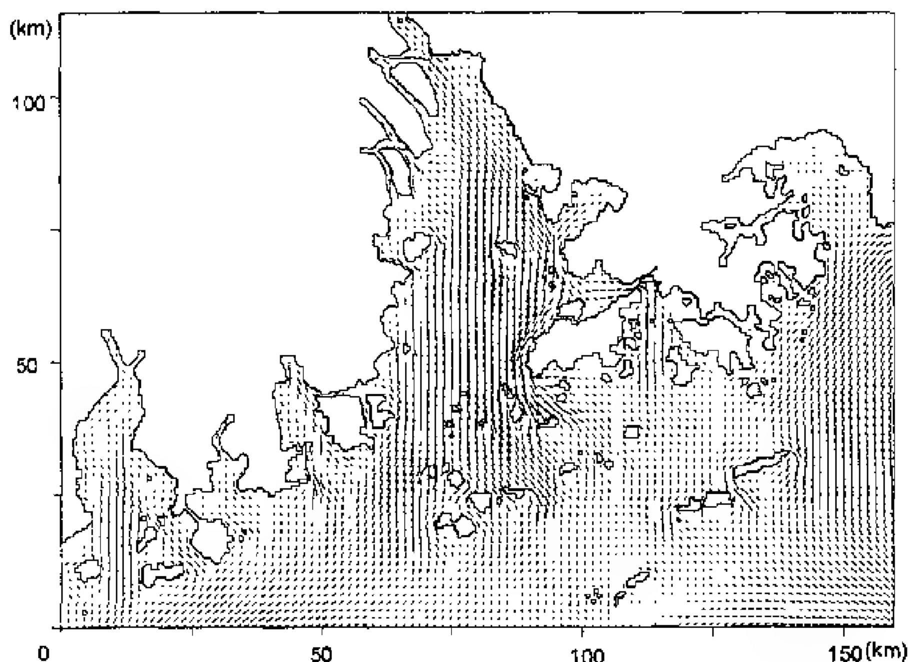


图 4　落急流态

从流场图上看，东四口门处流速不是很大，但是落潮下泄到内伶仃岛附近，流速达到 1m/s 左右，到香港大濠岛西面，由于口门的宽度受大濠岛的影响而缩窄，流速急剧增大到 2m/s 左右，到达万山群岛附近，海域开阔，流速逐渐降低，到大小万山群岛附近，流速不足 0.5m/s。受地形影响，通过香港暗士顿水道泄流出去的潮量很少，在大濠岛东北角上，由于水道很窄，流速也较大，可达 1m/s。

4.3 盐场

图 5 是涨平时珠江河口表层盐场分布情况。受径流的影响，口门有淡水流出，并受科氏力影响，淡水流向西偏。而潮汐的影响，使涨平时盐度分布线向西倾斜，落平时盐度分布线较涨平时向南偏移。整个珠江河口的盐场分布盐度变化很大，从 0‰到 35‰。伶仃洋内伶仃岛附近表层盐度随时间变化涨平时约为 10‰，落平时约 2‰。

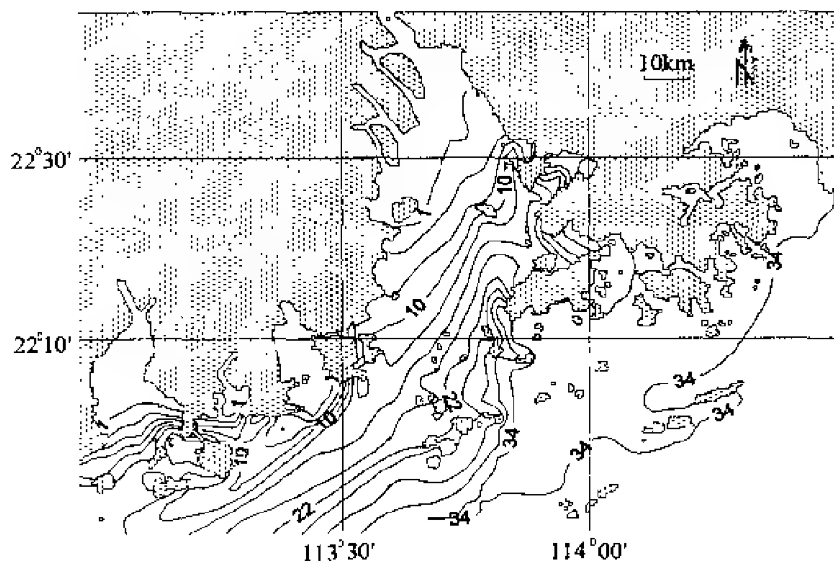


图 5　涨平时表层盐场分布

图 6 为伶仃洋西槽纵剖面盐度垂向分布情况。图中可以看到盐度高度成层现象。内伶仃岛处表层盐度不到 10‰，而底层高达 30‰。高盐水底层入侵已接近虎门口。这是近年来伶仃洋出现的盐场分布的新的现象，与实测结果一致。

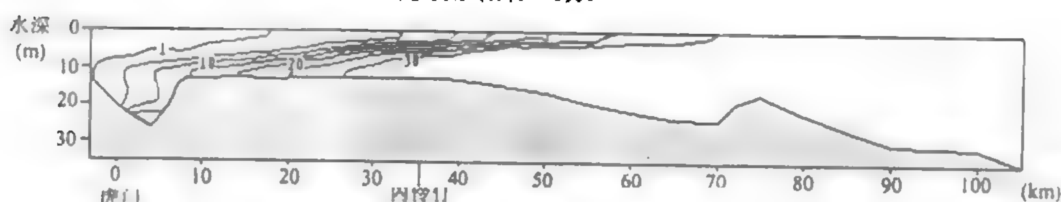


图 6 伶仃洋西槽纵剖面盐度垂向分布

4.4 西槽单宽密度环流

在一个全潮平均状态下，若平均流速在表层指下游，底层指向上游，则河口存在垂直密度环流。夏季南海北部为高温高盐的南海水团控制，当表层陆架水因珠江泄出大量淡水而向海推起进时，深层陆架水向岸运动，产生上升流，这是表层淡水离岸运动引起的一种补偿作用，底层上溯的高盐陆架水涌升至表层同口门淡水或冲淡水一起下泄，使表层离岸流远大于出口径流。在 7 月 26 日的潮平均状态下，在珠江口西槽纵断面上，每隔 4km 选取一点，分上下层作单宽水量的全潮垂向平均，得垂向水量输运图（图 7）。从图中可见，在距虎门口 15km 处上下层流向一致，还无环流产生，从 19km 的地方就开始出现垂向环流，向外海有增强趋势。珠江河口由于这种非潮汐河口环流的作用，表层下泄流是底层上溯流的约 2~3 倍。在美国密西西比河，密度环流引起的表层下泄流可达底层上溯流的 19 倍。至于密度环流为何从 19km 才开始发生，它与虎门口的双向射流关系如何，以及环流对水量输运和泥沙及水质的影响还有待进一步研究。

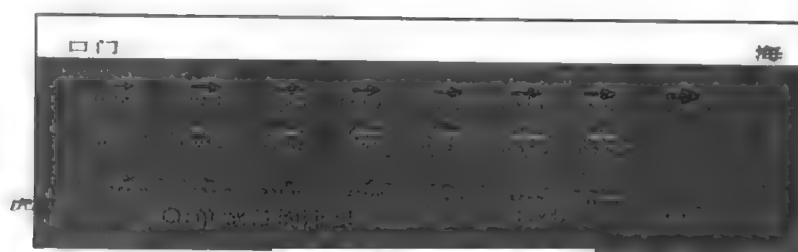


图 7 西槽单宽垂向水量输运

5 结束语

本文改进了基于 Backhaus 的三维斜压模式中的盐度差分方程，在差分格式上采用了具有二阶精度的中心差分格式，避免了原模式中一阶精度格式带来的数值扩散影响，并加入了原模式略去的物理扩散项，在求解上采用垂向半隐式格式，使盐度数值模拟更加符合和反应真实的物理特性。计算模拟了 1999 年 7 月夏季丰水期珠江河口及近海内陆架的流场和盐场。改进后的盐度差分格式及方程则能更好地反应出夏季盐度高度成层现象。流场两个站的水位计算结果与实测值对比较吻合，流场流态分布合理。盐场分布受径流和科氏力影响向西倾斜，盐度分布变化很大，呈现高度成层现象。并在珠江河口西槽模拟出密度环流现象。

参 考 文 献

1 Backhaus JO. A semi-implicit scheme for the shallow water equations for application to shelf sea modeling. *Continental Shelf Research*, 1983, 4(2): 243~254

2 Backhaus JO. On the atmospherically induced variability of the circulation of the northwest European shelf sea and related phenomena—A model experiment. *Modeling Marine System*, 1990, 1: 94~134

沙纹床面振荡流底层大尺度涡结构演化的数值模拟及可视化研究 1)

*,**蒋昌波　*白玉川　*曾　谦

*(天津大学河流海岸工程泥沙研究室，天津 300072)

**(长沙交通学院河海工程系，长沙 410076)

摘要　涡动沙纹广泛存在于海滨区，很大程度上决定着床面阻力、波浪衰减以及泥沙输运。考虑到涡动沙纹流动结构由于受边界条件影响，可以简化为二维流动，采用大涡模拟方法对其流场和涡的形成、演化及破碎全过程进行了数值研究，并建立面向对象的动态演示系统。

关键词　振荡流边界层，大涡模拟法，涡动沙纹

前　言

波浪作用下的沙纹形态很多，但可归纳为的两种典型沙纹形式：滚动沙纹和涡动沙纹。涡动沙纹是沙纹中最重要的一种，涡动沙纹又称轨道沙纹，因为沙纹的长度是波浪质点运动轨迹的函数。涡动沙纹的剖面形状为三角形，两侧的斜坡都很平缓。沙纹周围的流动特性取决于沙纹背水面产生的涡的强度，泥沙输运则是由泥沙滚动到沙纹的另一侧，致使沙纹不断向前运动。这种涡动沙纹广泛存在于滨海区，很大程度上决定着床面阻力、波浪衰减以及泥沙输运。然而，由于在波浪作用下沙纹绕流特性及泥沙运动非常复杂，对它的研究还很有限。

Du Toit & Sleath[1]，Sato et al[2]对振荡流作用下的沙纹绕流结构进行了详细的实验研究，利用雷射多普勒测速仪分别测量了固定光滑、粗糙沙纹近底的流速分布。近年来大量的研究工作主要集中在数值研究方面，最早 Lounguet-Higgins[3]利用离散涡的方法建立数值模型，Blondeaux & Vittorri[4] 则根据涡量输运方程对层流情况进行探讨。近来 Sato 等，Aydin[5]，Tsujimoto et al.[6]，Fredsoe et al.[7]等利用双方程模型对沙纹绕流结构及悬沙输运进行了数值研究，结果一定程度上反映了绕流的平均特性。但以上湍流模型获得是流动的平均量，并不能很好地描述绕流的紊动特性，以及分离流的特征量和涡的动力特性，有必要建立更高级的数值模型进行研究。

本文考虑到沙纹作用下的绕流结构具有强二维特性，建立了立面二维曲线坐标下的大涡水流数值模拟模型，对振荡流作用下的绕流特性进行了细致的研究，并结合动态演示系统对其模拟结果进行分析[8]。

1　数值模型

1.1 控制方程

不可压缩流动的基本方程利用高斯滤波函数滤波后得到

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} = 0 \tag{1}$$

1) 国家自然科学基金(No. 59890200)，天津市基金(No.983702011)和华东师大河口、海岸国家重点实验室基金(No.98001)资助项目

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\overline{u}_i\overline{u}_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2\overline{u}_i}{\partial x_j\partial x_j}-\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}+\frac{g}{\rho}\delta_{i3} \tag{2}$$

式中，$i=1,2,3$ 对应 x,y,z 坐标轴，u_i 为流速，p 为压力，ρ 流体密度。

考虑到流动绕过沙纹床面，是充分发展的湍流运动，不考虑流体的分子黏性系数的作用，具有较复杂的边界形状，采用边界贴体坐标将物理域转化到规则的计算域。针对二维流动采用以下变换关系

$$\xi_1=x_1 \qquad \xi_2=x_2+\eta(x_1) \tag{3}$$

得到水流运动的连续方程及动量方程

$$\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial \overline{u}_2}{\partial \xi_2}-\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial \eta}{\partial \xi_1}=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t}+\overline{u}_j\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial \xi_j}-\overline{u}_1\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial \xi_2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial \xi_1}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \xi_i}+\frac{\partial \overline{p}}{\partial \xi_2}\frac{\partial \eta}{\partial \xi_1}-\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \xi_j}+g\delta_{i3} \tag{5}$$

在大涡模拟中，小尺度涡的作用通过亚格子尺度应力(SGS)来模拟，$\tau_{ij}=\overline{u_iu_j}-\overline{u}_i\overline{u}_j$，采用常用的 Smargorinsky 模型

$$\tau_{ij}=-2\nu_t\overline{S}_{ij}=-2C^2\overline{\Delta}^2\left|\overline{S}\right|\overline{S}_{ij} \tag{6}$$

式中：ν_t 亚格子涡黏系数，C 模型参数($C=0.35$)，$\overline{\Delta}$ 滤波尺度，$\left|\overline{S}\right|=(2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij})^{1/2}$，其中

$$\overline{S}_{ij}=\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) \tag{7}$$

1.2 数值方法和边界条件

基本控制方程采用 SMAC 求解，计算区域如图 1 所示，两侧的的边界条件采用周期性的边界条件，可以反映多个沙纹作用下的流动情况，计算域的上边界采用对称边界条件

$$\frac{\partial}{\partial x_2}=0 \quad 和 \quad u_2=0 \quad \text{at } y=D$$

面底部边界则采用无滑移边界条件

$$u_1=0 \quad 和 \quad u_2=0 \quad \text{at } y=0$$

由于在水平方向流动来回振荡，考虑波浪的作用，在计算域内添加一项周期性的驱动力，来模拟振荡运动。

对所建立的数值模型的模拟结果分别和 Jesen[9]平坦床面的试验数据以及 Jorgen et al.[7] 动沙纹的试验数据进行了比较，表明该数值模型能够用来研究波浪作用下沙纹附近流动结构，详细的对比情况见文献[10]。

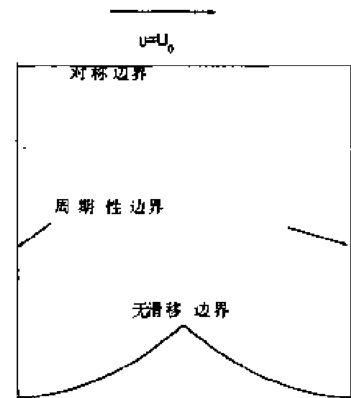


图 1 计算区域示意图

2 模拟结果及分析

涡动沙纹绕流结构的一个重要特性是涡的动力特性，可以通过流场情况来描述。使用一般湍流模型 (k-ε，k-ω)得到的是流动的平均场，而通过大涡模拟方法可以得到是流动瞬时场，能够真正地描述绕流结构的紊动特性。

图 2 清楚地演示了波浪作用下一个周期内，沙纹附近涡的形成、演化及破碎的全部过程。流动绕过沙峰会产生分离，随着外部流动速度的增加，分离形成涡结构也迅速扩大，其最大

尺度并不对应于外部自由流动速度最大时刻，而是在外部自由流动减速之后的短时间里达到，相位大约在$\omega t=150^{\circ}$。既使外部流动速度开始减速，而所形成的涡结构，一方面向邻近沙纹运动，一方面向外流区扩张。流动转向后，涡结构则进入外部主流区，并逐步扩散。相位大约在$\omega t=20^{\circ}$左右，涡越过沙峰后逐渐消失，同时沙纹背面又形成新的分离涡。

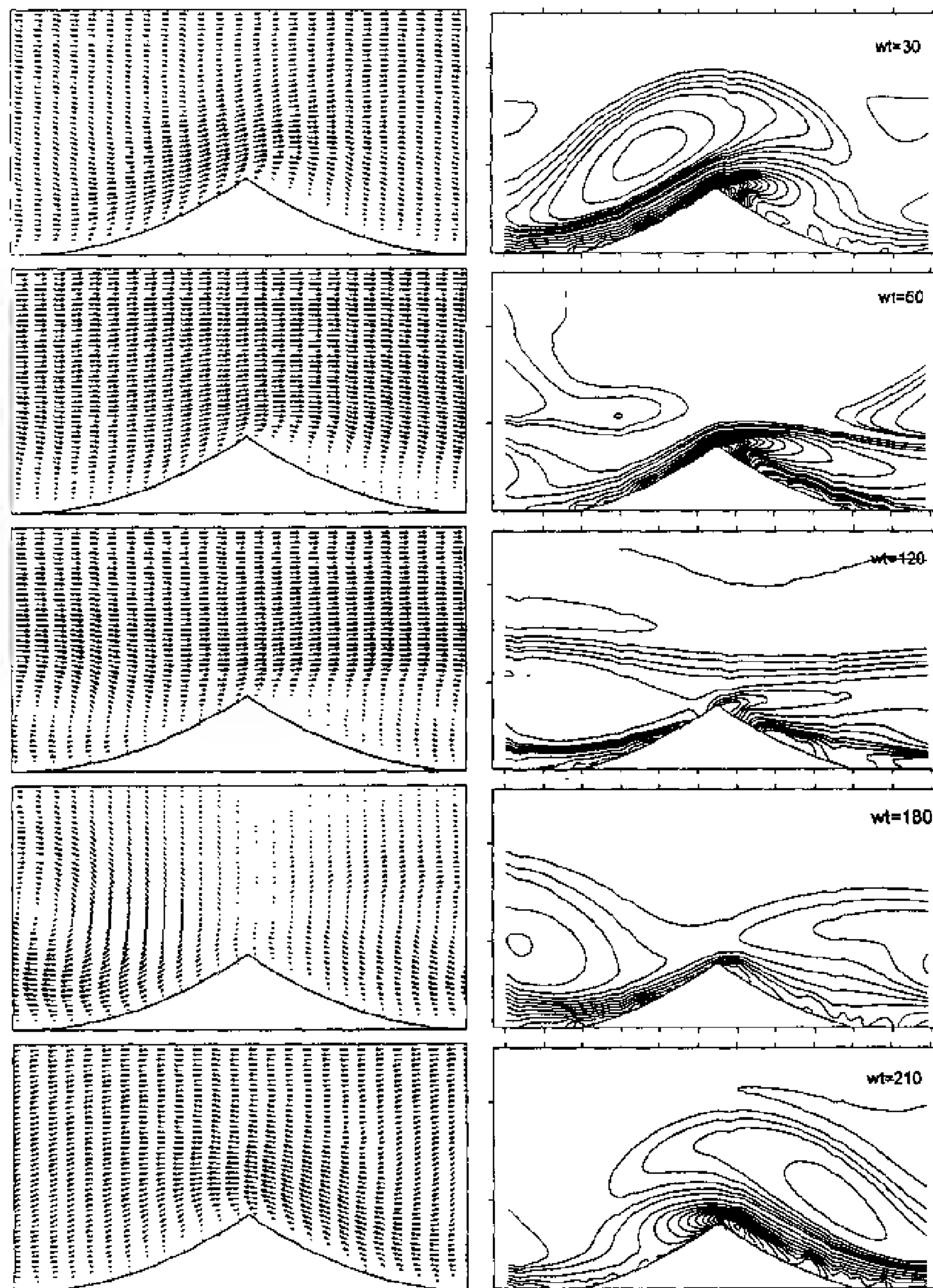


图 2　沙纹绕流流场及涡量场

绕流形成的涡结构的尺度大小对于泥沙运动非常重要，它关系两个沙纹是否会相互作用，上一个沙纹形成的涡是否会对下个沙纹产生冲刷。通过数值模拟了不同的l/a，式中 l 为沙纹长度，a 流体质点运动轨迹的最大振幅。图 3 是不同l/a值，相同相位下的涡量分布，可以看出对于沙纹尺度短或外区流动速度强时（$l/a=0.6$），涡能够延伸到相邻沙纹，并对

其产生冲刷；当沙纹尺度长且外部流动弱时（$l/a=2.4$），涡不能延伸到相邻沙纹，不会产生相互作用。

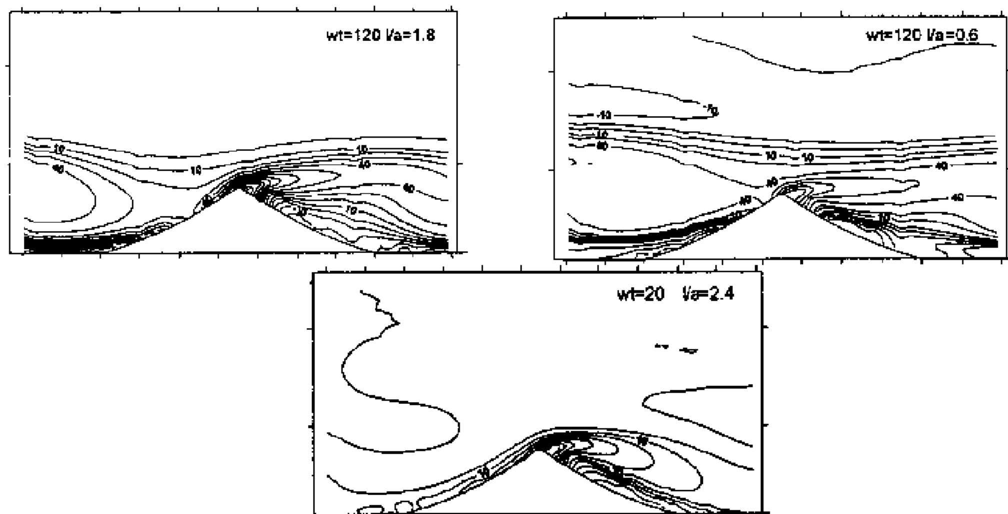


图 3 不同 l/a 对应的涡量场(phase $wt=120°$)

3 结语和讨论

利用 2D-LES 对振荡流作用下沙纹床面附近的流动结构进行了数值分析。模拟结果再现了沙纹附近的涡的动力特性，并对主要影响因素做了探讨，表明二维大涡模拟对于具有强二维涡动结构的数值研究非常有效。

在工程中经常会遇到一些情况，如流动受到边界影响较强，在某一个方向的较大驱动力，这时可以将流动简化为二维流动，采用二维的大涡数值模拟分析，大涡模拟法比 k-ε 和 k-ω 等模型的可调参数少，应用流动范围广，但由于要使用比较细的网格，特别是在近壁附近，导致高昂的计算费用，即使这样，大涡模拟在工程中仍有广阔的应用前景。

数值模拟所产生的数据量大，不够直观，而动态演示系统则可将数据以动态图象逼真的演示出来，达到虚拟现实的效果，本研究开发的动态演示系统基于 C++语言，设立了面向流动计算模型的接口，只要按指定格式输入数据，便可进行动态演示，具有较好的开放性和适应性。

参 考 文 献

1 Du Toit & Sleath. *J Fluid Mech*, 1981, 112: 71~96
2 Sato S et al. *Coastal Eng*, In Japan, 1986, 29: 65~78
3 Lounguet-Higgins MS. *J Fluid Mech*, 1981, 107: 1~35
4 Blondeaux P and Vittori G. *J Fluid Mech*, 1991, 226: 257
5 Aydin I et al. *Coastal Eng*, In Japan, 1988, 30: 11-24
6 Tsujimoto G et al. *Coastal Eng*, In Japan, 1991, 34: 178~189
7 Fredsoe J, Andersen KH and Sumer M. *Coastal Engineering*, 1999, 38: 177~221
8 曾谦，白玉川. 开放二维流场多媒体动态演示系统的实现. 待发
9 Jensen BL et al. *J Fluid Mech*, 1989, 206: 265~297
10 蒋昌波. 博士论文，天津大学，2001

青草沙水源地库址方案数值比选

吴　卫　林顺才*　刘　桦

(上海交通大学，上海 200030)　*(上海勘测设计研究院，上海 200434)

摘要　长兴岛青草沙滩地是上海市唯一可建大型水库的水源地。应用沿水深积分的平面二维非定常流动数学模型，采用接近于多年平均落潮量的水文条件，对推荐的青草沙水源地库址两种工程方案进行了模拟及对比分析，提出了倾向性意见，为决策单位提供科学依据。

关键词　潮流，数学模型，长江口

引　言

上海市城市供水一直是一个困扰人们的问题。根据上海市公用事业局预测，至 2010 年上海城市供水在枯季需 300 万 m³/d 由长江引水解决，而目前情况远远满足不了这要求。在河口地区建库蓄淡对解决上海市城市供水无疑具有巨大的潜力。然而，库址选择和取水方式受制于长江口水域的水沙运动、盐水入侵及河床演变等复杂问题，因此有许多科学问题有待研究[1]。青草沙水域位于长江口南支，南北港分流口以下，长兴岛头部的中央沙浅滩、长兴岛北侧青草沙和南侧瑞丰沙等水域范围。初步研究表明，该水域环保条件好，且有大片滩地可供建造水库，可以考虑作为对上海城市供水、远景长江引水水源地[2]。

库址选择是一个综合性很强的研究课题，通过对河势演变及稳定性等分析，拟定了两组水库平面布置方案。本文利用沿水深积分的平面二维非定常流动数学模型，对这两组水库工程方案进行了模拟计算及对比分析。

1　数学模型

1.1　基本方程

沿水深积分的潮流数学模型可写成

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial t}+\frac{\partial U q_x}{\partial x}+\frac{\partial V q_x}{\partial y}=f q_y-gH\frac{\partial \zeta}{\partial x}-\frac{\tau_{xb}}{\rho}+2\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\varepsilon}H\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\bar{\varepsilon}H\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right] \tag{2}$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t}+\frac{\partial U q_y}{\partial x}+\frac{\partial V q_y}{\partial y}=-f q_x-gH\frac{\partial \zeta}{\partial y}-\frac{\tau_{yb}}{\rho}+2\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\varepsilon}H\frac{\partial U}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\bar{\varepsilon}H\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right] \tag{3}$$

式中，(q_x,q_y) 为全流矢量；f 为科氏力系数；$\bar{\varepsilon}$ 为水深平均涡黏性系数；τ_{xb},τ_{yb} 为水底剪应力分量，即

$$\tau_{xb}=\frac{\rho gU\sqrt{U^2+V^2}}{C^2} \tag{4}$$

$$\tau_{yb}=\frac{\rho gU\sqrt{U^2+V^2}}{C^2} \tag{5}$$

$$C=\frac{H^{1/6}}{n} \tag{6}$$

Manning糙率系数n由模型率定。涡黏性系数$\bar{\varepsilon}$的计算公式为

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\gamma\sqrt{g}\sqrt{U^2+V^2}H}{6C} \tag{7}$$

式中γ为无量纲涡黏性系数，一般可取0.4。

1.2 边界条件和数值离散

边界条件为V

闭边界（岸边界）

$$\Gamma_b:\quad V\cdot n|_{\Gamma_b}=0 \tag{8}$$

开边界（水边界）

$$\Gamma_o:\quad \zeta(x,y,t)|_{\Gamma_o}-\zeta(t) \tag{9}$$

式中，$\zeta(t)$为水边界上的潮位过程线。

本文采用改进的ADI法求解水动力方程，详见刘桦等(2000)[3]。该模型考虑河口浅滩的动边界效应，具有很好的数值稳定性。

1.3 数学模型的率定与验证

本模型的计算域包括整个长江口水域，上边界为天生港，口外开边界置于绿华山一线，南、北开边界分别置于芦潮港和吕泗港。空间步长500m，时间步长30s。本模型采用1990年长江口水下地形图及1991年长江口海图基本资料，局部地形采用最新资料进行修正。

为保证模型计算的精度，本文采用1984年8月28日至8月29日洪季大潮的同步实测水文资料对模型进行率定，同期大通流量为40 200 m^3/s；在率定计算的基础上，不改变模型的基本参数，采用1996年2月15日至2月21日枯季的资料（大通流量9000m^3/s）对模型进行验证计算。根据率定计算的结果，取糙率涨潮期$n=0.013$，落潮期$n=0.009$。率定与验证计算表明本模型的流场计算结果可靠、稳定，限于篇幅，这里不再赘述[3]。

2 工程方案的计算及分析

2.1 工程方案及计算水文条件

综合河演基本规律、发展趋势、布置原则、地形特征等，拟定了两组水库方案[2]，见图1。本文的数值模拟方案如下：

(1) 工程前天然流场；

(2) 工程方案一建成后的流场；

(3) 工程方案二建成后的流场。

河口地区的河床演变受不同水文、泥沙组合条件及各种复杂因素的影响，而根据造床理论，从长历时、平均情况来看，河口的河床地貌形态为相应多年平均落潮流量长周期作用的结果。因此在分析工程效应时，最好采用接近多年平均落潮流量的水文条件。然而长江口地

区并无长系列的落潮流量资料，难以给出平均情况的落潮流量。落潮流量不仅与上游迳流有关而且与下游的进潮量亦有关，因此计算时选用同期大通流量接近多年平均流量且外海潮差接近于多年平均情况。经分析比选，取 1981 年 10 月 14 日至 10 月 22 日的实测过程，其大通流量 Q = 32 500 m³/s(多年平均值为 29 600 m³/s)，绿华山潮差为 2.70m (多年平均潮差为 2.59m)。

2.2 工程方案计算结果分析

从工程前后南北港平均涨落潮量及分流比的变化（表略）可知，因受水库工程影响，工程后南北港涨、落潮量较工程前均略有减少，但对南北港分流比的变化影响甚小。对南港而言，无论是涨落潮量还是分流比，尽管工程后两个方案的量值均有所减少但方案二的减少量较方案一大，可见方案二使南港水流受阻较方案一严重。

为较详细地分析工程前后潮流流场特征的变化，这里取一个全潮过程的平均流速作为特征量，在计算域内取 29 个流速点，如图 1 和表 1 所示。下面给出有关的分析结果。

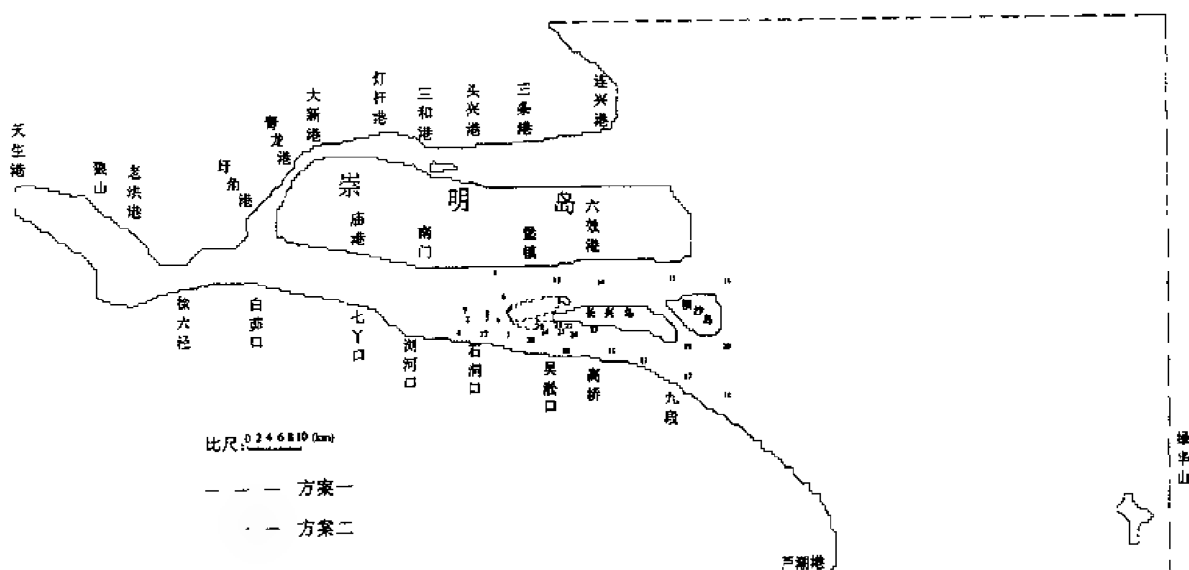


图 1　计算域及工程方案布置示意图

两组水库方案对整个流场的影响范围基本上是一致的，约位于南支下段中部(石洞口附近)至南北港中段。而由于两组水库方案的平面布局的差异，相应对局部区域的流场影响存在较大差异。

工程对新宝山水道中下段和南北港流速的影响表现为：两组水库方案使新宝山水道中段(33#，34#，35#、7#)、下段(36#，37#，38#)的涨落潮流速均有增加。方案二由于河道断面面积减少得多，故其增加的流速较方案一大得多，且越靠近工程处流速值增加得越多。由于两个工程均拦截了中央沙漫滩流，使工程下游南港(12#，13#，14#，39#，40#)涨落潮流速均略有减少，而北港除断面缩窄处(15#)涨落潮流速有所增加外，其下游(17#，18#)的涨落潮流速均有所减少。

工程对南沙头通道和新浏河沙滩的影响表现为：两组工程方案对南沙头通道上段(9#，10#)和新浏河沙滩面(2#，3#)涨落潮流速影响很小，而南沙头通道下段(11#)和新浏河沙滩面(4#)涨落潮流速稍有增加，说明工程后南沙头通道仍有可能维持目前分流状况。此外，对通过 9#的河

道横断面上新宝山水道、南沙头通道和新桥水道上各取一个代表的工程前后最高和最低潮位值进行分析，由表可见：工程后新宝山水道与南沙头通道之间、南沙头通道与新桥水道之间的最高和最低潮位差变化很小，其相应过程线的相位等亦变化很小，即工程后该河道的横比降改变不大，故新浏河沙滩面及扁担沙滩面在工程后不会产生大范围的切滩。

表 1　各方案涨急与落急流速比较

计算点位置	编号	落潮					涨潮				
		工程前	方案一	差值	方案二	差值	工程前	方案一	差值	方案二	差值
新桥水道	1	1.04	1.02	-0.02	1.02	-0.02	0.86	0.84	-0.02	0.83	-0.03
新浏河沙滩 1	2	1.00	1.02	0.02	1.02	0.02	0.85	0.90	0.05	0.91	0.06
新浏河沙滩 2	3	1.15	1.21	0.06	1.19	0.04	0.74	0.83	0.09	0.79	0.05
新宝山水道 1	4	1.26	1.27	0.01	1.28	0.02	0.91	0.94	0.03	0.95	0.04
新宝山水道 2	5	1.25	1.32	0.07	1.38	0.13	0.91	1.00	0.09	1.10	0.20
新桥通道	6	1.13	1.09	-0.04	1.09	-0.04	0.83	0.81	-0.02	0.80	-0.03
南沙头通道 1	7	1.46	1.47	0.01	1.46	0.00	0.89	0.92	0.03	0.92	0.03
南沙头通道 2	8	1.12	1.14	0.02	1.12	0.00	0.59	0.65	0.06	0.59	0.00
南沙头通道 3	9	1.18	1.25	0.07	1.25	0.07	0.73	0.84	0.11	0.75	0.02
南港 1	10	1.16	1.14	-0.02	1.15	-0.01	0.87	0.84	-0.03	0.83	-0.04
南港 2	11	1.39	1.35	-0.04	1.36	-0.03	0.98	0.91	-0.07	0.91	-0.07
南港 3	12	1.53	1.49	-0.04	1.47	-0.06	1.10	1.05	-0.05	1.02	-0.08
北港 1	13	1.30	1.33	0.03	1.34	0.04	1.09	1.15	0.06	1.16	0.07
北港 2	14	1.31	1.31	0.00	1.32	0.01	0.94	0.91	-0.03	0.92	-0.02
北港 3	15	1.51	1.48	-0.03	1.48	-0.03	1.22	1.18	-0.04	1.18	-0.04
北港 4	16	1.28	1.26	-0.02	1.26	-0.02	0.93	0.91	-0.02	0.90	-0.03
南槽 1	17	1.18	1.13	-0.05	1.12	-0.06	0.81	0.77	-0.04	0.75	-0.06
南槽 2	18	1.25	1.23	-0.02	1.22	-0.03	0.91	0.88	-0.03	0.88	-0.03
北槽 1	19	1.08	1.06	-0.02	1.05	-0.03	0.96	0.93	-0.03	0.92	-0.04
北槽 2	20	1.12	1.11	-0.01	1.11	-0.01	0.88	0.87	-0.01	0.85	-0.03
长兴岛涨潮沟 1	21	0.70	0.67	-0.03	0.53	0.17	0.84	0.70	0.14	0.66	0.18
长兴岛涨潮沟 2	22	0.84	0.75	-0.09	0.69	-0.15	0.98	0.92	-0.06	0.89	-0.09
长兴岛涨潮沟 3	23	0.52	0.51	-0.01	0.49	-0.03	0.95	0.98	0.03	0.92	-0.03
瑞丰沙滩 1	24	0.68	0.73	0.05	0.84	0.16	0.62	0.62	0.00	0.83	0.21
瑞丰沙滩 2	25	0.69	0.77	0.08	0.86	0.17	0.55	0.62	0.07	0.63	0.08
瑞丰沙滩 3	26	0.97	0.99	0.02	1.04	0.07	0.92	0.95	0.03	0.93	0.01
工程上游	27	1.19	1.22	0.03	1.22	0.03	0.90	0.95	0.05	0.97	0.07
工程处	28	1.46	1.50	0.04	1.60	0.14	1.02	1.07	0.05	1.23	0.21
瑞丰沙串沟	29	0.83	0.98	0.15	0.82	-0.01	0.91	1.10	0.19	0.95	0.04

工程对长兴岛涨潮沟及瑞丰沙滩面的影响表现为：落潮时，方案一工程后由于流路顺畅，瑞丰沙串沟 41#的流速有所增加，而长兴岛涨潮沟缺乏中央沙漫滩流的补充，其上游落潮流速有所减小(27#，28#，29#)，同时瑞丰沙滩面流速稍有增加(30#，31#，32#)。方案二工程后，由于工程缩窄处水位壅高，而长兴岛涨潮沟缺乏水流补充，故其之间产生一较大的水面比降，所以瑞丰沙滩中、上游(30#，31#，32#)流速增加很大，而长兴岛涨潮沟中上游(27#，28#，29#)流速减小显著，下游因有了瑞丰沙滩面流的补充则流速减小不明显。涨潮时，方案一工程后长兴岛涨潮沟涨潮流经过 29#，由于中央沙漫滩流被堵，水流受阻后折向过瑞丰沙滩中下段(31#)漫滩至南港，串沟 41#由于水流归槽，流速明显增加。方案二工程后，长兴岛涨潮沟水流受阻严重，其上游(27#)流速减小明显；工程尾部由于水位抬高，故在瑞丰沙滩中上游(30#，31#)产生较大的漫滩流。

2.3 推荐方案

比较方案一和方案二，两者的堤线长度、库容均相差无几，主要差异在于方案二南侧的堤线向南伸出较远，南港上口的过流断面收缩十分明显。因此方案二工程后对南北港分流比影响比较明显，表现为涨落潮期南港分流比减小，而北港则相应增加；相比之下，方案一工程后对分流比的影响很小。从流速来看，涨潮期由于工程后沿中央沙上溯的漫滩流受到拦阻，方案二工程后在瑞丰沙滩面指向南岸的流速明显增加，最大达 0.21m/s，极有可能产生切滩。在落潮期，由于南港断面过于收缩，在收缩段流速明显增大，而在收缩段以下断面扩大，流速明显减小，容易形成泥沙淤积。同时由于方案二使长兴岛涨潮沟落潮流速明显减小，最大达 0.17m/s。工程后将导致该河段迅速萎缩，严重影响长兴岛的对外交通联络。数模计算还表明，方案一工程后对流场的改变相对较小，预计建库后对河势不会产生不利的影响，不会导致滩槽的明显冲刷和淤积。综上所述，推荐工程方案一较为合理。

3 结 论

(1) 方案一和方案二对流域的影响范围基本一致。

(2) 南港无论是涨落潮量还是分流比，在工程后方案二较方案一减少得多。

(3) 方案二使南港上口过流断面收缩较多，因此该河段流态改变较大，不利于河势稳定，故推荐方案一。

参 考 文 献

1 何友声，刘桦．大型河口复杂流动研究．李国豪，何友声主编：力学与工程，上海交通大学出版社，1999. 88~118

2 林顺才等．青草沙水源地河势演变分析与库址方案比选．上海水利水电技术，1998，25：13~19

3 刘桦等．长江口水环境数值模拟研究——水动力数值模拟．水动力学研究与进展，2000，15(1)：17~30

苏州河挡潮闸冲淤试验研究

沈志刚　刘　桦　何友声
(上海交通大学工程力学系，上海 200030)

摘要　河口挡潮闸闸区及其上下游河段淤积是冲积性河流河口比较常见的现象。通过水槽模型试验，探讨了利用涨潮与落潮产生的潮位差冲刷闸区及其上下游河段河床淤沙的水力冲淤方式，对不同水力条件下水闸冲淤方式及冲淤效果进行了比较系统的研究。

关键词　挡潮闸，模型试验，闸门开启方式，潮位差，冲淤

引　言

吴淞路闸桥位于上海市外滩苏州河河口，是一座开敞式挡潮闸与桥梁相结合的大型建筑物。挡潮闸与苏州河斜交 16°，闸孔宽 60.084 m，闸门为桥下悬挂式平板闸门，共分 17 扇，单向挡黄浦江潮水。挡潮闸下游最高挡潮水位为 5.9 m，潮位达 4.70 m 时关闭闸门挡潮，从而减轻内河防汛压力。工程自 1991 年建成投入使用以来，经十几次挡潮运行，防汛效果明显。但经过一个时期的使用发现，由于挡潮闸的修建改变了苏州河河口段水流及泥沙运动条件，闸室段以及上下游河段河床发生严重淤积，闸室段年均泥沙淤积厚度达 80~100 cm，使得挡潮闸闸门不能按设计要求正常关闭，严重影响台风时期苏州河沿岸安全防汛。自 1996 年以来，上海市苏州河水闸管理所先后组织进行了数次现场水闸冲淤试验，利用涨潮期黄浦江与苏州河之间的水位差所产生的水能冲刷河床淤泥，取得了大量现场实测资料。但由于水闸区河道水流流态极其复杂，水流随潮位的变化很大，且水流十分浑浊，因测量条件及测量仪器的限制，无法对闸区内的水流状态进行全面准确的测量，仅靠现场实测资料无法对冲刷效果作出全面系统的评价。利用水槽模型试验，本文对不同条件下水闸冲淤方式及冲淤效果进行了比较系统的研究。

1　试验设备及试验安排

1.1 试验水槽与测量设备

根据苏州河河口闸桥段河道水流条件，试验水槽采用概化矩形正态模型。试验河段长 150m（其中闸底板宽 10 m，上下游护坦总长 102.8 m）。为了保证模型水流与实际水流的相似性以及水力要素的测量精度，考虑到闸门开启时的水流扩散，在模型水槽中设置五扇闸门，试验模型长度比尺为 1:30。试验水槽为规则矩形断面顺直水槽，底宽 60 cm，长 6m，高 50 cm。水槽平面布置见图 1。

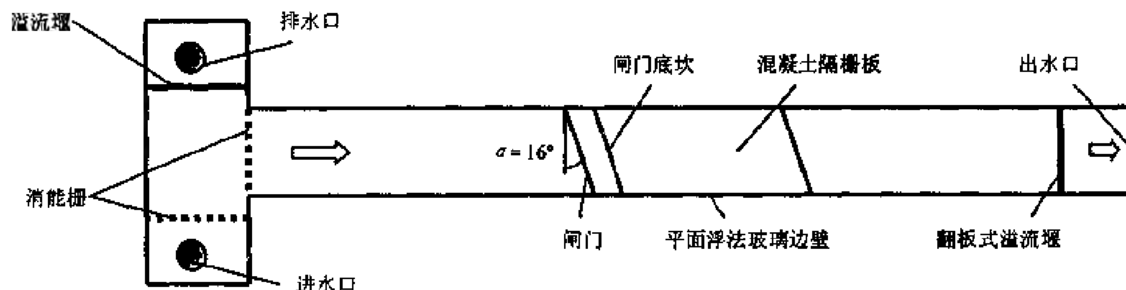


图 1　试验水槽平面布置示意图

水槽出口段设有翻板式溢流堰，用来调整水槽下游段（苏州河闸上游河段）的水位。水槽排水直接排入地下水库，然后由水泵将水扬入高压水塔中，经管道向水槽供水，实现水的循环使用。

模型水槽闸室长 33.3 cm。为模拟闸室段下游河床表面混凝土预制块对水流及冲沙的影响，同时也为了模拟高潮位时可能发生的水流对河床的破坏作用，防止闸室失稳，在闸室段下游 150cm 范围内床面上按 1:30 的比尺铺设了混凝土预制板模型，模型混凝土预制板尺寸为 4.7 cm×4.7 cm×1.0 cm。混凝土预制块留有透水孔，孔径 6.7 mm，孔距 6.7 mm。

在河道水流、潮流以及过闸水流中，重力起主导作用，因此，在模型设计中必须保证模型水流与原型水流弗汝德数 Fr 相等，由重力相似准则可得本试验速度比尺为 $\lambda_v = 5.48$。

过闸水流为紊流，在模型设计中未考虑雷诺数的影响。为模拟边界阻力，只要使模型边界条件与原型边界条件基本相同即可。

在闸门的上游 1.1m 及下游 1.1m 处分别布置了一把直尺，用来测量水槽的水深。试验过程中未测量水流流量，只控制闸门上下游水位差。根据测量的断面平均流速及水深可以推求过闸流量。为了能够比较精确地测量不同闸门开启组合条件下闸门段及上下游河段的流速分布，在本试验中采用了 He-Ne 15mW 激光多谱勒流速仪进行流速测量，同时可以统计流场中平均流速以及流速随时间的变化。

1.2 试验内容

1.2.1 上下游水位

在苏州河水闸管理所进行的一系列现场冲淤试验中，苏州河水位一般在 2.8~3.5m 之间变化，下游潮位一般在 3.1~4.1m 之间变化。在本试验中，将闸门上游苏州河水位概化为 3.0m，即上游河段水深为 6.0m。上下游潮位差分别为 0.5m，1.0m 和 1.5m。由于闸门附近水位紊动强烈，故闸门上下游水位控制点分别距闸底板中心线 110cm。在每个工况下分别测量了 5 个横断面的流速分布，即 $y = 0$ cm（闸门底坎上缘起），$y = 20$cm，45cm，110cm 及 155cm，每个测速断面上分别测量了 x = 10cm，20cm，30cm（自右侧槽壁起）3 条垂线流速分布。

1.2.2 闸门开启方式及工况

图 2 为闸门布置及编号示意图。根据苏州河挡潮闸现场冲淤试验中闸门开启组合方式以及黄浦江潮位情况，分别进行了以下试验：

(1) 闸门与水槽轴线垂直布置

(i) 1 号闸门与 3 号闸门开 15°，2 号闸门开 20°，4 号及 5 号门关闭，上下游潮位差分别为 0.5m，1.0m；

(ii) 1 号闸门与 3 号闸门开 20°，2 号闸门开 25°，4 号及 5 号门关闭，上下游潮位差分别为 0.5m，1.0m；

(iii) 1 号闸门与 3 号闸门开 26°，2 号闸门开 32°，4 号及 5 号门关闭，上下游潮位差分别为 0.5m，1.0m；

(iv) 1 号，3 号与 5 号闸门开 15°，2 号及 4 号闸门开 20°，上下游潮位差分别为 0.5m，1.0m；

(v) 1 号，3 号与 5 号闸门开 20°，2 号及 4 号闸门开 25°，上下游潮位差分别为 0.5m，1.0m；

(vi) 1 号，3 号与 5 号闸门开 26°，2 号及 4 号闸门开 32°，上下游潮位差分别为 0.5m，1.0m；

(2) 闸门与水槽轴线成 16° 斜交

(i) 1 号闸门与 3 号闸门开 15°，2 号及 4 号闸门开 20°，5 号门关闭（因闸门与水槽轴线

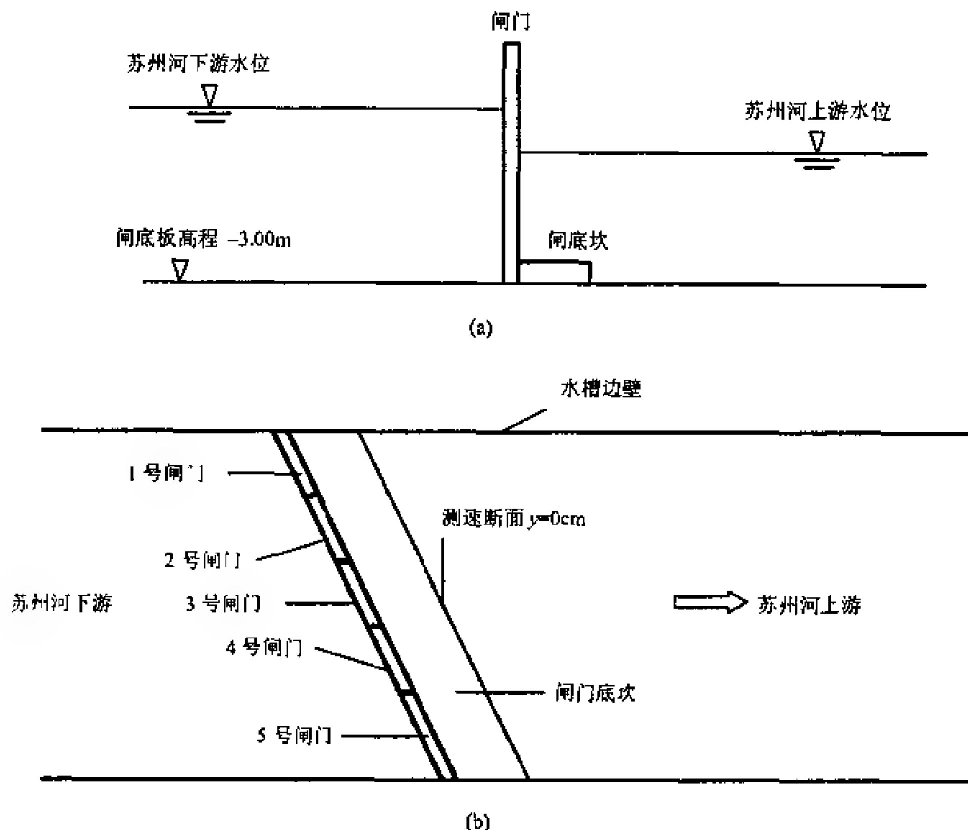


图2 闸门布置及编号示意图

成16°角，5号闸门不能开启），上下游潮位差分别为0.5m，1.0m，1.5m；

(ii) 1号闸门与3号闸门开20°，2号及4号闸门开25°，5号门关闭（因闸门与水槽轴线成16°角，5号闸门不能开启），上下游潮位差分别为0.5m，1.0m，1.5m；

(iii) 1号闸门与3号闸门开26°，2号及4号闸门开32°，5号门关闭（因闸门与水槽轴线成16°角，5号闸门不能开启），上下游潮位差分别为0.5m，1.0m，1.5m；

(iv) 1号闸门与3号闸门开15°，2号闸门开20°，4号及5号闸门关闭，上下游潮位差分别为0.5m，1.0m，1.5m；

(v) 1号闸门与3号闸门开20°，2号闸门开25°，4号及5号闸门关闭，上下游潮位差分别为0.5m，1.0m，1.5m；

(vi) 1号闸门与3号闸门开26°，2号闸门开32°，4号及5号闸门关闭，上下游潮位差分别为0.5m，1.0m，1.5m；

(vii) 3号闸门开25°，2号及4号闸门开20°，1号及5号闸门关闭，上下游潮位差分别为0.5m，1.0m，1.5m；

(3) 大比尺（1:50）试验

为研究不同闸门开启方式对水流扩散的影响，进行了大比尺模型试验，试验水槽仍为同一水槽，但闸门尺寸及相应的水深均按1:50设计。这一试验主要对不同闸门开启方式下水流的扩散问题进行定性的探讨。

2 冲淤试验结果及讨论

2.1 不同闸门开启组合方式下的横向流速分布

实测流速表明，对于同一种闸门开启方式而言，不同潮位差条件下的水流流速在横断面上的分布规律基本相同。而在相同潮位差条件下，闸门开启组合方式不同，水流流速在横断面上的分布有明显区别。这说明闸门组合方式对流速及水流扩散有较大的影响。

5 扇门开启条件下（1，3，5 号闸门开启度比 2，4 号闸门小 5°）水流在横断面上分布比较均匀，在不同潮位差下其流场特性基本相同。图 3 为实测单数闸门开 20°、双数闸门开 25°、水位差为 1.0m 时流速分布曲线。从图中可以看出，在 y=0cm 处，水流从闸门下面流出，由于闸门底坎的挑流作用，在闸后形成回流，水面附近流速有可能为负值，最大流速发生在 0.2~0.4 倍水深附近。这种水流形态有利于冲刷床底淤泥。随着水流向上游推进，垂线流速逐渐趋于均匀。在 y=110cm 处，流速在横断面上的分布已基本上不受闸门处入流流速分布的影响。

当 4，5 号闸门关闭，1，2，3 号闸门开启时，由于开启的闸门在水槽中不对称，导致闸后水流分布在横断面上不均匀。由于闸门局部开启，闸后形成回流，最大流速发生在大约 0.2~0.4 倍水深处。主流偏向水槽右侧，在水槽中心左侧形成回流，回流区可发展到 y=45cm 处。在 y=155cm 处流速在横断面上的分布已基本趋于均匀。

闸门斜置条件下的试验结果与闸门垂直布置试验结果有相近的规律性。只是由于闸门斜置时过闸水流与水槽轴向成一定夹角，闸后的回流更为明显，主流靠近水槽右侧。当上下游水位差为 0.5m 时，在 y=155cm 处流速在横断面上分布基本趋于均匀。当水位差为 1.0m 或 1.5m 时，流速不对称区域较大，在 y=155cm 处仍表现出明显的不对称性。

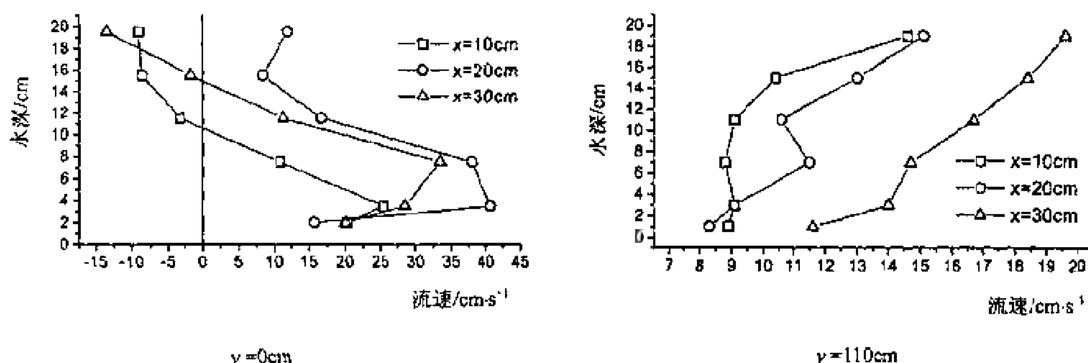


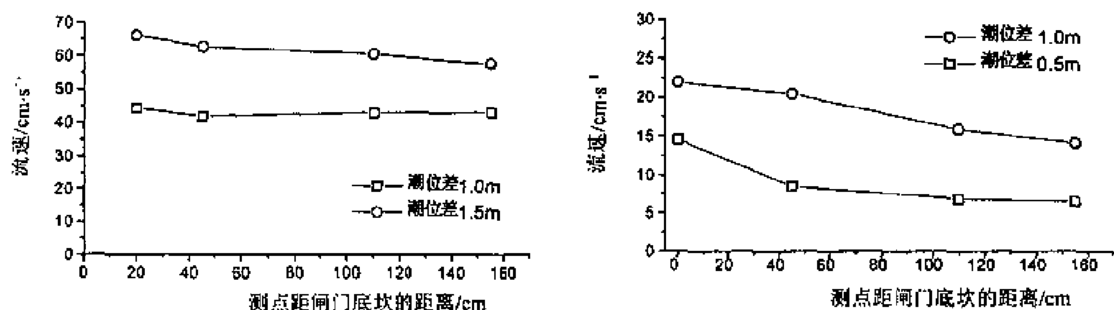
图 3 闸上游横断面上水流流速垂线分布，闸门垂直于水槽轴向布置，上下游水位差：1.0m

闸门开启方式：1、3、5 号闸门开启 20°，2、4 号闸门开启 25°

2.2 流速沿水槽轴向衰减

图 4(a)，图 4(b)分别为 3 扇、5 扇闸门开启条件下不同潮位差时闸后水流主流区垂线平均流速沿水槽轴向衰减曲线。试验结果表明，不论闸门开启组合方式如何，其主流垂线平均流速沿水槽的衰减规律都是相似的。当潮位差较大时，过闸水流流速较大，流速沿水槽衰减速度也稍快一些；潮位差较小时，主流垂线平均流速沿水槽衰减的速度反而较慢。在三种闸

门开启组合方式下，主流区垂线平均流速均能在较长的河段内维持一个较大的数值。从现有的试验结果来看，三种开启组合方式中3扇门开启条件下水流更为平稳，主流流速衰减较慢，有利于泥沙运移。可以认为，利用闸门冲淤期间，在主流区，至少在闸门上游护坦范围内泥沙不易淤积。冲淤期间闸门上游河段的淤积主要是回流将泥沙带到回流区，在那里，由于水流流速减小，发生泥沙淤积。因此，在冲淤过程中应尽量防止回流区形成和扩大。



(a) 闸门斜置，3扇门开启（1、3号门开启26°，2号门开启32°），4、5号门关闭

(b) 闸门垂直于水槽布置，5扇门开启（1、3、5号门开启20°，2、4号门开启25°）

图4 不同潮位差条件下主流垂线平均流速沿水槽轴向衰减速度的比较

闸下水流最大流速发生在闸门附近，但由于闸门后上层水域产生回流，闸下垂线平均流速不一定最大。

2.3 不同闸门开启组合方式对水流紊动强度的影响

水流紊动强度是影响泥沙输移的重要因素之一。在本次试验中，利用激光多谱勒测速仪对流速的紊动强度进行了跟踪测量。从试验结果中可以看出，流速的紊动强度与闸门开启组合方式有关。3扇闸门同时开启时主流区流速紊动强度大于4扇门开启及5扇门同时开启时的水流流速紊动强度。产生这种现象可能与闸门两侧的侧向进流有关。由于闸门只是局部开启，在开启的闸门与两侧关闭的闸门之间各形成一条缝隙，在水位差作用下潮水除经开启的闸门下面流入上游河段外，还有一部分潮水经两侧的缝隙流过，这部分水流与闸下流过的水流流向不同，两部分水流掺混而形成强烈的紊动。同时开启的闸门越少，侧流的影响越明显。

随上下游潮位差不同，水流强烈紊动影响区域也有所不同。试验中观察发现，潮位差越大，紊动区越长。一般强烈紊动可发展至$y = 45$cm 以下。$y = 110$cm 以下河段流速紊动强度逐渐趋于平稳。

2.4 不同闸门组合方式下水流的扩散

试验表明，不同闸门开启方式，以及同一闸门开启方式但闸门位置不同，对闸门上游水流的影响很大。在大比尺水槽试验中观察到，在边侧1，2，3号门开启方式下，水流的回流现象比较明显，回流区域较大，其范围几乎包括了大部分隔板区，对冲淤极为不利。图5为1，2，3号扇门开启条件下不同断面垂线流速分布图，由图中可以看出，在$y = 20$cm 处除边壁附近$x = 10$cm 处流速较大外，其余两条垂线流速均很小，甚至为反向流，其中$x = 30$cm 处的各点流速几乎均为负值，说明此处已是回流区。在$y = 45$cm 断面上，$x = 30$cm 处的流速仍接近于0。

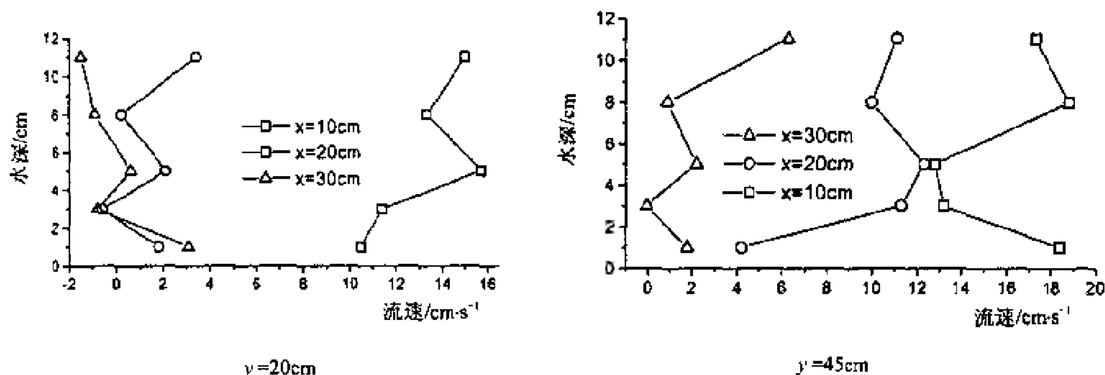


图 5 横断面垂线流速分布，1、3 号门开 20°，2 号门开 25°

在水槽中央开启 3 扇闸门，即 4，6 号闸门开启 25°，5 号闸门开启 20°，由于来流位于水槽中心，水流扩散程度有所改观，但扩散范围仍然较大。这主要是由于闸门开启的过流面积与整个上游河道断面相比差别太大，加上水流流过闸门后与水槽轴向成一定夹角，这些都对水流扩散有促进作用。同时开启的闸门数增多对减轻扩散有积极作用，试验结果表明，同时开四扇门时水流的扩散明显减弱，主流区垂线平均流速衰减速度也较慢。

由于河道较宽，而闸门开启的宽度较小，加上闸门与河道成一定夹角，水流过闸后形成扩散是不可避免的。河道中央的水流流速较大，过闸后扩散较弱，可以在较长的区域内保持较大的流速，如果在开启边门时同时开启靠近中央的一扇闸门，有可能有效地抑制水流的回流。本试验中也进行了此种开启方式的试验，效果较单独开边壁附近闸门方式为好。图 6 为 1，3 号闸门开 20°，2，6 号闸门各开启 25°时各自的断面垂线流速分布图。由图中可以看出，除闸门附近 y=20cm 断面出现回流外，上游河段并无明显回流发生。在 y=45cm 处流速在横断面上的分布已趋于均匀。由于流速迅速趋于均匀，总体来讲与其他开启方式相比，主流区流速较小，但在水位差仅为 0.5m 条件下流速也已大大超过泥沙起动流速，因此，这种开启方式有利于在较大的区域内防止泥沙回淤，加快了河床淤积泥沙的冲刷。

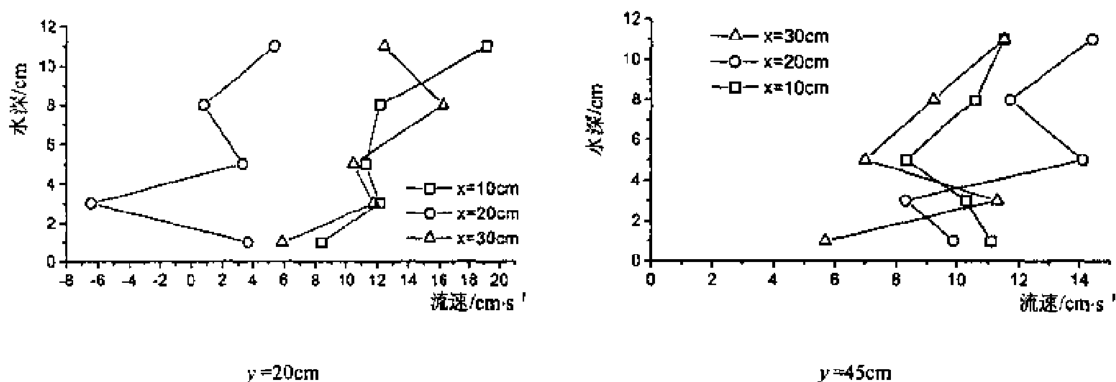


图 6 垂线流速分布图，1、3 号闸门开 20°，2、6 号闸门开 25°

3 结 论

根据对试验结果的分析，可以初步得出如下结论：

(1) 合理安排闸门开启方式可以有效地冲刷床面淤泥，减轻闸区河床淤积。

(2) 开启闸门的位置对水流流态有重要影响，开启位于水槽中部的闸门形成的闸后水流一般不易扩散，而边门后往往形成较强的回流，且扩散范围较大。由于水闸与水槽轴向成16°夹角，闸上游右侧河道容易形成回流区，导致河床淤积。在 3 扇边门开启方式下，水流的回流现象比较明显，回流区域较大，对冲淤极为不利；同时开启的闸门数增多对减轻扩散有积极作用；在开启边门时同时开启靠近中央的一扇闸门，有可能有效地抑制水流的回流。

(3) 闸下出口处流速受潮位差、闸门开启度等因素的影响，上下游潮位差越大、闸门开启度越大，则闸下流速越大，与开启闸门的扇数基本无关。但距闸门一定距离上游河道的断面平均流速受开启闸门数影响，随开启闸门数的增多及闸门开启度的增大而增大。

(4) 同时开启闸门数越多，闸后水流紊动越弱；上下游潮位差越大，紊动性越强。闸下 20cm 处左右紊动强度达到最大，强烈紊动区域可至 $y = 45$cm 处。1/2 水深附近的流速紊动强度较大，此处往往发生水流流向的频繁变化。

本次冲淤模型试验的试验面较窄，仅靠现有的试验结果难以得出全面的理论性结论，在今后的实践与研究中有必要对此问题进行更深入的探讨。

参 考 文 献

1 上海市苏州河水闸管理所. 1996 年苏州河水闸冲淤情况报告，1997 年 4 月

2 上海市苏州河水闸管理所. 苏州河水闸 1997 年冲淤试验情况报告，1998 年 3 月

3 苏州河水文水质监测站. 苏州河闸区附近的含沙量和泥沙分析报告，1997 年 11 月

4 沈志刚，刘桦，刘松平. 苏州河挡潮闸冲淤研究报告，1999 年 10 月

城市街道峡谷气流运动的模拟研究

吴志军　黄震　谢拯　毕英涛

（上海交通大学动力与能源工程学院，上海 200030）

摘要　应用 PHOENICS 数值模拟软件，针对典型的城市街道峡谷结构，对城市街道峡谷内部的气流运动进行了数值计算，分析了屋顶来流风在城市街道峡谷内所产生的流场的主要特征，探讨了建筑物几何形状对街道峡谷内气体流动的影响。进一步应用粒子图像测速（PIV）技术在风洞中对城市街道峡谷模型内部流场进行了试验测量，对数值计算结果进行了佐证。研究表明模拟试验技术能为城市街道峡谷的气流运动分析提供有效手段。试验和计算结果为城市街道风环境评价及防治、城市街道大气污染监测、城市街道建设提供了科学依据。

关键词　城市街道峡谷，气流运动，数值模拟，风洞试验

引　言

近年来城市建筑物向着高层及密集化方向发展，由此带来一系列风环境问题，主要包括行人舒适性及机动车排气污染物扩散。城市街道峡谷是指城市中两旁都有连续的高大建筑物的相对狭长的街道[1]，城市街道峡谷内的气流运动对街道风环境有十分重要的影响，这类问题的研究方法主要有现场测量、风洞试验及数值计算[2,3]。本文采用数值模拟的方法计算了城市街道峡谷内部的流场，并应用粒子图像测速(PIV)技术在风洞中测量了模拟城市街道峡谷的内部流场，对计算结果进行了验证。所得结果可用作城市街道峡谷大气污染扩散模式的输入参数，为城市街道风环境评价及防治、城市街道大气污染监测、城市街道建设提供科学依据。

1　流动方程与计算方法

在计算过程中，由于屋顶风速较低，我们把空气视为不可压流体，密度取为定值，动量方程有对流项和扩散项组成，湍流模型采用的是两方程的 k-ε 模型，流场计算的控制方程如下[4,5]：

连续方程

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1}$$

动量方程

$$\overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\upsilon \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j}\right) \tag{2}$$

k-ε 方程

$$\overline{U}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\upsilon_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_j}\right) + \upsilon_t\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - \varepsilon \tag{3}$$

$$\overline{U}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\upsilon_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right) + \frac{\varepsilon}{k}\left(C_{\varepsilon 1}\upsilon_t\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2}\varepsilon\right) \tag{4}$$

其中，$\overline{u_i u_j} = 2/3 k\delta_{ij} - \upsilon_t \left(\partial \overline{U_i} / \partial x_j + \partial \overline{U_j} / \partial x_i \right)$，$\upsilon_t = C_\mu \left(k^2 / \varepsilon \right)$，$C_\mu = 0.09$，$C_{\varepsilon 1} = 1.44$，$C_{\varepsilon 2} = 1.92$，$\sigma_k = 1.0$，$\sigma_\varepsilon = 1.3$，$\upsilon_t$ 是湍流动力扩散系数，k 是湍流能量，ε 是湍流耗散项。

在实际计算中，我们做了如下假定：(1) 不考虑机动车对街道内部空气的扰动，温度对流场的影响及流体（即空气）的浮升力；(2) 街道屋顶来风垂直于街道轴线且街道无限长，计算可作为二维情况处理。

计算采用 CFD 软件 Phoenics 3.3 进行，Phoenics 采用的是有限体积法和压力修正，网格划分采用的是交错网格。Phoenics 软件是国内应用较早的 CFD 软件之一，在保证一定精度的情况下，它耗费的机时较少，计算效率比较高[6]。

2 典型城市街道峡谷内部流动的计算结果

计算主要围绕图 1 所示的典型街道结构，计算的边界条件如下：

(1) 入口风速取屋顶的来流风速，为第一类边界条件；(2) 离建筑物顶部一定距离的上边界取为自由边界，即在垂直方向上速度的一阶导数为零；(3) 建筑物的壁面和街道路面采用无滑移边界条件；(4) 街道路面均统一取为两条车道。

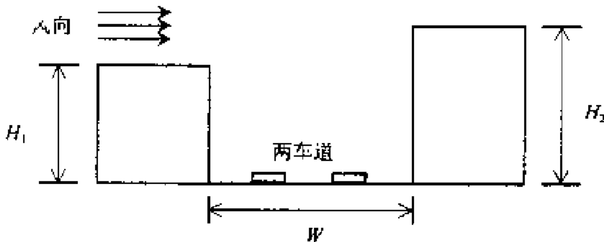
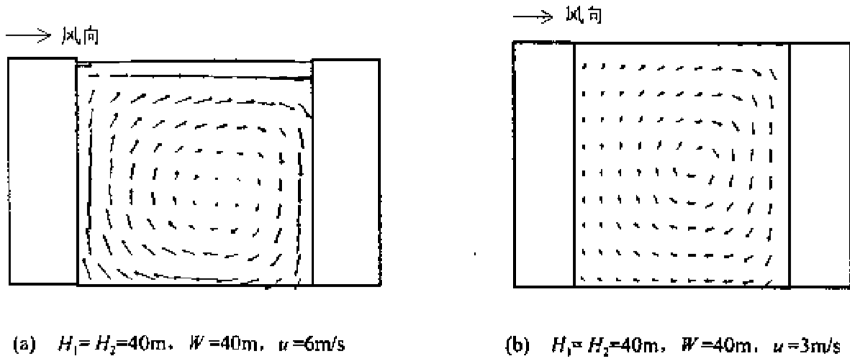


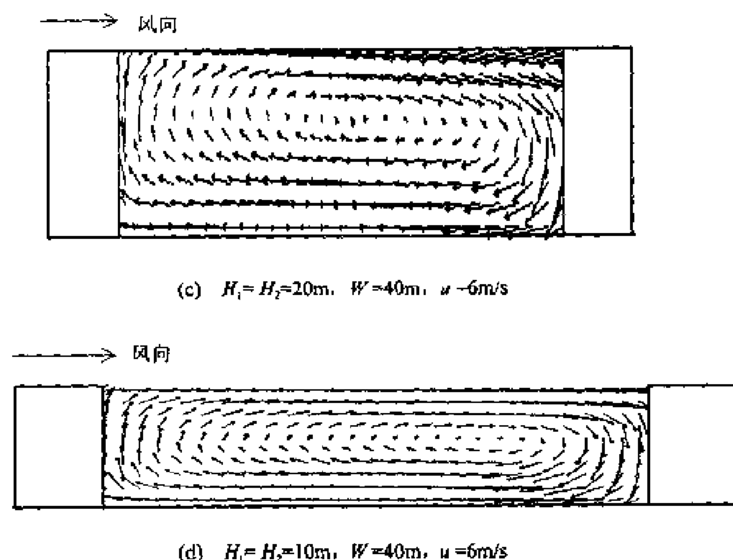
图 1 典型的街道结构示意图

2.1 两边等高建筑物的街道峡谷

图2是两边建筑物等高情况下街道峡谷内部的速度场计算结果。从图2(a)，2(c)和图 2(d)，建筑物的高度在固定风速下逐渐降低，图中较清楚显示出一个旋涡在街道内部形成，旋转方向为顺时针，在高宽比（建筑物高度与街道宽度的比值）为 1 时，街道涡心位置大致在建筑物的中部，随着高宽比的降低，旋涡形状由圆形变为椭圆形，旋涡中心位置向迎风面移动。图 2(b)所示的两边建筑物结构与图 2(a)相同，它显示的是风速为 3m/s 时街道峡谷内部的流场分布。从图中可以看出，当风速较低时，在街道内部形成的旋涡中心位置将上升，并向迎风面一侧的建筑物靠近。



(a) $H_1 = H_2$=40m，W=40m，u=6m/s　　(b) $H_1 = H_2$=40m，W=40m，u=3m/s



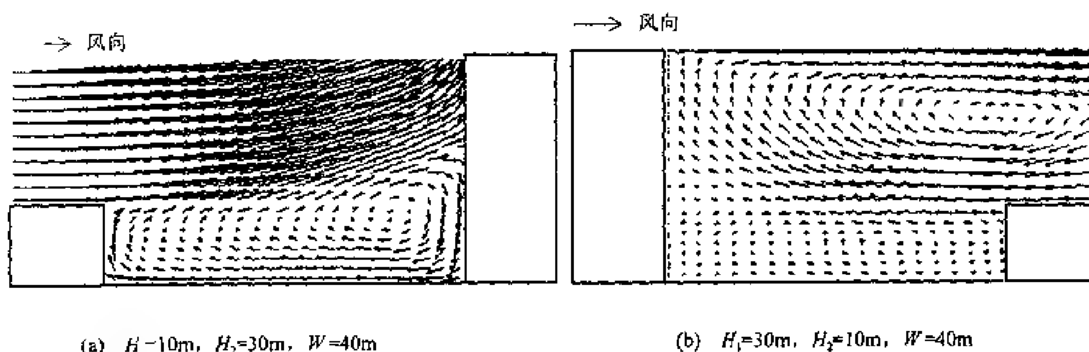
(c) $H_1=H_2=20$m，$W=40$m，$u=6$m/s

(d) $H_1=H_2=10$m，$W=40$m，$u=6$m/s

图 2　两边建筑物等高街道峡谷内部的速度场

2.2 两边不等高建筑物的街道峡谷

图 3 是街道两边建筑物不等高的情况下街道峡谷内部的速度场计算结果，从图中可以看出，当迎风面的建筑物高度高于背风面的建筑物时，来流穿越街道峡谷并在街道下部形成一个顺时针的旋涡；当迎风面的建筑物高度低于背风面的建筑物时，首先在迎风面建筑物上方形成一个顺时针的旋涡，在街道下部形成一个逆时针的旋涡。



(a) $H_1=10$m，$H_2=30$m，$W=40$m　　(b) $H_1=30$m，$H_2=10$m，$W=40$m

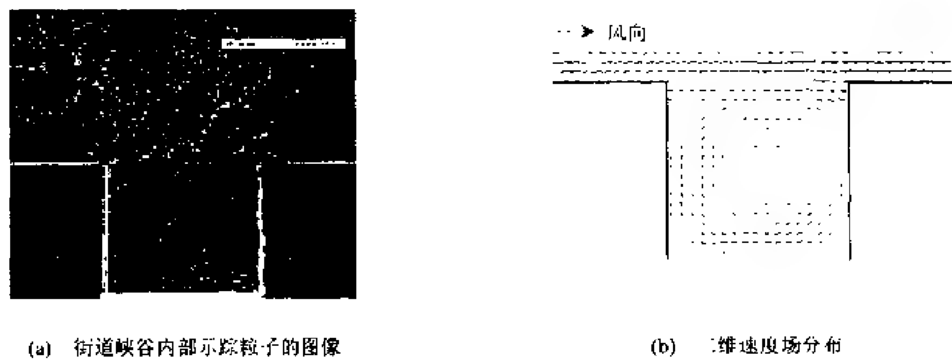
图 3　两边建筑物不等高街道峡谷内部的速度场

3　典型城市街道峡谷模型内部流动的风洞试验

为了对流场的计算结果进行验证，我们利用 PIV 技术在风洞中进行了模拟试验。一般认为长方体阻碍物的极限雷诺数为 10^4 左右，当大于这个数的时候，形成于长方体后方的尾迹区大小、形状和风速轮廓将与雷诺数无关，因此当模型尺寸足够大后（即雷诺数足够大），试验模型与实际原型相应点的流动状态是相同的。本次试验中，街道峡谷模型几何缩比为 1:250，风洞中的建筑物模型周围的雷诺数约为 5.0×10^4，PIV 设备采用的是丹麦 Dantic 公司的 FlowMap 2000 PIV 系统，示踪粒子采用的是烟雾。

图 4 是对应图 2(a)的试验结果，图 4(a)是街道峡谷内部的示踪粒子图像，图 4(b)是该图

像处理后得到的二维速度场分布，从图中可以看出，一个顺时针的旋涡出现在建筑物的内部，涡心位于建筑物中部，它与图 2(a)的计算结果是一致的。

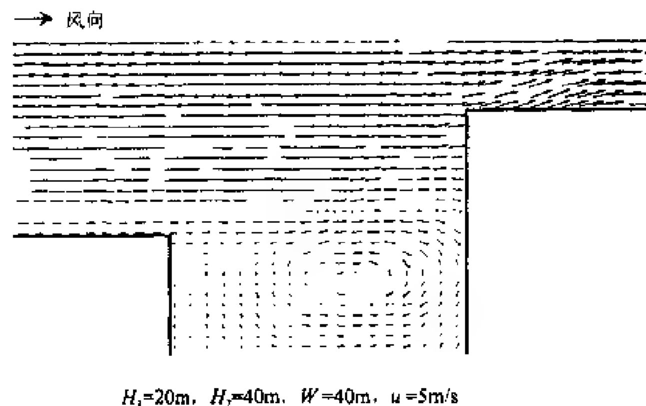


(a) 街道峡谷内部示踪粒子的图像 (b) 二维速度场分布

图 4 两边建筑物等高街道峡谷内部流场的 PIV 试验结果

(H_1= H_2=40m，W=40，u=6m/s)

图 5 显示的是两边建筑物不等高时街道峡谷内部流场的 PIV 试验结果。由图中可看到，在街道下部靠近迎风面形成一个顺时针的旋涡，这与图 3(a)中的计算结果是相吻合的。



H_1=20m，H_2=40m，W=40m，u=5m/s

图 5 两边建筑物不等高街道峡谷内部流场的 PIV 试验结果

4 结 论

本文对两边建筑物等高和不等高的典型街道峡谷内部的速度场分布进行了数值计算，并运用 PIV 技术在风洞中测量了街道峡谷模型内部的二维速度场，试验结果与计算结果基本吻合。主要结论包括：

(1) 城市街道峡谷的几何形状对街道峡谷内部气流运动有重要影响；

(2) 在两边建筑物等高情况下，街道峡谷内部形成了一个顺时针方向的旋涡，随着高宽比的降低，旋涡形状由圆形变为椭圆形，涡心位置由街道峡谷中心向迎风面移动，而随着风速的减小，涡心位置将升高，并向迎风面移动；

(3) 在两边建筑物不等高的情况下，当迎风面的建筑物高度高于背风面时，街道峡谷下部形成一个顺时针方向的旋涡；当迎风面的建筑物高度低于背风面时，在迎风面建筑物上方形成一个顺时针方向的旋涡，而在街道峡谷下部则形成一个逆时针方向的旋涡；

(4) 本文的研究结果可为城市街道风环境评价及防治、城市街道大气污染监测、城市街

道建设提供科学依据。

参 考 文 献

1 Nicholson SE. A pollution model for street-level air. *Atmospheric Environment*, 1975, 9: 11~19

2 Jonnson WB, Ludwing FL. An urban diffusion simulation model for carbon. *Journal of Air Pollution Control Association*, 1973, 23: 490~498

3 Lee JY, Park HM. Parameterization of the pollutant transport and dispersion in urban street canyons. *Atmospheric Environment*, 1994, 28: 2343~2349

4 陶文铨. 数值传热学. 西安：西安交通大学出版社，1995

5 Phoenics3.3 User Handbook. U.K.: Cham Corporation, 2000

6 Hassan AA, Crowther JM. Modelling of fluid flow and pollutant dispersion in a street canyon. *Environmental Monitoring and Assessment*, 1998, 52: 281~297

城市交通流一维元胞自动机模型 1)

董力耘　薛　郁　戴世强
（上海大学 上海市应用数学与力学研究所，上海 200072）

摘要　提出一个改进的一维元胞自动机模型来描述城市单车道车辆运动。该模型基于对车辆运动的跟车思路：车辆在一个时间步长内的运动决定于前方紧邻车辆的瞬时间距及其同步运动，间接地反映了次近邻车辆的影响。为此，我们的改进模型中，将每个时间步细分为两步，第一步计及当前可跟驰的最大间距，第二步根据前方车辆的行驶状况，确定车辆的“二次加速”；此外该模型通过引入安全间距来描述车辆的减速行为，并引入随机减速概率来反映减速行为中的随机因素。对于确定性减速情况，在临界密度附近，车流对于不同的初始条件表现出亚稳态和滞后现象。实际模拟结果表明，模型能更真实地描述单车道上的交通现象。

关键词　元胞自动机，交通流模型，亚稳态，临界密度，时空演化斑图，跟车模型

引　言

近年来，交通流的元胞自动机模型在交通流研究中得到了广泛的关注。由大量车辆组成的车流实际上是一个离散系统，因此采用本质上离散（时间、空间和状态变量均定义在离散集上）的元胞自动机模型来描述实际的交通现象具有独特的优越性：(1) 算法简单，易于实现并行计算；(2) 灵活可调，可以研究各种具体的交通现象。

Nagel 和 Schreckenberg[1]提出了描述高速公路交通流的一维随机元胞自动机模型（即 NS 模型）。车辆在由元胞组成的离散车道上从左至右运动。记第 i 辆车的位置为 x_i，速度为 $v_i \in \{1,2,\cdots,V_{\max}\}$。车辆运动规则如下：(1) 加速：若 $v_i < V_{\max}$，则 $v_i \to v_i + 1$；(2) 避免车辆碰撞：如果 $v_i > d_i$，其中车间距 $d_i = x_{i+1} - x_i - 1$。则 $v_i = d_i$。(3) 随机慢化：$v_i(>0) \to v_i - 1$ 以概率 p 发生；(4) 位置同步更新：$x_i \to x_i + v_i$。该模型首次显示车流从自由运动相到局部阻塞相的相变，引起国际学术界的广泛注意。由于采用随机慢化，$v_i(t+1)$ 不能由车间距 d_i 唯一确定，给解析研究工作带来了意外的复杂性。Fukui 和 Ishibashi[2]提出一个不同的确定性一维交通流模型（即 FI 模型），对于第 i 辆车，规定若车间距 $d_i \ge V_{\max}$，则它前进 $V_{\max}$ 个格子，若 $d_i < V_{\max}$，则它只能前进 d_i 个格子。当系统达到稳态时，车辆的平均速度 $\bar{v}$ 与平均密度 ρ 存在如下解析关系

$$\bar{v} = \begin{cases} V_{\max}, & \rho \le 1/(V_{\max}+1) \\ \dfrac{1}{\rho} - 1, & \rho > 1/(V_{\max}+1) \end{cases}$$

王雷在其博士论文[3]中采用相邻车辆间距为变量的方法得到了 FI 模型及其变形的解析解，为 NS 模型的解析研究提供了新的思路。胡永涛等[4]在改进的 NS 模型中对时间步长作适当细分，从而可以较好的描述车辆的高速跟驰运动。薛郁[5]的新模型中引入了依赖于平均密度的减速概率并借鉴了二维绿波（GWM）模型的思想，数值模拟结果与实测结果符合较好。

---

1) 国家自然科学基金资助课题（批准号：19872042，19932020）

而 Helbing[6]提出一个一维交通流 CA 模型中借鉴了优化速度模型中的速度更新规则，可以视为优化速度模型的 CA 版本。

Chowdhury 等人[7]在其综述性文章中还列举了 NS 模型的变种及其他的相关模型，它们分别反映了真实车辆运动的不同侧面。这些模型的运动规则基本上都可以归结为两个部分:(1) 速度更新部分；(2) 位置更新部分。由于这种“一步走”类型的模型大多只考虑到瞬时车辆间距的影响，而没有充分考虑前方车辆同步运动，为了防止发生撞车，对于车辆可能向前运动的距离往往作出保守的估计，即 $v_i \le d_i$。

本文的目的是用尽可能简单的规则来更为确切地描述城市单车道上的车辆运动。我们认为车辆的运动是一个动态的调整过程。由于前方车辆可以同时向前运动，因而当前车辆在一个时间步长内可能向前运动的最大距离 $d_i^{'} = d_i + \min\{v_{i+1}, d_{i+1}\} \ge d_i$。为此我们提出“两步走”的改进模型。第一步，当前车辆可以向前最多运动 d_i 步，由于车辆不能倒退，所以这一步对于所有车辆都是安全的。第二步，根据前方车辆向前运动的情况来决定当前车辆加速与否。这种对于车辆运动的描述类似于跟车模型，所以我们的新模型可以认为是跟车模型的 CA 版本。

1 改进的一维交通流模型

新的模型定义在由 N 个元胞（cell）组成的离散点列上（一维车道）。每个元胞可以有两个状态：(1) 有一辆车；(2) 无车。第 i 辆车的速度 $v_i \in \{1,2,\cdots,V_{\max}\}$，$V_{\max}$ 为车辆可以达到的最大速度。根据文献[1]，$V_{\max}$ 一般取为 5。记每一个时间步长为 Δt，令 $\Delta t = \tau_1 + \tau_2$，$\tau_1$ 和 τ_2 分别对应于车辆运动的两个阶段。在本模型中，我们规定 Δt 值取为 1，并采用周期性边界条件。

本模型中车辆的运动根据如下规则做同步更新：

(1) 安全驾驶阶段：为了避免发生碰撞，第 i 辆车向前运动的距离不能超过瞬时间距 d_i，即 $x_i(t') = x_i(t) + \min(v_i(t), d_i(t))$，其中 $t' = t + \tau_1$。而第 i 辆车的速度 $v_i(t')$ 的确定还要依赖于第 $i+1$ 辆车的同步运动。

(2) 速度调整：根据新的车辆间距 $d_i(t')$ 对第 i 辆车的速度和位置进行动态调整，其中 $d_i(t') = x_{i+1}(t') - x_i(t') - 1$，这一部分反映前方车辆同步运动的影响。在本模型中我们引入安全距离 d_{safe} 用来描述当前车辆在接近前方车辆时的减速行为，本模型中取值为 1 或 2。

加速规则：

如果 $d_i(t') \ge V_{\max}$，则 $v_i(t' + \tau_2) = \min(v_i + a, V_{\max})$：其中 a 为加速度，在本模型中取 $a = 1$。由于 $d_i(t')$ 不小于 $V_{\max}$，第 i 辆车的速度不必减速。这个规则避免了按以往规则在类似情况下车辆的频繁减速。

如果 $d_{\text{safe}} < d_i(t') < V_{\max}$，$v_i(t' + \tau_2) = \min(\min(v_i(t), d_i(t)) + a, V_{\max})$。

减速规则：

如果 $0 < d_i(t') \le d_{\text{safe}}$，$v_i(t') = \max(v_i - a, 0)$。

尤其是当 $d_i(t') = 0$ 时，表明此时前方车辆的速度 $v_{i+1}(t') = 0$，为了避免车辆碰撞，当前车辆必须立即刹车，故 $v_i(t + \Delta t) = 0$。

(3) 车辆位置更新：$x_i(t + \Delta t) = x_i(t') + \max(v_i(t + \Delta t) - v_i(t), 0)$；

从上面的车辆运动的演化规则可以看出，该模型具有以下三个特点：

(1) 车辆采取逐步有限加速方式，在每一个时间步长内车辆速度最多只能增加 1。

(2) 车辆是延迟启动的。这是因为车辆从静止状态启动时必须其前方间距大于安全间距。

(3) 该模型描述了在城市街道上经常发生的当前车辆高速追尾前车的行为，这种情况通常发生在前车遭遇红灯或减速行驶的情况。

为了简单起见，我们仅在减速过程中引入随机因素 p，即当 $0 < d_i(t') \le d_{\text{safe}}$ 时

$$v_i(t') = \begin{cases} \max(v_i - 1, 0), & \text{以概率 } p \\ v_i, & \text{以概率 } 1-p \end{cases}$$

本模型与 NS 模型中引入的减速步骤的方式区别在于：在 NS 模型中，所有速度大于 0 的车辆都可以以一定概率的减速，并不考虑具体交通情况。而我们认为司机的驾驶行为是对于事件敏感的，所以在我们的模型中车辆的减速运动是在车间距不大于安全间距时才发生。而司机对于同一个事件的反应可能具有一定的随意性。

2 数值模拟结果

在进行数值模拟时，初始时刻所有的车辆随机分布在由 N 个单位长度的离散元胞组成的一维车道上。车辆的平均密度 ρ 定义为车辆数 n 与车道长度 N 之比，$\rho = n/N$，而车辆的平均速度的定义为

$$\bar{v} = \frac{1}{T}\sum_{t=t_0}^{t_0+T-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i(t)$$

在经过足够长时间 t_0 的过渡阶段以后(实际的运行步数 5000 步)，我们对以后运行 T（5000 步）中每一时间步长内对所有的车辆求速度空间平均值，然后将得到 5000 个平均值再作时间平均，最后得到一次运行的平均速度 $\bar{v}$。在下面给出的基本图上，每一个点代表 50 次运行的平均值。

2.1 基本图

图 1 给出 d_{safe} =1，2，以及减速概率 p =0，0.5 和 1.0 时的基本图。可以看出，车流从运动相向阻塞相转变的临界密度 ρ_c 依赖于 d_{safe} 和 p。对于确定性的情况 $p = 0$ 来说，从基本图上可知，发生相变的临界密度 $\rho_c = 1/V_{\max} = 0.2$，而不是如同 FI 模型中那样 $\rho_c = 1/(V_{\max} + 1)$。对此可作如下分析：根据运动规则，当临界密度 $\rho_c = 0.2$ 时，平均车辆间距 $\bar{d} = 4$，车辆速度 $v_i > 1$，若此时满足如下条件：$\min(v_{i+1}, d_{i-1}) + d(i) \ge V_{\max}$ 时，就可以保证 $v_i = V_{\max}$。虽然在更高的密度下车速仍然可以达到最大速度 $V_{\max}$，但是由于其对应的是一种不稳定流态，在车辆随机分布的初始条件下，一般不会出现。另外注意到在这种情况下，并不要求所有车辆间距是相等的。

当车辆密度小于临界密度 ρ_c 时，所有车辆均以最大速度 $V_{\max}$ 运动，从而流量也随密度线性增加，$J = \rho V_{\max}$。数值模拟表明，当密度小于临界密度时，整个车流处于“层流”状态。在此情况下，没有自发的交通阻塞产生，表明整个车流的运动状态是稳定的。无论从什么样的初始条件出发或施加多么大的扰动，系统最终会演化到所有车辆都以最大速度运动的状态。

在中等密度区，平均车辆密度超过临界密度，此时车流是自由运动相和阻塞相混合的流态。从基本图上可以看出，流量 J 和平均速度 $\bar{v}$ 随着密度的增大而单调下降。随着车辆密度增大，处于静止状态的车辆增多，而只有当 $d_i > d_{\text{safe}}$ 时，这些车辆才能从静止开始加速，所

以相同车辆密度时，车流量的下降速度要比 FI 模型所揭示的更快。在相同的密度下，在我们的模型中产生阻塞的尺度要比 NS 模型[1, 10]更大，相比之下发生阻塞的频率要小得多。这是两个模型中采取不同的减速步骤的结果，而我们的模型似乎更接近于实际情况。

在高密度区，ρ-J 曲线显示车流可能出现两种状态：(1) 车流量随密度的增大而逐步减小，直到当 $\rho=1$ 时，流量 $J=0$。(2) 当 $\rho\neq 1$ 时在高密度区就出现流量 $J=0$ 的情形。当安全间距 d_{safe} 较大时，在高密度情况下出现 $J=0$ 的密度较小。这与达到终态时车道上车辆的分布状态有关，当系统达到稳定的终态时，如果车道上的某一部分存在一个的“空洞”，则可以仍然有一定的流量。如果达到终态时，车辆的分布比较均匀，而且根据规则，静止车辆前方间距一定要超过安全间距才能重新启动，这样所有的车辆只能处于静止状态。

我们注意到当安全间距 $d_{\text{safe}}=2$ 时，减速步骤使车流量明显的下降，而当 $d_{\text{safe}}=1$ 时，却无明显影响。可以用安全间距 d_{safe} 大小表示出现减速的概率，易见当 $\rho<\rho_c$ 时，d_{safe} 越大，出现减速的概率越大，车流内部发生自组织阻塞的情况就越频繁。

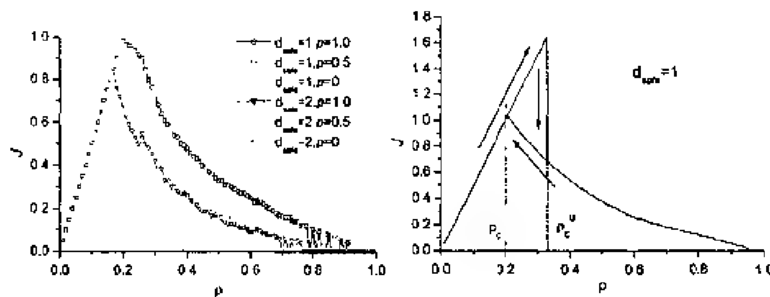


图 1　平均车流量随车辆密度的变化关系　　图 2　亚稳态及滞后现象示意图

2.2 亚稳态和滞后现象

在数值模拟过程中发现，在临界密度 ρ_c 附近，车辆的运动表现出亚稳态和滞后现象，如图 2 所示。考虑确定性减速情形 $p=1$，如果车辆的初始分布是随机的，这种不均匀性将导致车流运动出现自发的交通阻塞，从而使车流量减小。如果初始时刻车辆均匀分布（车辆间距相同，速度相同 $v_i>0$），根据规则，所有的车辆会逐渐加速到 $V_{\max}$，最大临界密度可以达到 $\rho_c^u=1/(d_{\text{safe}}+2)$。因此在临界密度 ρ_c 附近可能出现两种流态，一是车辆的均匀高速运动状态，对应于较大的流量（由于 $d_i>d_{\text{safe}}$，减速步骤不起作用，会出现车流量 $J>1$ 的情形）和较高的临界密度，但是这种状态是不稳定的，当扰动达到一定强度时会使车流运动失稳，并导致流量的迅速减小。二是车流内部出现自发的交通阻塞，对应于较小的流量和较低的临界密度。这种流动是稳定的，也是在真实交通经常发生的现象。

再现图 2 中所示的滞后现象，可以通过如下方式[8, 9]：(1) 我们从低密度（$\rho<\rho_c$）开始，当系统运行到终态时，所有的车辆均以最大速度 $V_{\max}$ 运动，此时如果插入一些车辆，这相当于使施加了一个小扰动 $\Delta\rho$。当这种扰动超过一定限度，则整个车流的状态将会失稳，从而突然跳跃到流量较小的分支。当车流密度 ρ 接近 ρ_c^u 时，车流对于扰动更加敏感。(2) 如果我们从高密度状况（$\rho>\rho_c$）开始，车流运动达到终态时会出现运动相和阻塞相交替出现的状态，如果我们从中随机取出一些车辆，车流系统将保持原来的状态，从而对应于图中的流量较小的分支。

值得指出的是，虽然由于 d_{safe} 和 p 的不同，可以导致不同的ρ-J 曲线，但这并不是亚稳态

情况，因为这些曲线均可以通过随机初始条件经过模拟得到，所以这些曲线都是对应于那些对扰动不敏感的稳定流态。

3 结 论

本文提出一个适于描述城市单车道上车辆运动的元胞自动机模型。该模型可以相当准确地描述在交通灯控制下的车辆运动，其典型特征是车辆地逐步有限加速、车辆从静止的延迟启动以及对前方车辆的高速追尾运动。考虑到车辆可以同时向前运动，所以第 i 辆车在一个时间步长内可能向前运动的最大间距 $d_i^{'} = d_i + \min\{v_{i+1}, d_{i+1}\} \ge d_i$，即第 i 辆车的运动是由车辆的瞬时间距 d_i 和前方车辆的同步运动 $\min(v_{i+1}, d_{i+1})$ 决定的，因此采用了"两步走"的模型，次近邻车辆地影响通过第二步运动体现出来。值得注意的是本文并不是将其他模型中在两个时间步长内的运动简单地放在一个时间步长内实现，因为本模型在同一个时间步长内的两次运动是不等价的。数值模拟结果显示，在临界密度附近车流运动状态表现出亚稳态和滞后现象。关于交通流的进一步性质如大尺度交通阻塞的形成及缓解等将在以后作进一步的分析研究。

参 考 文 献

1 Nagel K and Schreckenberg M. A cellular automaton model for freeway traffic. *J Phys*, 1992. 2221~2229

2 Fukui M and Ishibashi Y. Traffic flow in 1d cellular automaton model including cars moving with high speed. *J Phy Soc Jpn*, 1996, 65: 1868~1870

3 王雷. 一维交通流元胞自动机模型中自组织临界性及相变行为的研究. 中国科学技术大学博士学位论文，2000

4 刘永涛. 改进的元胞自动机模型及其应用. 上海大学硕士学位论文，2000

5 薛郁等. 一种改进的一维元胞自动机交通流模型及减速概率的影响. 物理学报，(待发表)

6 Helbing D and Schreckenberg M. Cellular automata simulating experimental properties of traffic flow. *Phy Rev E* 59, 1999: R2505~2508

7 Chowdhury D, Santen L and Schadschneider A. Physics Report 329, 2000. 199~329

8 Krauss S, Wagner P and Gawron C. Metastable states in a microscopic model of traffic flow. *Phy Rev E*, 1997, 55: 5597~5602

9 Lübeck S, Schreckenberg M and Usadel KD. Density fluctuations and phase transition in the Nagel-Schreckenberg traffic flow. *Phy Rev E*, 1998: 1171~1174

10 Nagel K and Paczuski M. Emergent traffic jams. *Phy Rev E*, 1995, 51: 2909~2918

用高精度紧致差分格式分块耦合求解二维黏性不可压缩复杂流场[1)]

鲁晓东 任安禄 周永霞

（浙江大学力学系，杭州 310027）

摘要 提出了张量形式的黏性不可压缩流场方程的高精度分块耦合求解方法。在分块算法中用重叠一层的方法来实现子块间的数据交换同时克服子块剖分所造成的数值奇性。利用所提出的算法成功地模拟了椭圆型绕流问题的时间发展过程，如尾流，旋涡的产生与脱落过程以及 Karman 涡街的形成等。

关键词 Navier-Stokes 方程组，分块耦合，紧致格式，椭圆绕流，非交错网格

引 言

复杂流场分区求解方法在朱自强等书中[1]已有简略的介绍。本研究小组对黏性不可压缩流动分块耦合求解方法已做了较多的研究，见任安禄等文章[2~4]。文[2，3]是常规 1-2 阶精度的算法。采用重叠一层的分块方法或采用补块法（patched subdomain）来克服子块剖分而造成的数值奇异性，差分离散采用非交错网格。文[4]采用变量和它的一阶，二阶导数联立成三对角块方程组的方法，但求解速度分量仍然是笛卡尔坐标分量。本文是文[5，6]的发展，并将分块耦合求解的思想[2~4]在高精度格式中来实现。

由于对流动现象的认识和计算流体力学的发展，人们对流场数值模拟提出了越来越高的要求。绕流问题是流场计算中的典型问题，在流场演变过程中常常伴随着流动的分离、剪切层和旋涡的生成、演化以及它们之间的相互作用。控制方程的高度非线性给数值模拟带来很大的复杂性和困难。为了兼顾流场计算的研究性和应用性，我们采用高精度紧致差分格式的分块耦合求解，既可描述精细、复杂的流动现象，又可推广到一般几何形状复杂流场的工程计算。紧致格式能在更宽的谐波范围内逼近真实解的谐波成份，从而更好地反映流动的小尺度结构[7]。区域分解方法（Domain Decomposition Method，简记 DDM），在每个子区域上容易生成品质较好的网格并独立地求解，再通过子区域间的信息传递使解耦合，从而得到整个流场的解。本文将紧致格式应用于任意曲线坐标下分块耦合二维黏性不可压缩流场方程组的计算，采用原始变量提法，时间推进采用四阶 Jameson 龙格-库塔[8]算法，不可压缩的连续性条件则通过在非交错网格上求解压力 Poisson 方程来实现[5，6]。由于采用张量描述，程序上很容易把本文推广到三维流场。

1 区域分块与数据传递及控制

尽管网格生成技术（Numerical Grid Generation）日益成熟，但当流动区域的形状较复杂时，网格的生成会遇到困难。例如当流动区域是一个多连通域时，就很难生成统一的贴体网格。同时，在几何形状变化较大的区域附近，如壁面的凸、凹角处，生成的网格往往具有较大的曲率，正交性不好，贴体性也较差，这些将严重影响到数值解的精度以及算法的稳定性。而另一方面，这些形状变化较大的区域却往往是流动现象复杂的区域，也是人们感兴趣的部分。为了解决这个困难，我们将求解区域分解成为若干个子区域，每个子域都具有相对简单

1) 国家自然科学基金 19972061 和浙江省自然科学基金 196045 资助项目

的几何形状，于是可以在每个子域上独立地生成品质良好的贴体网格。这里我们采用 H-型网格系统，这种网格系统优点是易于实施进出口边界条件。

对椭圆柱，圆柱或方柱的绕流问题，典型的分块方法为分成 8 块，如图 1，同时每一子块的内部拟边界与相邻块重叠一层网格，且节点数一致，以便实现数据传递，这相当于 Schwarz 分块迭代法。求解时，子区域上的求解是相对独立的，但是每个子域的拟边界均是其相邻子域的内点，而拟边界内一层网格点则为其相邻子域的拟边界。计算时从相邻子域中取值作为拟边界的边界条件，完成该子域的计算后立即取出其相应的边界内一层网格的值更新相邻子域的拟边界值。这样，所有的拟边界的值实际上都是作为某区域的内点计算得到的。由于本文中流场的计算采用了非交错网格，因而子域间的数据传输十分方便，信息能通过拟边界传递而不被阻断。当然，并不是所有的流场都可以重叠一层分块，对不能重叠分块的，会造成流场缺值，常用外插法解决。

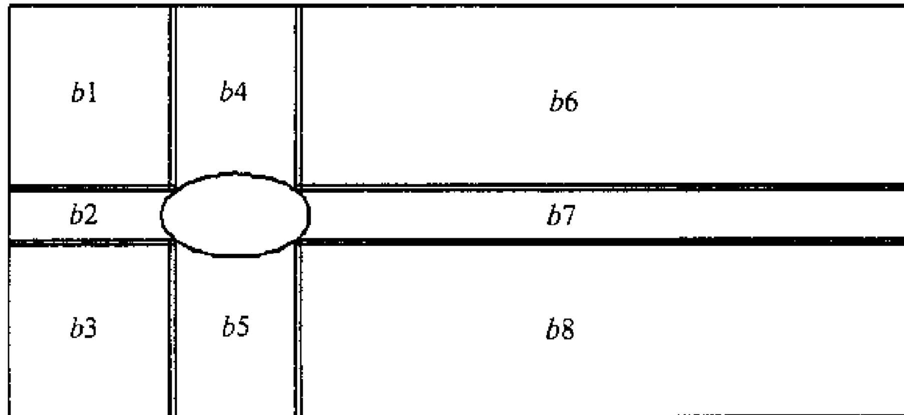


图 1 区域重叠一层分块

2 控制方程和离散格式

2.1 控制方程

任意曲线坐标下的动量方程、连续性方程张量表示式如下

$$\frac{\partial u^i}{\partial t}+u^j\cdot u^i|_j+\frac{\partial P}{\partial x^j}g^{ji}=\frac{1}{Re}u^i|_{jk}\,g^{jk} \tag{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}u^i\right)=0 \tag{2}$$

x^i 为曲线坐标，u^i 为逆变速度，P 为压力，g^{ij} 为逆变度量张量，g 为协变度量张量行列式，$u^i|_j$ 为逆变速度 u^i 的一阶协变导数，$u^i|_{jk}$ 为逆变速度 u^i 的二阶协变导数。

数值求解时遇到的主要困难来自于连续性方程（2）式的满足，目前常用的方法之一是采用压力 Poisson 方程提法[5, 6]，它的张量表示式如下

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial P}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\sqrt{g}}{Re}u^i|_{jk}\,g^{jk}-\sqrt{g}u^j\cdot u^i|_j\right) \tag{3}$$

在差分求解压力 Poisson 方程时，需采用 Harlow 所提出的对连续性余量的特别考虑。

2.2 动量方程的离散

动量方程从 n 到 $n+1$ 时间步显式四步 Jameson Runge-Kutta 法如下

$$(u_{I,J}^i)^{(m)} = (u_{I,J}^i)^n - \alpha_m \Delta t RHS_{I,J}^{(m-1)} \tag{4}$$

其中：I，J 为网格节点号，$RHS = \frac{1}{Re} u^i|_{jk} g^{jk} - u^j \cdot u^i|_j - \frac{\partial P}{\partial x^j} g^{ji}$。Jameson 算法可以减少对中间层次变量的存储。在空间上，本文采用四阶精度的紧致差分格式来逼近动量方程（4）式。该格式在均匀网格上可表达为

$$\frac{1}{6} F_{i+1} + \frac{2}{3} F_i + \frac{1}{6} F_{i-1} = \frac{1}{2h}(f_{i+1} - f_{i-1}) \tag{5}$$

$$\frac{1}{12} S_{i+1} + \frac{5}{6} S_i + \frac{1}{12} S_{i-1} = \frac{1}{h^2}(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) \tag{6}$$

其中，f_i 是节点 i 上的待求函数值，F_i 是其一阶导数，S_i 是其二阶导数，h 是空间步长。对于一阶、二阶导数的边界值，采用三阶精度的单边格式求得。

因为速度的初始值和边界值都是在笛卡儿坐标系下给定的，在求解(4)式之前，必须把它们转换到曲线坐标下的逆变速度。同样，在计算结束输出结果时，再把曲线坐标下的逆变速度转换为笛卡儿坐标系下的普通速度。

2.3 压力 Poisson 方程的离散

Dennis 在文[9]中推导了形如 $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + C\frac{\partial P}{\partial x} + D\frac{\partial P}{\partial y} = S$ 的微分方程的四阶九点紧致差分格式。利用 Harlow 等人提出的方法，考虑连续性余量，令

$$\begin{aligned} S_{I,J}^{\prime(m)} = S_{I,J}^{(m)} + \varepsilon \times [A\delta_x^2 P + B\delta_y^2 P + C\delta_x P + D\delta_y P - \delta_x(\sqrt{g} g^{11}\delta_x P + \sqrt{g} g^{12}\delta_y P) - \\ \delta_y(\sqrt{g} g^{21}\delta_x P + \sqrt{g} g^{22}\delta_y P)]_{I,J}^{(m-1)} \end{aligned} \tag{7}$$

其中：ε 为 0~1 的常系数，δ_x, δ_y 为一阶差分算子。类似可推出(3)式的四阶九点紧致离散格式如下

$$\begin{aligned} d_1 P_{I+1,J}^{(m)} + d_2 P_{I,J+1}^{(m)} + d_3 P_{I-1,J}^{(m)} + d_4 P_{I,J-1}^{(m)} + d_5 P_{I+1,J+1}^{(m)} + d_6 P_{I-1,J+1}^{(m)} + d_7 P_{I-1,J-1}^{(m)} + d_8 P_{I+1,J-1}^{(m)} - d_0 P_{I,J}^{(m)} = \\ h^2\left(c_1 S'^{(m)}_{I+1,J} + c_2 S'^{(m)}_{I,J+1} + c_3 S'^{(m)}_{I-1,J} + c_4 S'^{(m)}_{I,J-1} + 8S'^{(m)}_{I,J}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

式中系数参见文[5]。（8）式可用点松弛迭代法求解。

离散的压力 Poisson 方程的 Neumann 边界条件与其源项间要满足相容性条件。相容性条件为

$$\oint_\Gamma \frac{\partial P}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma = \iint_\Omega S \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9}$$

于此，我们取压力 Neumann 边界条件的离散格式如下：

左右边界

$$p_{1,J} - p_{2,J} = \frac{-\frac{1}{2}(\xi_{1,J} + \xi_{2,J}) - \frac{1}{12}\left[\delta_x \xi_{1,J} - \delta_y \eta_{1,J} - \delta_x \xi_{2,J} + \delta_y \eta_{2,J}\right]}{\sqrt{g_{1,J}} g_{1,J}^{11}}$$

$$p_{M,J} - p_{M-1,J} = \frac{\frac{1}{2}(\xi_{M,J} + \xi_{M-1,J}) - \frac{1}{12}\left[\delta_x \xi_{M,J} - \delta_y \eta_{M,J} - \delta_x \xi_{M-1,J} + \delta_y \eta_{M-1,J}\right]}{\sqrt{g_{M,J}} g_{M,J}^{11}}$$

上下边界

$$p_{I,1}-p_{I,2}=\frac{-\frac{1}{2}(\eta_{I,1}+\eta_{I,2})-\frac{1}{12}\left[-\delta_x\xi_{I,1}+\delta_y\eta_{I,1}+\delta_x\xi_{I,2}-\delta_y\eta_{I,2}\right]}{\sqrt{g_{I,1}}\,g_{I,1}^{22}}$$

$$p_{I,N}-p_{I,N-1}=\frac{\frac{1}{2}(\eta_{I,N}+\eta_{I,N-1})-\frac{1}{12}\left[-\delta_x\xi_{I,N}+\delta_y\eta_{I,N}+\delta_x\xi_{I,N-1}-\delta_y\eta_{I,N-1}\right]}{\sqrt{g_{I,N}}\,g_{I,N}^{22}} \tag{10}$$

式中

$$\xi_{I,J}=\left(\frac{\sqrt{g}}{Re}u^1|_{jk}\,g^{jk}-\sqrt{g}u^j\cdot u^1|_j+\frac{\sqrt{g}u^1}{\alpha_m\Delta t}\right)_{I,J}$$

$$\eta_{I,J}=\left(\frac{\sqrt{g}}{Re}u^2|_{jk}\,g^{jk}-\sqrt{g}u^j\cdot u^2|_j+\frac{\sqrt{g}u^2}{\alpha_m\Delta t}\right)_{I,J} \tag{11}$$

3 椭圆绕流的数值模拟

计算区域如图 1 所示。

计算的边界条件为：入口处及上、下边界为，$u=U_\infty, v=0$；出口条件采用无反射条件[10]，即

$$\frac{\partial u}{\partial t}+U_{\text{out}}\frac{\partial u}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial t}+U_{\text{out}}\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

U_{out} 为出口的平均流速。初始条件为均匀流，$u=U_\infty, v=0$

图 3~图 5 分别是 Re=200，300 时不同时刻的流场速度矢量图。

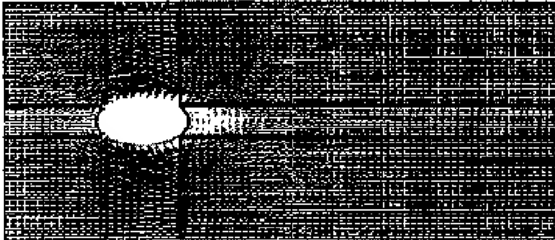


图 2 Re=200 t=1

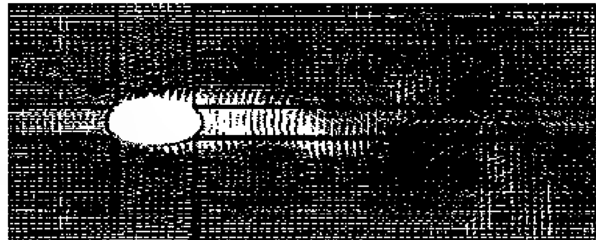


图 3 Re=200 t=16

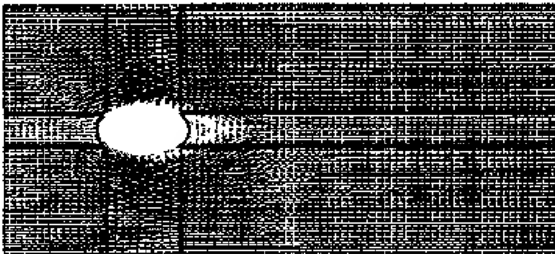


图 4 Re=300 t=1

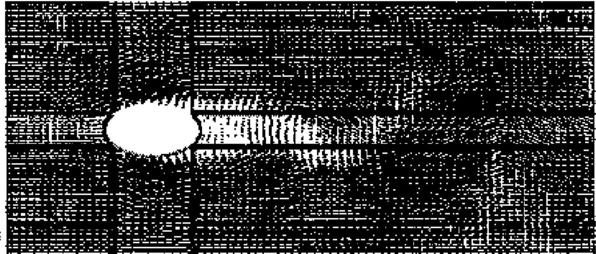


图 5 Re=300 t=19

图 6，图 7 是 Re=200 时不同时刻的流场涡量等值线图。随着流场的演变，最终形成 Karman 涡街，变化周期约为 1.40。

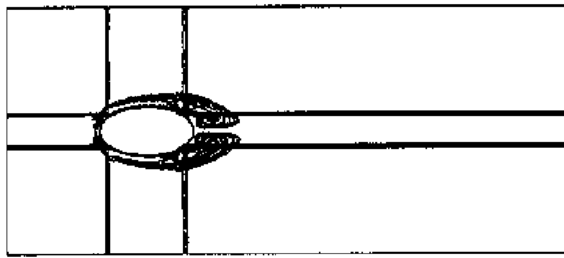


图 6 Re=200 t=1

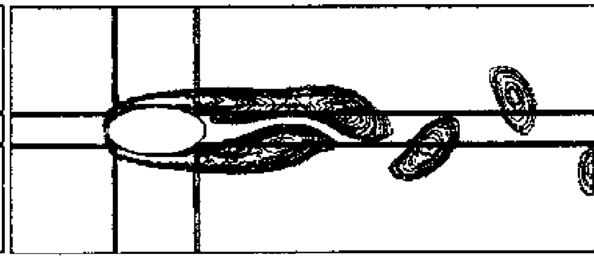


图 7 Re=200 t=26

图 8，图 9 是 Re=300 时不同时刻的流场涡量等值线图，流场演变过程比 Re=200 要快，形成 Karman 涡街时间短，稳定以后变化周期短，约为 1.12。

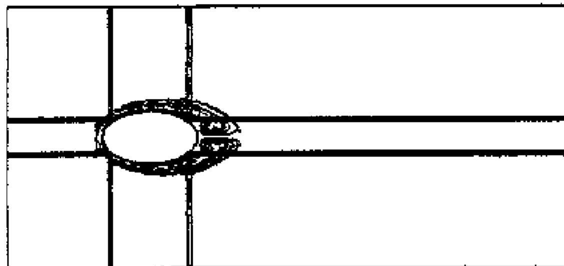


图 8 Re=300 t=1

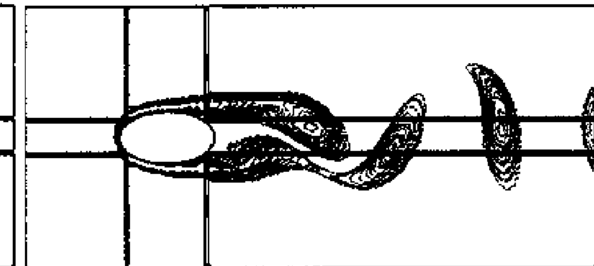


图 9 Re=300 t=19

4 结 论

本文计算结果表明，高精度紧致格式分块耦合求解方法是成功的，可推广到其他复杂流场计算。

参 考 文 献

1 朱自强等编著. 应用计算流体力学. 北京航空航天大学出版社. 1998 年，ISBN7-81012-747-0/O.039

2 任安禄，郁春伟，卢云 黏性不可压缩流动二维复杂流场分块耦合求解. 空气动力学学报，1997.9，15(3)

3 卢云，任安禄. 二维黏性不可压缩流场的分块耦合求解方法. 空气动力学学报，1994.12，12(4)

4 修东滨，任安禄. 高阶紧致格式求解二维黏性不可压缩复杂流场. 力学学报，1996.5，28(3)

5 Ren Anlu and Ding Hong. High accurate solution of incompressible viscous flow. The 7th International Symposium on Computational Fluid Dynamics，Sept. 15~19 1997 Beijing China or *Journal of Hydrodynamics Ser.B.*(3)1998

6 任安禄，丁宏，陈耀松. 用高阶紧致格式及压力修正法求解黏性不可压缩流场. 第 11 届全国水动力学研讨会暨第 4 届全国水动力学会议. 1997，111~116

7 Lele SK. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J Comput Phys*，1992，103：16~42

8 Jameson A and Schmidt W. Some recent development in numerical methods for transonic flows. *Comp Methods In App Mech and Engr*，51(1985) or AIAA paper 81-1259 1981

9 Dennis SCR and Hudson. Compact four-order finite-difference approximations to operators of Navier-Stokes type. *J Comput Phys*，1989 85：190~416

10 Oranski I. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flow. *J Comput Phys*，1976，21：251~169

分量型 TVD 格式在复杂物态方程可压缩流的应用 [1)]

于　恒

(北京应用物理与计算数学研究所，北京 100088)

张慧生

(复旦大学力学与工程科学系，上海 200433)

摘要　在可压缩流体动力学数值计算中，传统的高阶精度差分格式在解的间断面(如激波)附近常产生非物理的数值振荡，现代高分辨激波捕捉格式(如 TVD 和 ENO 等)能够有效消除伪振荡从而大大提高激波分辨率，但一般均建立在对 Euler 方程组特征解耦的基础上，因而对物态方程形式的要求比较苛刻。作者曾发展了一种分量型二阶 CTVD 格式，无需求解 Jacobian 矩阵，因而可以毫无困难地推广到具有一般形式物态方程的流体计算。就真实气体的双马赫反射问题、爆轰波的传播问题等，应用 CTVD 格式给出了很好的数值计算结果。

关键词　分量形式，CTVD 格式，真实流体，数值计算

引　言

1983 年 Harten 引入TVD (Total Variation Diminishing) 格式的概念[1]，开创了双曲型方程高分辨率差分格式研究的新纪元。TVD 格式是一类保单调激波捕捉格式，它通过对一个低阶格式(如一阶迎风格式)的数值通量加以高阶修正的反耗散项，并对其加以限制(limiting)，从而达到消除格式非物理数值振荡的目的。TVD 差分格式对间断解具有高分辨的特性，同时又能保持光滑解区的高阶精度。

在标量情况，TVD 格式一般比较简洁，并适用于一整套严密的理论分析。但对守恒方程组，TVD 格式就常常要借助特征空间解耦的办法，将标量情况下得到的 TVD 格式以“标量形式”(并适当线性化)推广到每一个特征方程。然而这样一来就使得计算逻辑异常复杂，大量增加计算机 CPU 时间，并且很难达到实际标量情况的效果。

对双曲型守恒方程组，早期的激波捕捉格式(如人工黏性法)多为分量形式差分，即把单个方程的差分格式直接推广到方程组的每一个方程。这种做法的好处是显而易见的：编程简单，计算速度快，并且易于推广到复杂流体系统的计算。分量形式差分格式在 ENO 类格式中已有过成功的试验[2~5]，其主要得益于 Runge-Kutta 法对时间的离散。但此类方法中的高阶通量重构相当复杂，而且对 r 阶 ENO 格式来说，同样的重构程序在一个时间步内要完全重复 r 次计算。因此分量型 ENO 格式的计算仍显得很不经济。

作者在文献[6]中把有名的 MacCormack 格式和 Warming-Beam 格式结合，发展了一种分量型 TVD 格式，它使用通量形式差分而无需引入 Jacobian 矩阵对方程组进行特征解耦，因而可以毫无困难地推广到具有一般形式物态方程的流体计算，并使得程序计算效率得到了大幅度提高。

下一节我们简单介绍这种分量型二阶 TVD 格式的构造，然后给出该格式应用于真实气体的双马赫反射问题、爆轰波的传播问题等的数值计算结果。

---

1) 高等学校博士学科点专项科研基金(98024627)和中国工程物理研究院行业科学技术预先研究基金(990674)资助项目

1 分量型CTVD格式

首先回顾一般的通量 TVD 格式[7]，考虑非线性标量形式守恒方程

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x) \tag{1.1}$$

我们总是以如下的高阶守恒差分格式逼近方程

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(\hat{h}_{j+1/2} - \hat{h}_{j-1/2}) \tag{1.2}$$

其中 $\lambda = \Delta t / \Delta x$ 是均匀网格比，$\hat{h}_{j+1/2}$ 是相容的高阶数值通量，它可被看作一阶迎风格式的数值通量 $\hat{f}_{j+1/2}$ 与某种高阶修正项的叠加，例如一般的二阶 TVD 格式可以写成修正的 Lax-Wendroff 格式，其带有 TVD 限制子的数值通量可以写为

$$\hat{h}_{j+1/2} = \hat{f}_{j+1/2} + \frac{1}{2}\left[\varphi(r_{j+1/2}^{+})\hat{g}_{j+1/2}^{+} - \varphi(r_{j+1/2}^{-})\hat{g}_{j+1/2}^{-}\right] \tag{1.3}$$

其中

$$\hat{g}_{j+1/2}^{+LW} = (1 - \lambda a_{j+1/2}^{+})(f_{j+1}^{+} - f_j^{+}), \quad \hat{g}_{j+1/2}^{-LW} = (1 + \lambda a_{j+1/2}^{-})(f_{j+1}^{-} - f_j^{-}) \tag{1.4}$$

$$r_{j+1/2}^{+LW} = \hat{g}_{j-1/2}^{+LW} \Big/ \hat{g}_{j+1/2}^{+LW}, \quad r_{j+1/2}^{-LW} = \hat{g}_{j+3/2}^{-LW} \Big/ \hat{g}_{j+1/2}^{-LW} \tag{1.5}$$

这里 $\hat{f}_{j+1/2} = f_j^{+} + f_{j+1}^{-}$ 可以是满足以下条件的任何通量分裂

$$a^{+} = \frac{df^{+}(u)}{du} \ge 0, \quad a^{-} = \frac{df^{-}(u)}{du} \le 0 \tag{1.6}$$

在非线性双曲型守恒律的二阶有限差分格式中，MacCormack 格式和 Warming-Beam 格式是备受推崇的两种格式，其采用两步法和完全通量形式，因而不用计算 Jacobian 矩阵。在线性情况，这两种格式分别与 Lax-Wendroff 格式和二阶迎风格式完全等价。但对于非线性情况，它们表现出更高的数值精度和更弱的数值振荡。文献[6]利用这两种候选格式，通过类比的方法构造了一种两步分量型 CTVD 格式。

CTVD 格式的预估步使用一阶迎风差分格式

$$\tilde{u}_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}) \tag{1.7}$$

于是MacCormack格式和Warming-Beam格式可以写成相同的形式，即在(1.3)中分别取如下的二阶修正项($\varphi(r) = 1$)

$$\hat{g}_{j+1/2}^{+MC} = \tilde{f}_{j+1}^{+} - f_j^{+}, \quad \hat{g}_{j+1/2}^{-MC} = f_{j+1}^{-} - \tilde{f}_j^{-} \tag{1.8a}$$

$$\hat{g}_{j+1/2}^{+WB} = \tilde{f}_j^{+} - f_{j-1}^{+}, \quad \hat{g}_{j+1/2}^{-WB} = f_{j+2}^{-} - \tilde{f}_{j+1}^{-} \tag{1.8b}$$

这里 $\tilde{f}_j^{+} = f^{+}(\tilde{u}_j^{n+1})$ 和 $\tilde{f}_j^{-} = f^{-}(\tilde{u}_j^{n+1})$ 由一阶预估步(1.7)给出。于是容易得到一个纯通量形式的修正的MacCormack格式，即(1.3)中代之以(1.8a)和如下梯度比参数

$$r_{j-1/2}^{+MC} = \hat{g}_{j-1/2}^{+MC} \Big/ \hat{g}_{j+1/2}^{+MC}, \quad r_{j+1/2}^{-MC} = \hat{g}_{j+3/2}^{-MC} \Big/ \hat{g}_{j+1/2}^{-MC} \tag{1.9}$$

很多文章[7~12]对TVD限制子作了有益的探索，考虑到非线性情况下适度耗散的限制子显得更加可靠，在本文算例中使用Roe[9]的对称限制子 φ_H

$$\varphi_H(r) = \begin{cases} r, & |r| < 1 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1.10}$$

实际上它完全等价于ENO格式中所使用的绝对值最小函数。

对于(1.8)中所需的通量分裂，本文计算采用最简单、最经济的Lax-Friedrichs形式[4]

$$f^{\pm}(u)=\frac{1}{2}(f(u)\pm\alpha u)\,,\quad \alpha=\max_u|f'(u)| \tag{1.11}$$

2 应用于欧拉方程组的计算

上述CTVD格式是全通量型TVD格式，它的最大优点是不需求解Euler方程组的Jacobian矩阵，因而对物态方程形式没有特殊要求。一维可压缩流体动力学欧拉方程组写为

$$\boldsymbol{U}_t+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})_x=0 \tag{2.1}$$

其中

$$\boldsymbol{U}=(\rho,\ \rho u,\ E)^{\mathrm{T}} \tag{2.2a}$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})=(\rho u,\ \rho u^2+P,\ u(E+P))^{\mathrm{T}} \tag{2.2b}$$

这里 ρ 是密度，u 是速度，E 为总能，P 为压力。此时通量分裂(1.11)中的系数应取为 $\alpha=\max(|u|+C)$，C 为声速。

例 1　Shu-Osher[4]理想气体的激波与密度扰动相互作用问题，初条件如下

$$\rho=3.857\,14,\qquad u=2.629\,369,\quad P=10.333\,33,\qquad x\le -4$$

$$\rho=1+0.2\sin(5x),\quad u=0,\qquad P=1,\qquad x>-4$$

该问题的未扰动流场是一马赫数为3的右传激波，当叠加一正弦波密度扰动之后，流场内激波间断与复杂的光滑波动解并存。我们每一波长内使用200个格点，取 $CFL=0.8$。图1给出了 $t=1.8$ 时数值结果与精确解的比较，可以发现CTVD格式对激波和光滑波动解都计算得很好，并且优于相应ENO格式的结果。

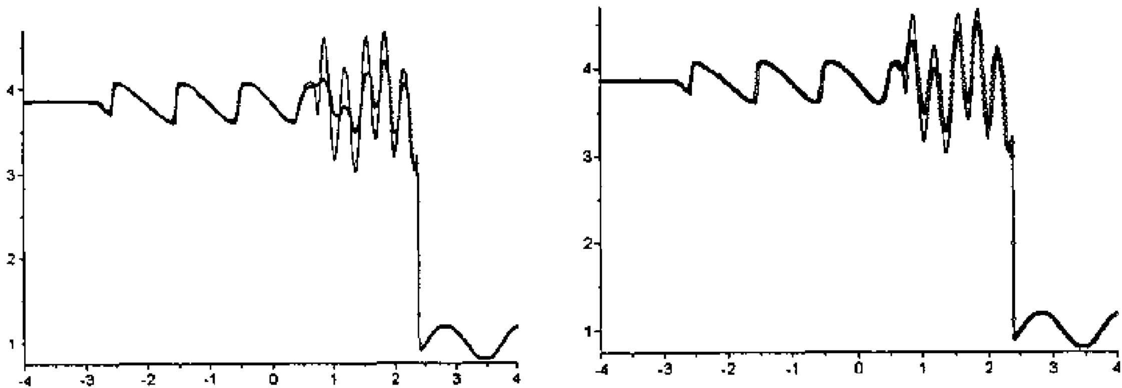


图1　激波与密度扰动相互作用问题的密度曲线，实线为精确解，数值计算每波长使用200个格点，CFL=0.8，t=1.8，(左) 二阶分量ENO格式计算，(右) CTVD格式计算

例2　水中气穴激波问题(详见[5])。初始条件如下

$$\rho=0.99,\quad u=0,\qquad P=220.272\,586\,353,\qquad x\le 0.75$$

$$\rho=1.001,\quad u=-524.027\,828,\quad P=24\,739\,399.5467,\qquad x>0.75$$

水的状态方程取为

$$P(\rho)=\begin{cases}B((\rho/\rho_0)^{\gamma}-1)+A, & \text{if}\quad \rho>\rho_c\\ P_c, & \text{otherwise}\end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $\gamma=7.15$，$A=106$，$B=3.31\times 109$，$\rho_o=1$，$\rho_c=0.999\,957\,75$，$P_o=220.272\,586\,353$。注意到这里的压力只与密度相关，因此能量方程可以省去。对此弱双曲型问题，严格的特征解耦是不可能的，但分量型CTVD格式毫无困难，数值结果见图2。

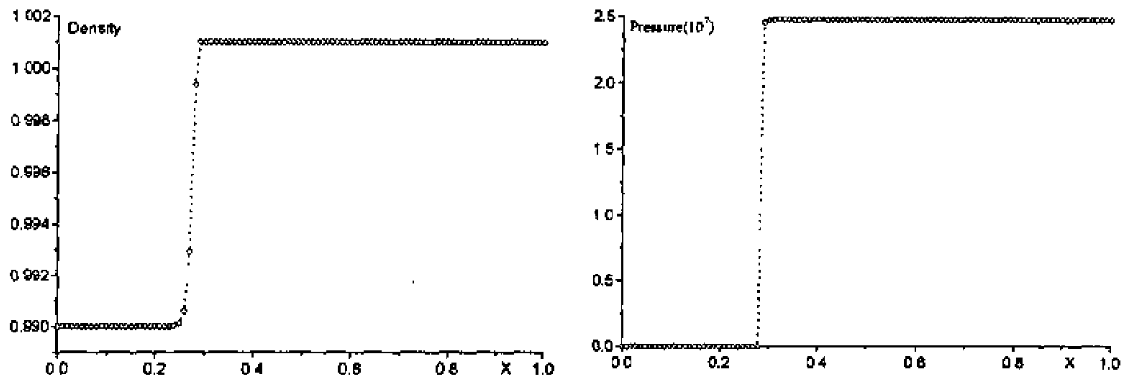


图2 CTVD格式计算水中气穴激波问题，400点，CFL=0.3，t=1×10⁻⁵

例3 PBX-9502炸药的一维理想爆轰问题，炸药初始密度 $\rho_o = 1.895\text{g/cm}^3$，爆速 $D = 7.706\text{mm/}\mu\text{s}$，CJ压力 $P_J = 0.289$ 1Mb，采用时间起爆函数，左端起爆，并使用固壁边界条件，爆轰产物气体状态方程使用JWL形式

$$P = A\left(1-\frac{\omega}{R_1 V}\right)e^{-R_1 V} + B\left(1-\frac{\omega}{R_2 V}\right)e^{-R_2 V} + \frac{\omega E}{V} \tag{2.4}$$

其中，E 为单位初始体积的内能，$V = \rho_o/\rho$，$A = 6.662$，$B = 0.0828$，$R_1 = 4.45$，$R_2 = 1.2$，$\omega = 0.35$。特征解耦的办法显然难以应对这样的物态方程，图 3 显示了 CTVD 格式计算的压力剖面与一阶迎风格式计算结果的比较。

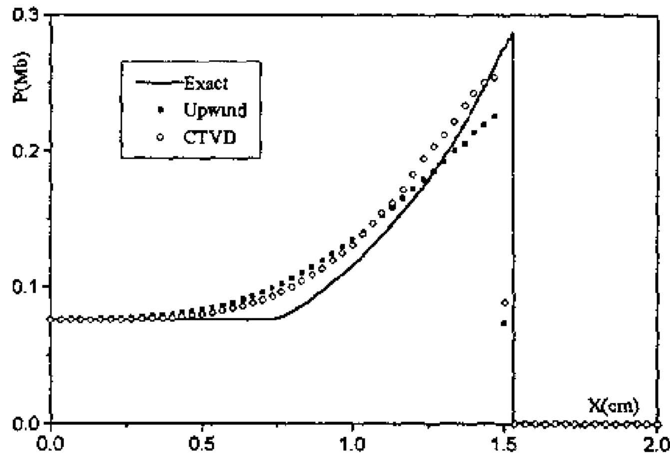


图3 CTVD格式计算爆轰波剖面（实方块为一阶迎风格式结果），Δx=1/3mm，CFL=0.6，t=2μs

例 4 双马赫反射问题。马赫数为 10 的平面空气激波，以 60° 角与一斜劈相碰。计算中将下边界 $x = 1/6$ 处开始设为斜劈固壁(详细描述见[13])。空气状态方程使用双分子振动模型(参见[4])，即

$$P = r\rho T(\varepsilon) \tag{2.5}$$

其中 ε 为比内能，温度 T 由下面的隐式给出

$$\varepsilon = C_v^{tr} T + \frac{\alpha \Theta_{\text{vib}}}{\exp(\Theta_{\text{vib}}/T) - 1} \tag{2.6}$$

这里 $r = 287.086\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$，$C_v^{tr} = r/(\gamma_{tr} - 1)$，$\gamma_{tr} = 1.4$，$\Theta_{\text{vib}} = 10^3\text{K}$，$\alpha = r$。

通常的特征解耦的办法无法施用于这个复杂的Euler方程组问题，我们使用分数步方法将CTVD格式推广到二维问题的计算。为了对比，我们还计算了该问题的理想气体情况。图4是CTVD格式计算的流场密度等值线图，计算在[0, 4]×[0, 1]区域上使用960×240个网格。计算结果非常令人满意。可以发现真实空气模型中的反射激波向底部靠近，而且三波点下方的马赫波发生弯曲。

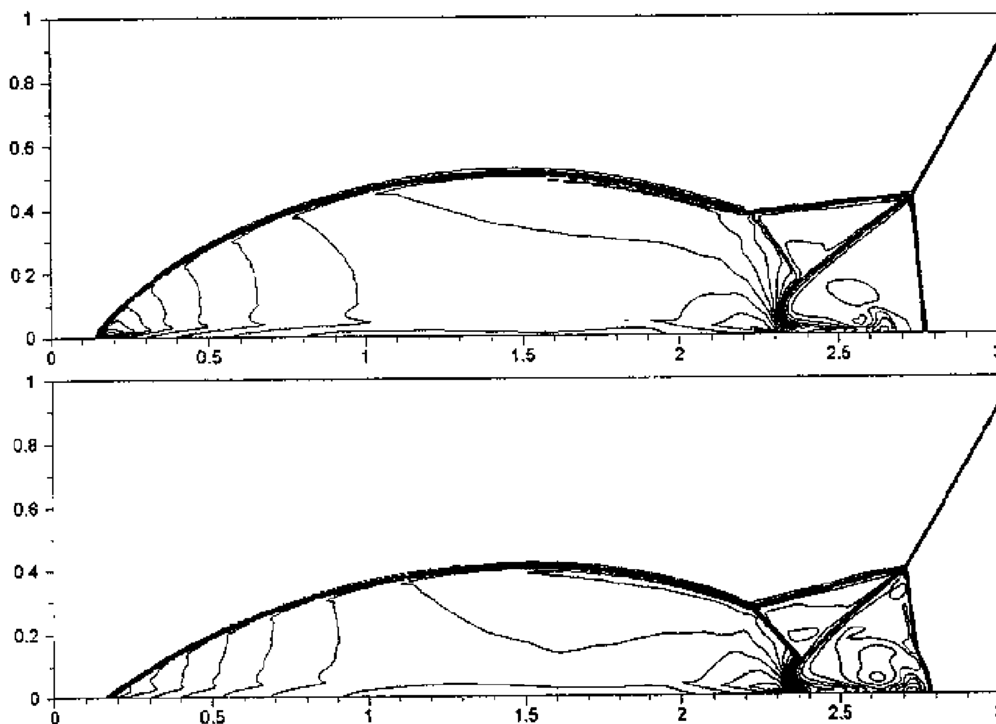


图4 CTVD格式计算双马赫反射问题的密度等值线(30条)，$\Delta x = \Delta y = 1/240$，$CFL = 0.8$，$t = 0.2$。上图为理想气体(密度从1.4到21.63)，下图为真实气体(密度从1.4到31.22)

3 结果讨论

利用著名的MacCormack格式和Warming-Beam格式构造的两步分量型CTVD格式，无需求解Euler方程组的Jacobian矩阵，易于实现完全通量方式差分，对材料的物态方程形式没有任何限制。通过以上几例复杂物态方程可压缩流体动力学的数值计算显示，该格式的表现非常令人满意。该格式只有二阶(极值点处一阶)精度，但却给出了优于相应ENO格式的激波分辨率。与使用特征解耦的一般二阶TVD格式相比，CTVD格式的计算速度快一倍以上。我们期望更高阶这样的多步TVD格式，将会更加充分展示其计算速度快的优点。

参 考 文 献

1 Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J Comput Phys*, 1983, 49: 357~393

2 Harten A, Engquist B, Osher S, Chakravarthy R. Uniformly high-order accurate essentially non-oscillatory schemes III *J Comput Phys*, 1987, 71: 231~303

3 Shu CW, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes II. *J Comput Phys*, 1989, 83: 32~78

4 Shu CW. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. ICASE Report,

1997, No.97-65

5 Liu XD, Osher S. Convex ENO high order multi-dimensional schemes without field by field decomposition or staggered grids. *J Comput Phys*, 1998, 142: 304~330

6 Yu Heng. A second-order accurate component-wise TVD scheme for nonlinear hyperbolic conservation laws. *J of Comp Phys*, (accepted)

7 Sweby PK. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM J Numer Anal*, 1984, 21: 995~1011

8 Roe PL. Some contributions to the modeling of discontinuous flows. *Lectures in Applied Mathematics*, 1985, 22: 163

9 Roe PL. A survey of upwind differencing techniques. *Lecture Notes in Physics*, 1989, 323: 69~78

10 Hartwich P-M, Hsu C-H and Liu CH. Total variation diminishing (TVD) schemes of uniform accuracy. NASA-TM-100552, 1988

11 Jeng YN, Payne UJ. An adaptive TVD limiter. *J Comput Phys*, 1995, 118: 229~241

12 Mohit Arora, Philip L Roe. A well-behaved TVD limiter for high_resolution calculations of unsteady flow. *J Comput Phys*, 1997, 132, 3~11

13 Woodward P, Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *J Comput Phys*, 1984, 54: 115~173

强涡-激波干扰及声场的数值模拟

马延文*　傅德薰**

(*LHD, **LNM, 中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要　气动声学是气动力学与声学之间的交叉学科，着重研究流体流动及其与物体作用导致噪声的产生机理。对它的研究有重要应用背景。本文由两个部分组成。为了更好地捕捉激波和多尺度物理量发展了带群速度控制的超紧致格式，利用这一方法数值模拟了强涡-激波干扰问题，给出了四极子声场的发展及细致的流动结构。

关键词　超紧致格式，涡-激波干扰，声场的数值模拟

1　带群速度控制的超紧致格式

计算气动声学所面对的是求解非定常多尺度问题。其特点是一些流动参数的量级和尺度差异大，声能和主流能量差异大、频带宽、传播距离远等。由于条件限制在对区域进行有限截断时给边界条件的处理也带来困难。这些特点要求计算方法有着小的色散和耗散误差，高精度方法是可取的方法之一。

利用文献[1]中发展的超紧致格式以提高对小振幅高频波的模拟能力，对这一方法加以群速度控制以提高对激波的捕捉能力。利用完全可压 Navier-Stokes 方程来模拟涡-激波干扰问题。下面对数值方法作一简单描述，考虑以下之模型方程及对应的半离散格式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}+\frac{f_j^{<1>}}{\Delta x}=\frac{1}{Re}\frac{u_j^{<2>}}{\Delta x^2} \tag{2}$$

这里 $g_j^{<k>}/\Delta x^k$ 为导数 $\partial g^k/\partial x^k$ 的差分逼近式。(2)式中的 $f^{<1>}$ 可由如下之差分方程中求得[1]

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{L}\boldsymbol{F}_{j-1}+(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{F}_j-\frac{1}{2}\boldsymbol{L}\boldsymbol{F}_{j+1}=\delta_x^0 f_j\,\boldsymbol{e}_1 \tag{3}$$

这里 $\boldsymbol{F}_j$ 和 $\boldsymbol{e}_1$ 为 N 维矢量，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 为 N×N 矩阵

$$\boldsymbol{F}=[f^{<1>},f^{<3>},\dots,f^{<2N-1>}]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{1!}, & \frac{1}{3!}, & \cdots, & \frac{1}{[2N-1]!}\\ 0, & \frac{1}{2!}, & \cdots, & \frac{1}{[2(N-1)]!}\\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots\\ 0, & 0, & \cdots, & \frac{1}{2!}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}0, & 0, & \cdots, & 0\\ 1, & 0, & \cdots, & 0\\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots\\ 0, & 0, & \cdots, & 0\end{bmatrix}$$

$f^{<2l-1>}/\Delta x^{2l-1}$ 将以 $2(N-l+1)$ 阶精度逼近 $\partial^{2l-1}f/\partial x^{2l-1}$。可构造逼近于偶次导数的逼近式[1]。在计算中取 $N=3$，对一阶导数逼近精度为六阶。这一方法有利于捕捉小振幅高频波物理量。

经线性分析可知，如此构造的格式属慢型(SLW)[2]，此时数值解中的高频波的群速度将慢

于对应的物理波群速度。用其计算激波时将在激波后产生非物理振荡。为消除非物理振荡，需对群速度加以控制[2]，使得格式在波后为快型(FST)，波前为 SLW 型。可以证明，耗散比拟修正[3]可以控制群速度。文中对(2)式的右端加了经过控制的 7 阶导数项，使得耗散比拟系数为正，且不降低原格式的精度。7 阶导数的计算利用了由(3)式中求得的 $f^{<5>}$。即在计算中所采用的半离散格式为

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}+\frac{f_j^{<1>}}{\Delta x}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_j^{<2>}}{\Delta x^2}+D_j(u) \tag{4}$$

式中 $D_j(u)$ 为 $D(u)$ 的离散形式，而

$$D(u)=\sigma\Delta x^6\frac{\partial}{\partial x}A\frac{\partial u}{\partial x} \tag{5}$$

$$A=\left|\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}/\frac{\partial f}{\partial x}\right|(|u|+c) \tag{6}$$

对(5)式采用简单的中心差分，对(6)式的离散利用了由(3)式所求得的 $f^{<1>}$和$f^{<5>}$。可以看出，在式(4)中相当引入了一个七阶导数项，而其中的符号得到了控制。经过改造后的格式在波前为 SLW 型，在波后对低波和中高波表现为 FST 格式的特性。

对(4)式的求解采用了三步 R-K 方法。按这种方式构造的格式使激波解得到了改进。但用以求解强激波时数值解中仍有非物理振荡产生。

2 涡-激波干扰问题的数值模拟

设有一静止激波，一按顺时针方向旋转的涡自左向右运动并与激波相互干扰，促使激波变型。变型后激波的右侧形成自上而下的压缩区，稀疏区，压缩区和稀疏区。这就是涡-激波干扰形成的前导四极子声源的雏型。随时间的推移，四极子声波向四周传播。以后还将生成后继的四极子声。

在涡与激波相互干扰时将会形成二次间断。在一些文章中[4]称其为二次激波。我们利用本文方法作了同样情况的计算。发现，在很多情况下形成的二次间断并不是激波，因为在这一间断的两侧都是亚音速区。在这一计算中同样发现了并不是激波的二次间断。本文将主要给出强涡-激波干扰问题的计算结果。

这里只给出双涡与激波相互干扰问题的计算结果。设有一静止激波位于 $x=-0.1$ 处，初始时刻有半径为 1 的两个涡分别位于 $(x,y)=(-3,2)$, $(-3,-2)$ 处，上面的涡以逆时针方向旋转，下一涡以顺时针方向旋转。取 $Re=400$（基于涡半径和来流的声速）计算了表 1 的三种情况。

表 1

Case	A	B	C
M_∞	1.5	2	2
M_v	0.5	0.5	1.0

这里 M_∞ 为来流马赫数，M_v 为涡的旋转马赫数。在图 1~3 中分别给出了扰动压力 $\Delta P=P-P_\infty$，密度和马赫数在不同时刻的等值线图。在扰动压力的等值线中实线表示高于来流压力的区域，虚线表示低于来流压力的区域。在等马赫数线图中实线表示超声速区，虚线表示亚声速区。从扰动压力的等值线中可以看出四极子波的形成、发展及上下两涡周围所产生之四极子波的相互干扰，二次间断以及涡结构内部间断的产生与发展。对照不同时刻的

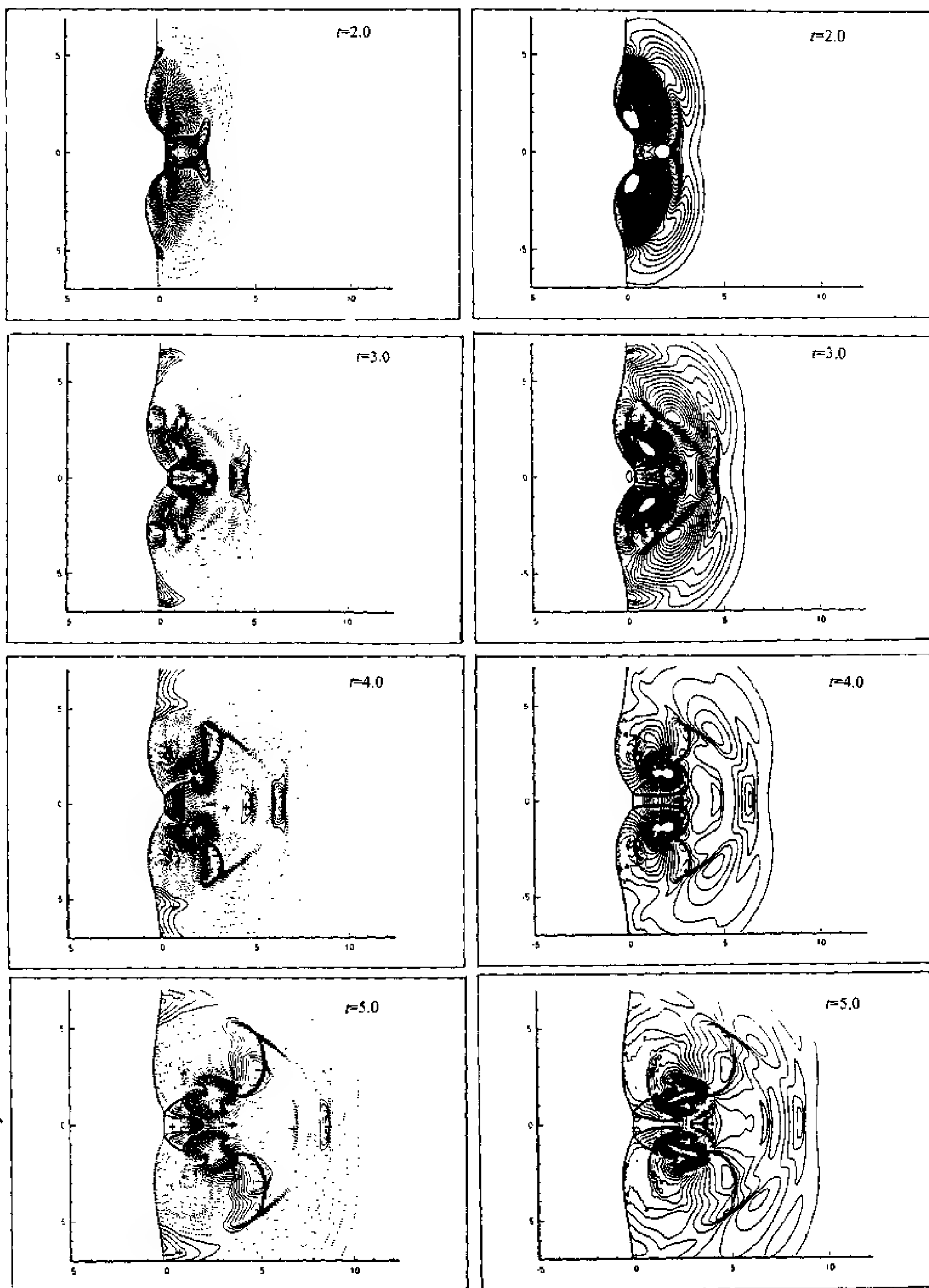


图 1　扰动压力等值线图 $\Delta p = p - p_{\infty}$

图 2　密度等值线图

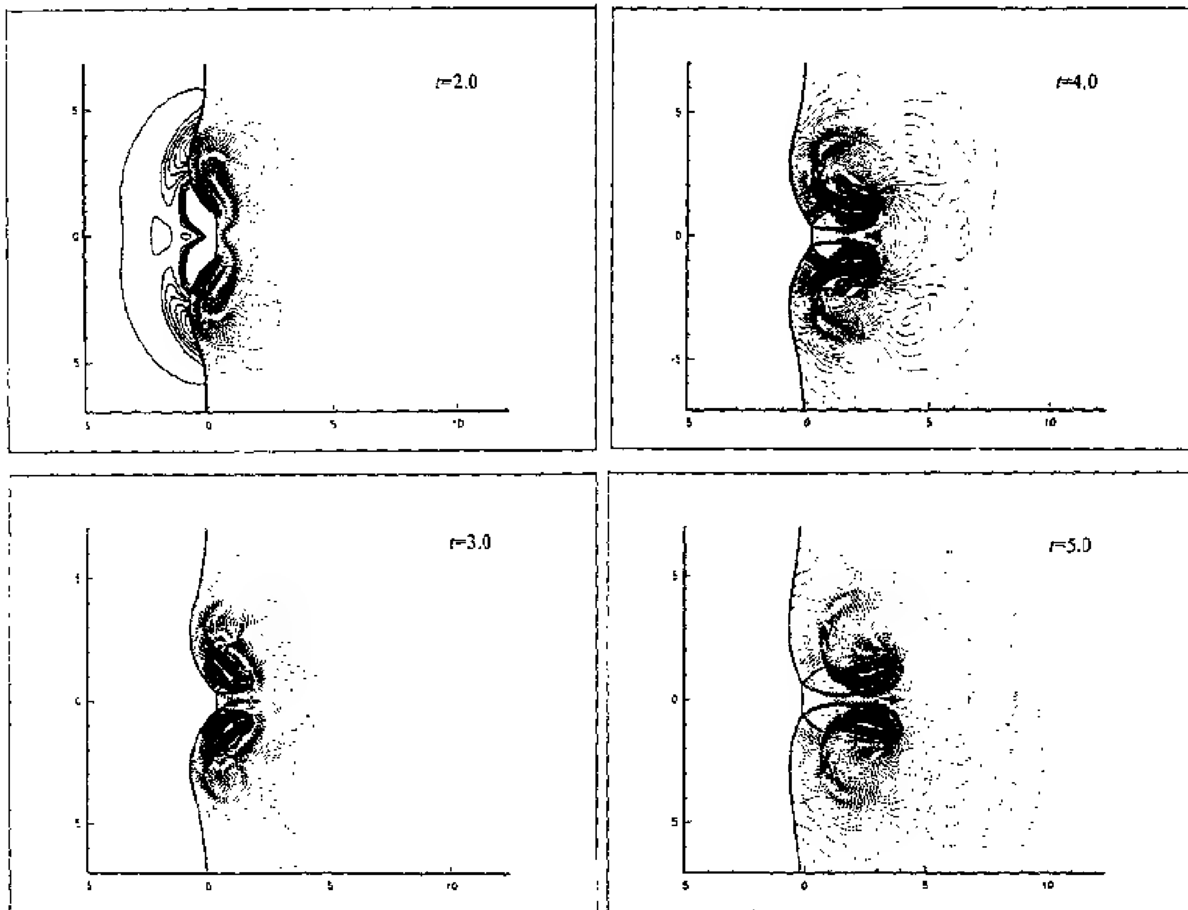


图3 马赫数等值线图

密度等值线及扰动压力等值线可以区分出接触间断来。对照不同时刻的扰动压力和 Mach 数等值线可将激波区分开来。在弱涡激波相互干扰问题计算中二次间断线都与主激波相连[5]。而在强涡-激波相互干扰问题中除与主激波相连的二次间断外还有悬浮于涡中的间断面，其中包括接触间断面。对照压力与马赫数等值线可知，二次间断面中有激波存在。

参 考 文 献

1 Ma Yanwen, Fu Dexun. *CFD J*, 1996, 5(2): 259~276

2 Fu Dexun, Ma Yanwen. *JCP*, 1997, 134, 1~15

3 Ma Yanwen, Fu Dexun. Science in China, Series A, 1993, 35(7): 1090~1100

4 Osamu Inoue, Yuji Hattori. *JFM*, 1999, 390: 81~116

5 Fu Dexun, Ma Yanwen. *Int J for Num Methods in Fluids*, to appear

扩展谱方法及其应用 1)

张庆华　夏　萌　曲媛媛

（国家海洋局第一海洋研究所，海洋环境科学与数值模拟海洋局重点实验室，青岛 266061）

摘要　为求解平面有限区域上的边值问题，首先将其扩展到更大的矩形区域上的两个相邻区域上的边值问题。为同时求解这两个边值问题，在扩展区域引入匹配函数，作为待定源函数导出了一个矩形区域上的统一形式的边值问题，从而可以用常规谱方法求解。给出了构造匹配函数的基本原则。作为算例，将此方法用于求解圆形区域外的边值问题，其计算结果与相应的差分结果对比说明了该方法的有效性。

关键词　扩展，谱方法，匹配函数

前　言

众所周知，求解常微分方程定解问题的步骤一般是先得出常微分方程的通解，它包含一些待定常数，然后再根据定解条件确定这些常数值。改变定解条件不会影响方程通解的形式，只会影响求待定常数的方式和常数的数值。但对于偏微分方程，往往没有这么幸运。以偏微分方程边值问题为例，求解方式与区域形状及边界条件是密切相关的。即使对于最简单的线性常系数偏微分方程，求解区域的不规则性也将给解析求解带来巨大的困难，通常只能求近似的数值解。

利用谱方法求解规则区域上的偏微分方程边值问题相对来讲是比较方便的。相对于差分方法和有限元（边界元）方法，谱模式给出的是一组级数表达式，它具有很好的全场的解析特性，非常便于做进一步的微分运算。比如，若得到了谱模态形式的流函数，只需对基底函数求微商运算就可得到流速分布，这是其他离散方法无法比拟的。但对于不规则区域的边值问题，使用谱方法就非常困难。我们这里将给出一种扩展谱方法，试图求出偏微分方程边值问题含待定系数的级数形式的通解。

1　扩展谱方法的构建

下面我们将藉助扩展的规则区域给出一种求解不规则区域边值问题的谱方法[1]。

考虑二维不规则区域ω_1，边界$\partial\omega_1=\sigma_1+\sigma_2$，见图(1)。定义在其上的边值问题为：

方程

$$\widetilde{L}\{\psi_1(x,y)\}=0\,,\quad (x,y)\in\omega_1 \qquad (1)$$

边界条件

$$\widetilde{B}_1\{\psi_1(x,y)\}\big|_{\sigma_1}=f_1(\xi)$$

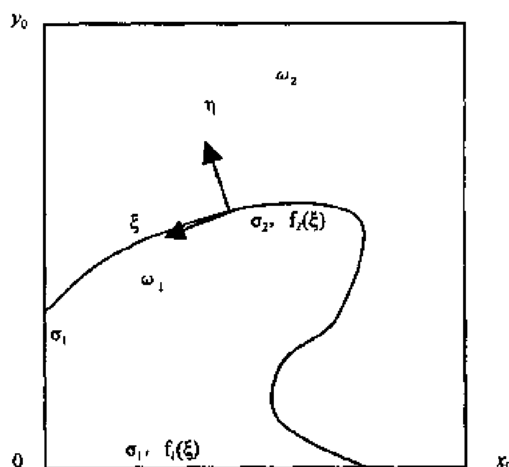


图 1　不规则区域 ω_1 及其开拓区域示意图

1) 国家自然科学重点基金(No. 49736190)资助项目

$$\widetilde{B}_2\{\psi_1(x,y)\}\big|_{\sigma_2}=f_2(\xi)$$

这里$\widetilde{L}$为二阶线性偏微分算子，$\widetilde{B}$为不超过一阶的微分算子，ξ为沿边界的自然坐标。

考虑矩形（规则）区域$\omega_0:\{0<x<x_0,0<y<y_0\}$，覆盖不规则区域$\omega_1$，于是得到$\omega_2=\omega_0-\omega_1$也是不规则区域。再考虑$\omega_2$上的边值问题

同样的方程

$$\widetilde{L}\{\psi_2(x,y)\}=0\text{，}(x,y)\in\omega_2 \tag{2}$$

在扩展边界即共同边界上有相同的边界条件

$$\widetilde{B}_2\{\psi_2(x,y)\}=f_2(\xi)\text{，}(x,y)\in\partial\omega_1\cap\partial\omega_2=\sigma_2$$

在其余边界上，即矩形边界上满足齐次边条件，即

$$\psi_2(x,y)=0\text{，}(x,y)\in\partial\omega_2\cap\partial\omega_0$$

于是我们就有规则区域ω_0上同一个偏微分方程的两个边值问题，其求解函数形式上可写为

$$\psi(x,y)=\psi_1(x,y)H(\omega_1)+\psi_2(x,y)H(\omega_2) \tag{3}$$

满足方程

$$\widetilde{L}_1\{\psi(x,y)\}\equiv\widetilde{L}\{\psi_1(x,y)\}H(\omega_1)+\widetilde{L}\{\psi_2(x,y)\}H(\omega_2)=0 \tag{4}$$

和$\partial\omega_1+\partial\omega_2$的边界条件，或$\partial\omega_0$和$\sigma_2=\partial\omega_1\cap\partial\omega_2$上的边界条件

$$\widetilde{B}_2\{\psi(x,y)\}\big|_{\sigma_2}=f_2(\xi) \tag{5}$$

$$\{\psi(x,y)\}\big|_{\partial\omega_0-\sigma_1}=0\text{，}\widetilde{B}_1\{\psi(x,y)\}\big|_{\sigma_1}=f_1(\xi) \tag{6}$$

这里

$$H(\omega_1)=\begin{cases}1 & (x,y)\in\omega_1\\0 & (x,y)\,\overline{\in}\,\omega_1\end{cases}\qquad H(\omega_2)=\begin{cases}1 & (x,y)\in\omega_2\\0 & (x,y)\,\overline{\in}\,\omega_2\end{cases} \tag{7}$$

$$H(\omega_1)+H(\omega_2)=1\qquad (x,y)\in\omega_0$$

这里$\psi_1(x,y)$和$\psi_2(x,y)$分别是两个相邻区域上同样方程的边值问题解，虽然在相邻边界上有同样的边界条件，但一般并不能保证函数$\psi(x,y)$在相邻边界上光滑衔接。如果我们要求将两个区域合并考虑，那么相邻边界就成为区域内部，对于二阶方程其解式应该在区域内部各点上存在二阶导数。我们将很容易证明，$\psi_1(x,y)$和$\psi_2(x,y)$可以在扣除一个匹配函数的情况，拼接成一个光滑的函数。为此定义ω_0上的光滑函数，它应该是二阶可微的

$$F(x,y)=\begin{cases}F_1(x,y)=\psi_1(x,y) & (x,y)\in\omega_1\\F_2(x,y)=\psi_2(x,y)-\widetilde{C}(x,y) & (x,y)\in\omega_2\end{cases} \tag{8}$$

于是

$$
\begin{aligned}
\psi(x,y) &= F_1(x,y)H(\omega_1) + \left[F_2(x,y) + \widetilde{C}(x,y)\right]H(\omega_2) \\
&= F(x,y) + \widetilde{C}(x,y)H(\omega_2) \\
F(x,y) &= F_1(x,y)H(\omega_1) + F_2(x,y)H(\omega_2)
\end{aligned} \tag{9}
$$

事实上，如果在扩展边界 σ_2 附近取自然坐标系 (ξ,η)，ξ 沿 σ_2，η 指向 ω_2，要想保障 $F(x,y)$ 二阶可微，至少要求一阶导数

$$
\frac{\partial}{\partial \eta}F(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial \eta}H(-\eta) + \frac{\partial F_2}{\partial \eta}H(\eta) + (F_2 - F_1)\delta(\eta)
$$

非奇异，即

$$
(F_2 - F_1)\big|_{\eta=0} = 0 \tag{10}
$$

和二阶导数

$$
\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}F(x,y) = \frac{\partial^2 F_1}{\partial \eta^2}H(-\eta) + \frac{\partial^2 F_2}{\partial \eta^2}H(\eta) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial \eta} - \frac{\partial F_1}{\partial \eta}\right)\delta(\eta)
$$

非奇异，即

$$
\left(\frac{\partial F_2}{\partial \eta} - \frac{\partial F_1}{\partial \eta}\right)\bigg|_{\eta=0} = 0 \tag{11}
$$

于是要求

$$
\begin{cases}
\widetilde{C}(x,y)\big|_{\eta=0} = (\psi_2 - \psi_1)\big|_{\eta=0} \equiv \psi_{2,0} - \psi_{1,0} \\
\dfrac{\partial}{\partial \eta}\widetilde{C}(x,y)\bigg|_{\eta=0} = \left(\dfrac{\partial}{\partial \eta}\psi_2 - \dfrac{\partial}{\partial \eta}\psi_1\right)\bigg|_{\eta=0} \equiv \psi_{2,1} - \psi_{1,1}
\end{cases} \tag{12}
$$

可见只要按这种方式去构造匹配函数，就可以保证 $F(x,y)$ 是 ω_0 上的光滑函数，于是就应有

$$
\begin{aligned}
&\psi(x,y) = F(x,y) + \widetilde{C}(x,y)H(\omega_2) \\
&\widetilde{L}_1\{\psi(x,y)\} = \widetilde{L}\{F(x,y)\} + \widetilde{L}\{C(x,y)\}H(\omega_2) = 0
\end{aligned} \tag{13}
$$

这样我们就建立了 $F(x,y)$ 在规则区域 ω_0 上的边值问题

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{L}\{F(x,y)\} = -\widetilde{L}\{\widetilde{C}(x,y)\}H(\omega_2) \\
&F(x,y)\big|_{\partial\omega_0-\sigma_1} = -\widetilde{C}(x,y)\big|_{\partial\omega_0-\sigma_1} \qquad \widetilde{B}_1\{F(x,y)\}\big|_{\sigma_1} = f_1(\xi)
\end{aligned} \tag{14}
$$

显然只有给出匹配函数的具体形式，以上边值问题就可以按常规谱方法求解[2]，这样我们给出了一种求不规则区域上边值问题的谱方法。

2 算 例

对于圆形外的矩形 ω_0 内区域 $\omega_1:\{r > r_0,\ 0 < x < x_0,\ 0 < y < y_0\}$ 上的边值问题

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{L}\{\psi_1(x,y)\} = (\nabla^2 + \lambda)\psi_1(x,y) = 0 \\
&\psi_1\big|_{r=r_0} = g(\theta) = \sin\theta/2, \qquad \psi_1\big|_{\partial\omega_0} = 0
\end{aligned} \tag{15}
$$

另外对圆内$\omega_2:\{r<r_0\}$也可提出类似边值问题

$$\begin{aligned}&\widetilde{L}\{\psi_2(x,y)\}=0\\&\psi_2\big|_{r=r_0}=g(\theta)=\sin\theta/2\end{aligned}\tag{16}$$

将它们合并为如下扩展边值问题

$$\begin{aligned}&\widetilde{L}\{F(x,y)\}=-\widetilde{L}\{C(x,y)\}H(\omega_2)\\&F\big|_{\partial\omega_0}=0\\&F\big|_{r=r_0}=g(\theta)\end{aligned}\tag{17}$$

和

$$C\big|_{r=r_0}=0\tag{18}$$

按前述原则，适当构造匹配函数$C(x,y)$，并将解式展开为如下形式

$$F(x,y)=\sum_{nm}A_{nm}\sin\alpha_n x\sin\beta_m y\qquad\alpha_n=\frac{n\pi}{x_0}\qquad\beta_m=\frac{m\pi}{y_0}\tag{19}$$

按常规谱方法就可解出$F(x,y)$和$C(x,y)$

于是得到圆外边值问题的解

$$\psi_1(x,y)=F(x,y)\tag{20}$$

图(2)中给出了按此扩展谱方法得到的圆外$\psi_1=F(x,y)$的分布。图(3)给出了按差分方法计算出的相应边值问题的解$\psi_1(x,y)$。不难看出，按扩展谱方法计算结果与差分方法计算结果几乎完全一致。这至少证明本方法用于特定算例是成功的。

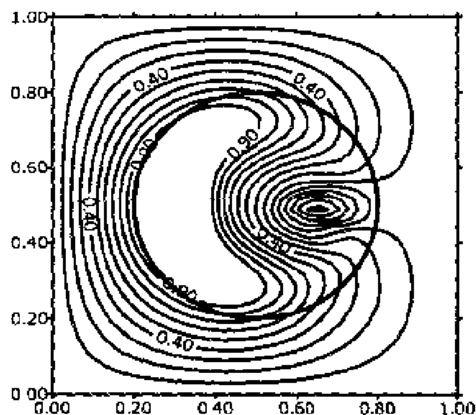


图 2 扩展谱方法计算结果($r>r_0$)，$\psi_1(x,y)=F(x,y)$

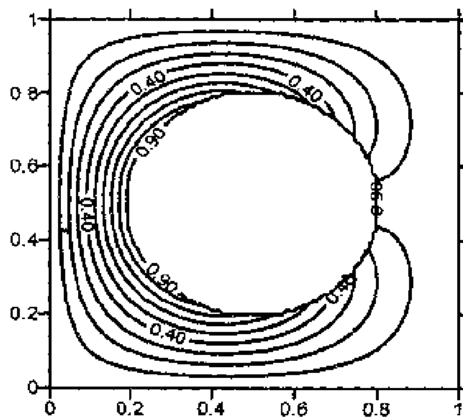


图 3 差分方法计算结果($r>r_0$)，$\psi_1(x,y)$

参 考 文 献

1 张庆华，李竖克，徐昊. 求解偏微分方程边值问题通解的算例. 高科技研究中的数值计算，1999，5：362~267

2 张庆华，徐昊，曲媛媛. 扩展谱方法在凹形区域中的应用. 高科技研究中的数值计算，2000，6：421~426

机器推导在空气动力学计算中的应用

杨新铁　朱万林　罗　谦
(西北工业大学翼型叶栅国防重点实验室，西安 710072)

摘要　为了降低气动方程组数值求解中的编程困难，在离散差分格式的推导中尝试采用计算机机器推导的方法，为此定义了计算机推导中的差分算子的数学表达，借助于它推导出数值离散格式后直接生成二维非定常欧拉方程的大部分 Fortran 源程序，经算例验证，计算结果与实验值吻合较好，从原则上讲推广到基于NS方程的流场数值计算也是可行的。
关键词　人工智能，机器推导，欧拉方程，有限体积法

引　言

计算机推导数值计算的程序所用的表达式，准确、迅速。这在我们研究曲面坐标系下的CFD 软件时显得尤为重要，因为非正交曲面坐标系下的 NS 方程的项数会达到上万项，如果利用计算机推导，就可以使人们能够胜任原来不能完成的理论公式的推导，简化，离散任务，甚至还可以由结果直接生成 FORTRAN 语言或 C 语言的源程序，大大节约了程序编制人员的劳动。

1　机器推理在计算流体力学差分中的应用

1.1 差分格式的定义及推导

做机器推理所使用的软件是 Waterloo Maple 公司所出的 Maple V 软件。它使我们可以完成如微分，积分，矩阵等等许多复杂的数学计算。在流体力学数值计算中，我们可以借助它在推导出微分方程组以后进一步离散，得到数值计算所需的差分格式。由于差分表达式是最经常使用的。首先让我们用软件对差分格式进行定义。Maple V 软件的语句以“>”为提示符，以“;”为终止符，在后文中这一点将不再注明。作为第一次摸索，也是为了更直接的检查机器推导的结果，我们在此略去有限差分算子里面作为除数的步长 Δx，这样在构造粘性项和阻尼项时我们都可以利用这种算子表达形式。(新的版本将具有这些功能)

中心差分算子 δ 可以采用算符定义的办法来定义。因为输入是用 ASCII 码，所以，我们在输入时只能用 delta 来表示 δ，而用 phi 来表示 ϕ，而在计算机屏幕输出时就是 δ 和 ϕ。一阶中心差分算子表达如下：

输入> delta: =(phi,i,j)->phi[i+1,j]-phi[i-1,j]; 得到计算机的输出为

$$\delta := (\phi, i, j) \to \phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}$$

这算子表示如果对于任何一个其它变量 γ 求中心差分时，我们只要将 ϕ 替换为 γ 即可。例如让算子 δ 作用在 γ 上面就得到 γ 的 $\delta(\gamma)=\gamma_{i+1,j}-\gamma_{i,j-1}$ 中心差分表达式：可以同样的办法来定义一阶向前差分算子和一阶向后差分算子，这里，我们用后缀 forward 和 back 来区分二者。

输入> delta_forward:=(phi,i,j)->phi[i+1,j]-phi[i,j]; 得到

$$delta_forward := (\phi, i, j) \to \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}$$

输入> delta_back:=(phi,i,j)->phi[i,j]-phi[i-1,j]; 得到

$$delta_back := (\phi, i, j) \to \phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}$$

利用它作用在给定变量和下标上，从而得到二阶中心差分格式

输入>delta2:=(phi,i,j)->delta_back(phi,i+1,j)-delta_back(phi,i,j); 从而得到

$$\delta 2 := (\phi, i, j) \to delta_back(\phi, i-1, j) - delta_back(\phi, i, j)$$

利用同样的办法，我们可以定义 j 方向的中心差分算子 delta_j 以及定义 j 方向一阶向前差分算子 delta_forward_j, j 方向一阶向后差分算子 delta_back_j, j 方向二阶中心差分格式 delta2_j 和交叉差分算子 delta2ij 等作为一个例子，我们推导利用 Thompson 方法设计计算网格时的的差分格式了。Thompson 公式如下

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0$$

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0$$

为此利用差分算子首先得出公式中的对 ξ 二阶偏导数：

输入> dx2dxidxi:=delta2(x,i,j); 得到输出

$$dx2dxidxi := x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}$$

同样的得到和对 ξ 及 η 交叉偏导数，如

$$dx2dxi\det a := x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1} \cdots$$

从而原方程可以由输入一下命令化为差分方程

输入>eqx:=alpha*dx2dxidxi-2*beta*dx2dxideta+gamma1*dx2detadeta; 得到

$$eqx := \alpha(x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}) - 2\beta(x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1}) + \gamma 1(x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1})$$

输入>eqy:=alpha*dy2dxidxi-2*beta*dy2dxideta+gamma1*dy2detadeta; 得到

$$eqy := \alpha(y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}) - 2\beta(y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j-1}) + \gamma 1(y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1})$$

然后采用 Maple V 中的 solve 函数，从上述方程中解出 $x_{i,j}$ 和 $y_{i,j}$，即可得到我们所需要的计算迭代公式，输入的命令为> eqx2:=solve(eqx,x[i,j]); 得到计算迭代公式如下

$$eqx2 := 1/2(\alpha x_{i+1,j} + \alpha x_{i-1,j} - 2\beta x_{i+1,j+1} + 2\beta x_{i-1,j+1} + 2\beta x_{i+1,j-1}) - 2\beta x_{i-1,j-1} + \gamma 1 x_{i,j+1} + \gamma 1 x_{i,j-1})/(\alpha + \gamma 1)$$

输入>eqy2:=solve(eqy,y[i,j]); 得到

$$eqy2 := 1/2(\alpha y_{i+1,j} + \alpha y_{i-1,j} - 2\beta y_{i+1,j+1} + 2\beta y_{i-1,j+1} + 2\beta y_{i+1,j-1}) - 2\beta y_{i-1,j-1} + \gamma 1 y_{i,j+1} + \gamma 1 y_{i,j-1})/(\alpha + \gamma 1)$$

计算方程中的系数 α, β, γ 的表达式利用直接代入算子的表达式得到如下

$$\alpha := (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})^2$$

$$\beta := (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + (y_{i+1,j} - y_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})$$

$$\gamma 1 := (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i-1,j})^2$$

这样，我们就得到了用 Thompson 法生成网格时迭代计算所需的差分格式。最后利用 maple 里面的 fortran 作用在上面各表达式上，就得到了需要的 fortran 源程序。

1.2 及其推理在欧拉方程离散中的应用

下面我们来介绍在推导欧拉方程所需的差分格式中如何运用 Maple V 软件。欧拉方程的

通量可以利用输入以下 maple 语句来定义

输入:>F :=matrix([[rho *u ,rho *v],[rho *u *u +p ,rho *u *v],
[rho *u*v,rho *v*v +p],[rho*hn*u,rho *hn*v]]);

输出结果如下

$$F := \begin{bmatrix} \rho u & \rho v \\ \rho u^2 + p & \rho uv \\ \rho uv & \rho v^2 + p \\ \rho hnu & \rho hnv \end{bmatrix}$$

然后通过利用变量置换的命令我们可以得到（i,j）点上的通量矢量

>F[i,j]:=subs({rho=rho[i,j],u=u[i,j],v=v[i,j],p=p[i,j],});得到

$$F_{i,j} := \begin{bmatrix} \rho_{i,j}u_{i,j} & \rho_{i,j}v_{i,j} \\ \rho_{i,j}{u_{i,j}}^2 + p_{i,j} & \rho_{i,j}u_{i,j}v_{i,j} \\ \rho_{i,j}u_{i,j}v_{i,j} & \rho_{i,j}{v_{i,j}}^2 + p_{i,j} \\ \rho_{i,j}hn_{i,j}u_{i,j} & \rho_{i,j}hn_{i,j}v_{i,j} \end{bmatrix}$$

同样，利用下标 j 置换成 j-1 的方法输入以下命令

>F[i,j-1]:=subs(j=j-1,evalm(F[i,j]));我们可以得到（i,j-1）上的通量矢量

$$F_{i,j-1} := \begin{bmatrix} \rho_{i,j-1}u_{i,j-1} & \rho_{i,j-1}v_{i,j-1} \\ \rho_{i,j-1}{u_{i,j-1}}^2 + p_{i,j-1} & \rho_{i,j-1}u_{i,j-1}v_{i,j-1} \\ \rho_{i,j-1}u_{i,j-1}v_{i,j-1} & \rho_{i,j-1}{v_{i,j-1}}^2 + p_{i,j-1} \\ \rho_{i,j-1}hn_{i,j-1}u_{i,j-1} & \rho_{i,j-1}hn_{i,j-1}v_{i,j-1} \end{bmatrix}$$

同样，利用下标 j 置换成 j+1 的方法，以及下标 i 换成 i-1，或者 i+1 的办法，输入以下置换命令>F[i,j+1]:=subs(j=j+1,evalm(F[i,j]));>F[i-1,j]:=subs(i=i-1,evalm(F[i,j]));>F[I+1,j]:=subs(i=I+1,evalm(F[i,j])); 就可以得到(i,j+1)，(I-1,j)，(I+1,j)点的通量表达式。因为输出结果类似，这里不再复述。接着通过取平均值的办法得到 $(i+1/2, j)$，$(i-1/2, j)$，$(i, j-1/2)$ 和 $(i, j+1/2)$ 的通量矢量,为此输入>F[i,j-1/2]:=1/2*evalm(F[i,j]+F[i,j-1]);得到输出为

$$F_{i,j-1/2} := \begin{bmatrix} \rho_{i,j}u_{i,j} + \rho_{i,j-1}u_{i,j-1} & \rho_{i,j}v_{i,j} + \rho_{i,j-1}v_{i,j-1} \\ \rho_{i,j}{u_{i,j}}^2 + p_{i,j} + \rho_{i,j-1}{u_{i,j-1}}^2 + p_{i,j-1} & \rho_{i,j}u_{i,j}v_{i,j} + \rho_{i,j-1}u_{i,j-1}v_{i,j-1} \\ \rho_{i,j}u_{i,j}v_{i,j} + \rho_{i,j-1}u_{i,j-1}v_{i,j-1} & \rho_{i,j}{v_{i,j}}^2 + p_{i,j} + \rho_{i,j-1}{v_{i,j-1}}^2 + p_{i,j-1} \\ \rho_{i,j}hn_{i,j}u_{i,j} + \rho_{i,j-1}hn_{i,j-1}u_{i,j-1} & \rho_{i,j}hn_{i,j}v_{i,j} + \rho_{i,j-1}hn_{i,j-1}v_{i,j-1} \end{bmatrix}$$

接着计算各条边上的 $\boldsymbol{n}\cdot ds$，$\boldsymbol{n}$ 的方向以指向单元外部为正。

输入命令>nds:=matrix([[dy],[-dx]]);得到输出

$$nds := \begin{bmatrix} dy \\ -dx \end{bmatrix}$$

这是对一般情况而言，现在用 nds12 代表 1 到 2 的边，定义 dy12 代表 y2-y1，dx12 代表 x2-x1，是从 1 到 2 的坐标变化。比如输入

>nds12:=subs(dy=y[i+1,j]-y[i,j],dx=x[i+1,j]-x[i,j],evalm(nds));得到

$$nds12 := \begin{bmatrix} y_{i+1,j} - y_{i,j} \\ -x_{i+1,j} + x_{i,j} \end{bmatrix}$$

同理得到

$$nds23 := \begin{bmatrix} y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j} \\ -x_{i+1,j+1} + x_{i+1,j} \end{bmatrix}，以及\ nds34 := \begin{bmatrix} y_{i,j+1} - y_{i+1,j+1} \\ -x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1} \end{bmatrix}，nds41 := \begin{bmatrix} y_{i,j} - y_{i,j+1} \\ -x_{i,j} + x_{i,j+1} \end{bmatrix}$$

然后用矢量点积的办法计算各条边上的通量了，为此输入

>FF[i,j-1/2]:=evalm(F[i,j-1/2]&*nds12);于是屏幕上得到如下的输出

$$FF_{i,j-1/2} := \begin{bmatrix} \left[\frac{1}{2}(\rho_{i,j}u_{i,j} + \rho_{i,j-1}u_{i,j-1})\%2 + \frac{1}{2}(\rho_{i,j}v_{i,j} + \rho_{i,j-1}v_{i,j-1})\%1\right] \\ \left[\frac{1}{2}(\rho_{i,j}u_{i,j}{}^2 + p_{i,j} + \rho_{i,j-1}u_{i,j-1}{}^2 + p_{i,j-1})\%2 + \frac{1}{2}(\rho_{i,j}u_{i,j}v_{i,j} + \rho_{i,j-1}u_{i,j-1}v_{i,j-1})\%1\right] \\ \left[\frac{1}{2}(\rho_{i,j}u_{i,j}v_{i,j} + \rho_{i,j-1}u_{i,j-1}v_{i,j-1})\%2 + \frac{1}{2}(\rho_{i,j}v_{i,j}{}^2 + p_{i,j} + \rho_{i,j-1}v_{i,j-1}{}^2 + p_{i,j-1})\%1\right] \\ \left[\frac{1}{2}(\rho_{i,j}hn_{i,j}u_{i,j} + \rho_{i,j-1}hn_{i,j-1}u_{i,j-1})\%2 + \frac{1}{2}(\rho_{i,j}hn_{i,j}v_{i,j} + \rho_{i,j-1}hn_{i,j-1}v_{i,j-1})\%1\right] \end{bmatrix}$$

其中 %1 ，%2 两项表示：$\%1 := -x_{i+1,j} + x_{i,j}$，$\%2 := y_{i+1,j} - y_{i,j}$

其它三条边的通量用同样的方法可以求出，人工耗散项也用类似的办法求出。这里不再介绍。

1.3 Fortran 源程序的生成

如前所述所需的 Fortran 源程序是运用 Maple V 中非常有用的函数 Fortran 直接生成的，同样的道理，运用 C 函数，我们也可以得到 C 语言的源程序。这样从差分格式的推导一直到计算机源程序的生成，都由计算机自己来完成，也就大大节约了人力，同时也减少了出错的概率。比如，在完成网格差分格式的推导之后，我们得到了 $x_{i,j}$ 和 $y_{i,j}$ 的表达式（见前文 eqx2），使用 Fortran 函数，就可以得到相应的 Fortran 源程序。输入> fortran(eqx2); 就可以得到下面的 fortran 源程表达式

```
t0=(alpha*x(i+1,j)+alpha*x(i-1,j)-2*beta*x(i+1,j+1)+#2*beta*x(i-1,j+1)+2*beta*x(i+1,j-1)-
2*beta*x(i-1,j-#1)+gamma1*x(i,j+1)+gamma1*x(i,j-1))/(alpha+gamma1)/2
```

同理，我们可以求得其他相关项的 Fortran 表达式。

上面所做的只是机器推理的最简单的应用。因为欧拉方程内容不甚复杂，所以尚未能完全体现出机器推理巨大的优越性。原则上使用机器推导数值求解 NS 方程的有限体积法的源程序可以采用同样的方法。利用 Maple V 软件的强大功能，我们甚至还可以进行很多工作如：气动公式的推导，流体力学相似性方程的直接求解，湍流模型的表达以及整理，差分格式稳定性的分析程序编制前的预演算，绘图，由复杂表达式直接生成 fortran,或 c 语言程序，并对源程序进行优化处理等等。原则上来讲 NS 方程源程序的推导也可以用同样的方法来作。这些功能，在此就不一一详述了。当然至今为止，计算机推出来的是循环体内的所有源程，对于循环下标的计算机推导还没有能够概括进去。这是下一步要考虑的。

2 结果与分析

利用生成的程序对绕 NACA0012 翼型的流动，采用120×40 O-网格，不同马赫数不同迎

角下的欧拉方程进行计算。下面图 1，图 2 是利用生成的 Thanmson 方法的源程序计算出来的 O-网格后面几个图是和实验结果以及和西德宇航院计算结果的比较，可以看出，所有结果均与参考算例进行比较（见附图），结果是一致的，这证明本文的计算程序是正确可靠的，也就证明了由推理系统推导出来的差分格式的 Fortran 源程序是正确可信的。

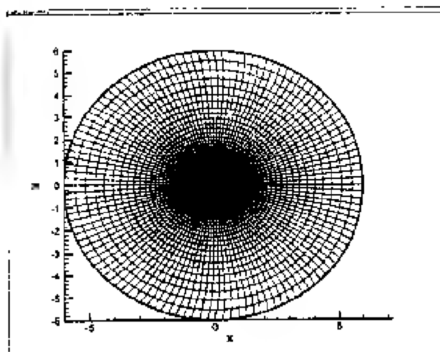


图 1　120×40 NACA0012 的 O-网格

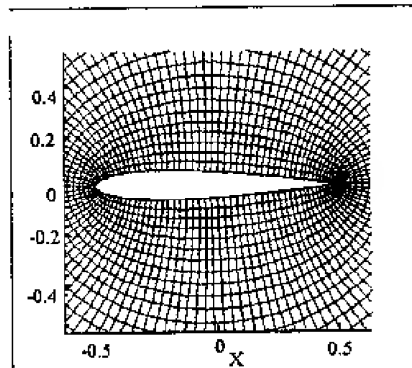


图 2　近物面网格

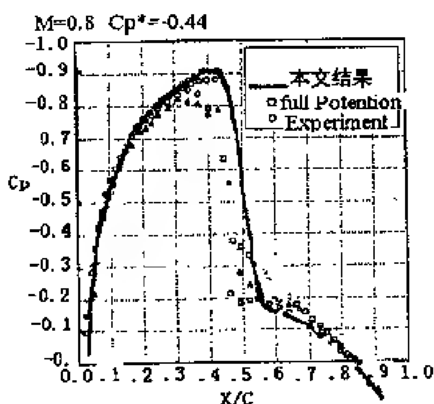


图 3　本文计算结果和实验结果比较
$M=0.80, \alpha=0°$

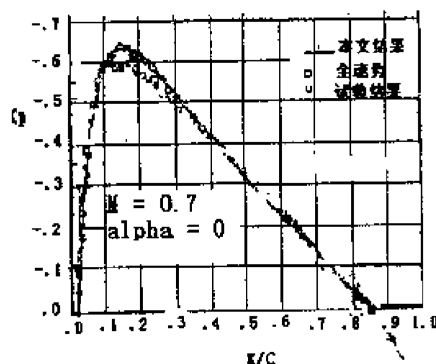


图 4　本文计算结果和实验及全速势方程计算结果比较　$M=0.70, \alpha=0°$

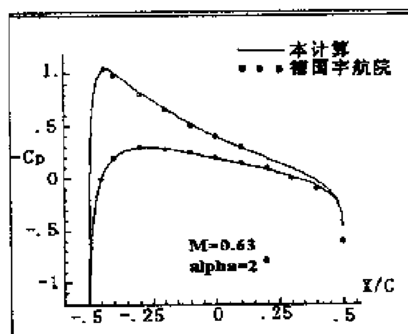


图 5　和德国宇航院得到的计算结果比较（图中圆点为德国宇航院计算结果）$M=0.63, \alpha=2°$

参　考　文　献

1　苏德铭，黄素逸. 计算流体力学基础. 北京：清华大学出版社，1997
2　Kroll N，Jain RK. Solution of Two-Dimensional Euler Equations—Experience with a Finite Volume Code. DFVLR-FB87-41，1987
3　John JD Anderson，Grundmann R，Wendt F，Degrez G，Dick E. Computational Fluid Dynamics—An Introduction. Springer-Verlag，1992
4　Arnold M Kuethe，Chow Chuen-Yen. Foundations of Aerodynamics. John Wiley & Sons，Inc，1986

模型昆虫翼挥拍运动中的气动力和流动结构

唐　剑　孙　茂
（北京航空航天大学流体力学所，100083 北京）

摘要　针对小尺寸昆虫的悬停飞行，用 N-S 方程模拟的方法研究了模型翼做挥拍运动时的气动力特性和流动结构。典型情况下(俯仰轴在模型翼 25% 弦长处，模型翼俯仰运动与挥拍运动同步)，平均升力系数 C_L 达到 0.77，比定常前飞时 C_L=0.6 增加了 28%，可以平衡昆虫的重量，使昆虫保持悬停飞行。模型翼俯仰运动相对于挥拍运动的相位关系，会改变升力和阻力的峰值和平均值。当俯仰运动超前挥拍运动 7.5%周期时，平均升力系数比定常运动的升力系数提高了 63%，超过昆虫的重量，这样可以提供额外的升力用于机动和控制。产生大升力的原因有二，一是拍动中翼的周向运动，其消除了失速而产生大升力；二是拍动结束阶段翼的快速上仰运动，其结果在短时间内产生大涡量而产生大升力。

关键词　昆虫，悬停，气动力，涡结构

引　言

长期以来，科学家们对鸟、蝙蝠、昆虫等的扑翼飞行一直很有兴趣。最近，由于微型飞行器的兴起，这个课题引起了更多的注意。对于特征长度为 1cm 和更小的飞行器来说，常规的固定翼和旋翼都不能有效工作，而模仿小昆虫的扑翼模式却可能有效。

这方面已经开展了一些工作，如文献[1，2]等。虽然其表明了昆虫的扑翼运动可在小雷诺数下产生高升力，但对其中的流动机理未有清楚的解释。最近，兰世隆和孙茂[3] 通过数值求解 Navier-Stokes 方程研究了模型翼作一些简单运动的情形，包括翼启动后作常速转动，快速加减速，以及快速上仰运动。本文进一步研究更为复杂的挥拍运动。其运动模式如图 1 所示，是由文献[3]中的简单运动组成，可近似昆虫的悬停飞行，进一步理解小雷诺数(Re=100)下扑翼运动产生大升力的机理。模型翼与文献[3]一样，采用了展弦比为 2.4 的矩形翼，其翼剖面相对厚度为 12%。

1　数值方法

所用的三维非定常不可压 Navier-Stokes 方程的数值解法源于 Rogers[4]发展的基于拟压缩性的算法。方程组建立在惯性系 $oxyz$ 中(图 1)。模型翼的非定常运动是由随时间变化的坐标变换计及的。另有一固连于模型翼的坐标系 $o'x'y'z'$，用于生成网格。$o'x'y'$ 截面为 O 型网格，$o'y'z'$ 截面为 H 型网格。

2　结果与讨论

在典型的悬停飞行中，翅膀的上挥和下拍是对称的，因此，我们在此只讨论其中一个过程。遵照生物力学中的惯例，绕 y 轴的转动称为“拍动”，而在上挥或下拍两端的俯仰运动称为“转动”。在展向位置为 r_0 处的转动速度称为挥拍速度。r_0 由公式 $r_0=(\int_A r^2 \mathrm{d}A/A)^{1/2}$ 定义，其中 r 为径向距离，A 为翼面积。简化的上挥或下拍运动在一次拍动过程中分为三部分，如

图 1(b)所示。在拍动开始段的加速拍动和下俯转动过程；以固定角速度和迎角的拍动过程；在拍动结束段的减速拍动和上仰转动过程。拍动速度用 u 表示，在拍动的中段以常数 U 运动，在拍动的末端由下式给出（转轴距前缘 0.25 弦长）

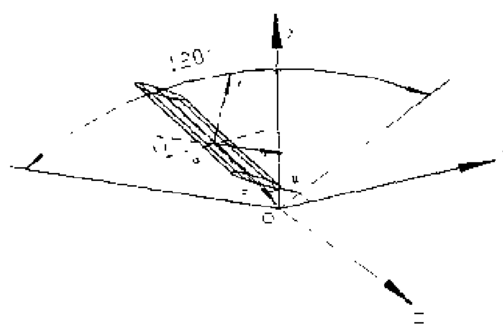
$$u^+ = 0.5[1+\cos\pi(\tau-\tau_1)/(\tau_2-\tau_1)] \qquad \tau_1 \le \tau \le \tau_2 \tag{1}$$

两次拍动之间，转动的角速度按下式变化（转轴距前缘 0.25 弦长）

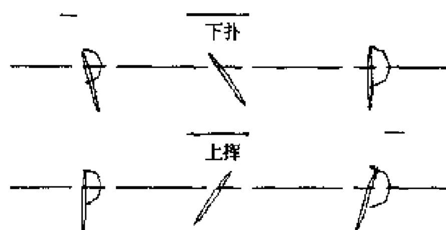
$$\dot{\alpha}^+ = 0.5\dot{\alpha}_0^+\{1-\cos[2\pi(\tau-\tau_r)/\Delta\tau_r]\} \qquad \tau_r \le \tau \le \tau_r + \Delta\tau_r \tag{2}$$

其中，$\dot{\alpha}^+ = \dot{\alpha}c/U$，$\dot{\alpha}_0^+$ 是常量，τ_1 是靠近拍动结束段开始转动的时刻，$\Delta\tau_r$ 是旋转的时间长度。对于小昆虫来说，典型的拍动角为120°，因此拍动一下的周期是 4。计算从模型翼静止启动开始，直到气动力和流场结构达到周期性时终止。

首先考虑最大俯仰角速度在拍动速度为零处的典型情况(即转动的一半在上一次拍动的结束段而另一半在当前拍动的启始段，参考图 2 中的实线)。在一次拍动的过程中气动力系数与时间的关系如图 2 所示。C_L，和 C_D 表示升力、阻力。为解释气动力和力矩产生的原因，我们画出在模型翼中间截面的流线(在随体坐标系中)和 ω_z 的等涡量线(实线表示正涡，虚线表示负涡)。



(a) 模型翼和坐标系示意图



(b) 模型翼运动模式

图 1 坐标系示意图及运动模式

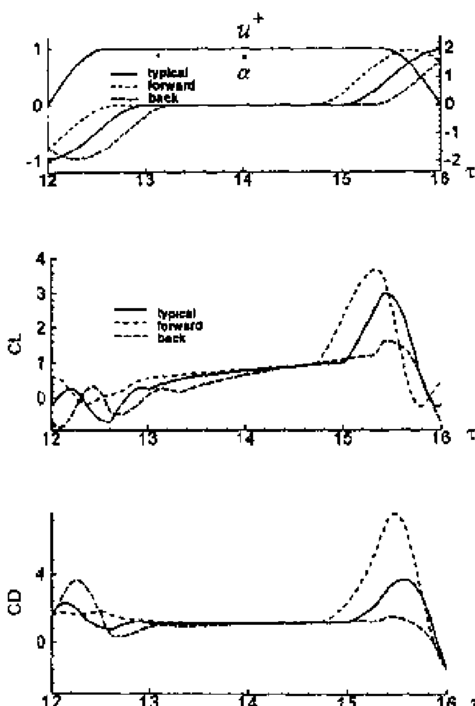


图 2 典型、超前、滞后模式的气动力曲线

如图 2 所示，在拍动的开始阶段，$\tau = 12 \sim 13$，翼向左加速 (加速在$\tau = 12.4$终止)，同时逆时针转动，从$\tau = 12$时的$\alpha = 90^0$到$\tau = 13$时的$\alpha = 35^\circ$。C_L 有一小的正峰值，接着有一

大的负峰值； C_D 很大，出现了很高的峰值。根据文献[3]，在加速拍动时可以产生升力峰值。但是此时模型翼正在绕靠近前缘转动，会抵消部分加速的效果，而且，此时迎角 α 很大，从而 C_L 只出现了一个小的峰值。从 $\tau=12.4$ 到 $\tau=13$，翼匀速拍动，同时继续下俯转动，结果产生了负的升力峰值。在常速拍动阶段，$\tau=13\sim15$，翼以迎角 $\alpha=35^\circ$ 常速“拍动” C_L，有较大的值，除在 $\tau=13$ 附近外，约为 0.8～1，若是二维翼，启动后的运动中 C_L，将会因为失速而大幅度减小。但由文献[3]，翼作周向转动时，不存在失速现象，因而此处 C_L 可有较大值。而为何在此阶段开始时($\tau=13$) C_L 较小？参见 $\tau=13$ 时的涡量图，(图 3 (c))，由于模型翼的转动和加速运动，在上翼面有一个负涡量区，下翼面有一个延伸到后缘下游的正涡量区(类似启动涡)，正涡量区的下面还有一个负涡量区。因为上一次拍动（向右）时附着在上翼面的正涡量都到了下翼面，正涡量区的总涡量肯定很大。这个大的正涡量在模型翼前面诱导了很大的下洗速度，使来流的流线几乎平行于翼弦，所以升力小，随着时间增加，翼的有效迎角增加，如图 3(d)和(e)。在最后阶段，$\tau=15\sim16$，C_L 和 C_D 有很大的的峰值。这是因为从 $\tau=15\sim15.4$，翼在常速拍动的同时快速上仰，由文献[3]知，这将使 C_L 和 C_D 急剧上升。原因是在很短时间内产生大的涡量和大的涡量矩变化率(参见文献[3]和图 3 (f)；而从 $\tau=15.4$ 到 $\tau=16$ 翼开始减速，由文献[3]知这将导致 C_L 和 C_D 的急剧下降（也是因为产生大的涡量和大的涡量矩变化率）。从以上分析可以看到，由于急速上仰使 C_L 和 C_D 迅速上升，而快速减速又使 C_L 和 C_D 很快下降，在拍动的最后阶段形成了一个峰。图 3(g)，(h)和(i)显示下一次拍动的开始阶段流动结构，可以看出除了模型翼运动的方向和涡量的正负改变，其它都和这次拍动相同。拍动的平均升力系数达到 0.77，比定常前飞时 C_L=0.6 增加了 28%，可以平衡昆虫的重量，使昆虫保持悬停飞行。模型翼挥拍之间的转动运动相对于拍动的相位关系，会改变升力和阻力的峰值和平均值。在转动超前拍动 7.5%周期的超前模式（forward）中，由于翼上仰运动的大部分在常速拍动阶段，因而拍动最后阶段产生的峰更大，更宽，平均升力系数 C_L 达到 0.98。而滞后模式（back）正好相反，其平均升力系数 C_L 只有 0.51。

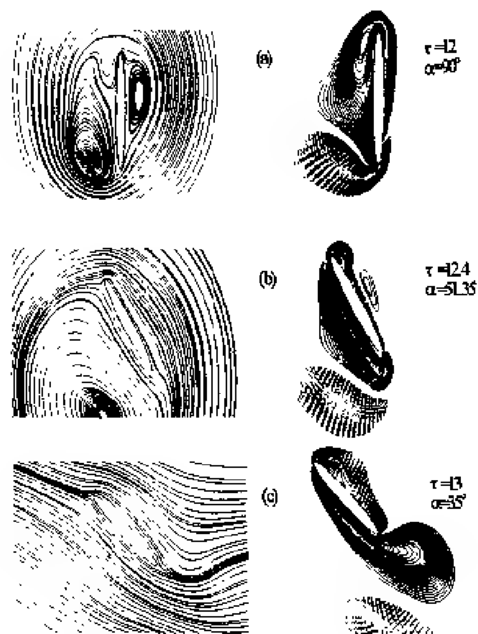


图 3　半翼展处的流线图和涡量图

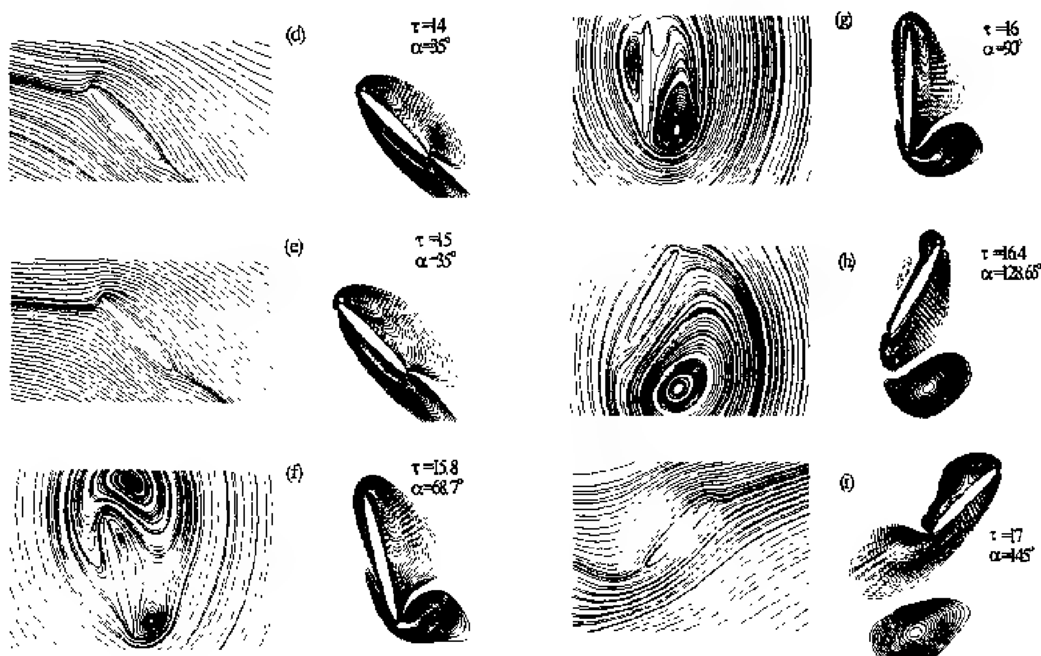


图 3 半翼展处的流线图和涡量图 (续)

3 结 论

在 Re=100 的情形，模型翼做挥拍运动时可产生 0.77 (同步模式)和 0.98 (超前模式)的升力系数，远大于模型翼在定常条件下的的升力系数 0.6。产生大升力的原因有二：一是拍动中翼的周向转动(拍动)，其消除了失速而产生大升力；二是拍动结束阶段翼的快速上仰运动，其在短时间内产生大涡量从而产生大升力。

参 考 文 献

1 Liu H，Ellington CP，Kawachi K，Vanden Berg C and Willmott AP. A computational fluid dynamic study of hawkmoth hovering. *Journal of Experimental Biology*，1998，201：461~477

2 Ellington CP，Van den Berg C and Willomott AP. Leading edge vortices in insect flight. *Nature*，1996，384：626~630

3 Lan SL and Sun M. Aerodynamic of properties of a wing performing unsteady rotational motions at small Reynolds number. *Acta Mechanica* (to appear)

4 Rogers SE，Kwak D and Kiris C. Numerical solution of the incompressible Navier-stokes equations for steady-state and dependant problems. *AIAA Journal*

飞行器超音速绕流流场气动热计算

刘　洪　　范绪箕

（上海交通大学建筑工程与力学学院，工程力学系，上海 200030）

摘要　采用有限体积 TVD 格式，求解守恒型纳维-斯托克斯方程组数值模拟飞行器超音速绕流流场，并且着重研究了近壁网格尺度与准确气动热计算的关系。通过网格雷诺数与差分格式的理论分析以及大量数值实验，建立了能够准确计算气动热的网格尺度关系式。实践表明采用本文的算法，数值计算稳定，计算结果与实验结果符合较好，并且可以合理的分配网格点，提高计算的效率。

关键词　超音速绕流，气动热，网格雷诺数，网格尺度，有限体积 TVD 格式

引　言

在设计高速飞行器时，为了确保飞行的安全，必须要准确给出飞行器表面的压力分布和热流密度分布。人们可以通过大量的实验来获得设计所需要的各种数据，但花费巨大并带有一定的局限性。数值模拟提供了一种重要的工具，节约了研究分析的时间和费用，能够提供实验所无法提供的复杂流动现象的流动细节。因此发展准确地数值模拟气动热的技术，使之达到工程实际应用的程度，是非常重要的。

许多计算方法，通过数值求解无黏欧拉方程组或者是各种形式的纳维-斯托克斯方程组都可以得到满意的压力分布预估，但是，在计算高速流动问题中的表面热交换将会遇到很大的困难。一些格式常常由于数值耗散过大，对热流密度的计算带来了很大的误差。本文在有限体积的方法中引入 TVD 格式[1]，通过求解守恒型纳维-斯托克斯方程组数值模拟飞行器超音速绕流问题，对于流过每个单元表面无黏流通量的计算采用二阶精度的 TVD 格式，考虑信息的传播方向，黏性项的构造上应用上风/下风平均变量的中心差分方法处理。采用贴体坐标生成网格，使边界条件的处理方便准确。计算中发现近壁法向网格尺度直接影响气动热计算的准确程度以及计算效率，以网格雷诺数与差分格式的理论分析以及大量的数值实验为依据，本文研究并提出能够准确计算气动热的网格尺度关系式。效验算例及实际导弹型号计算表明，本文的数值计算方法，能准确地预测高马赫数高雷诺数飞行条件下飞行器表面的气动热。

1　流场控制方程及数值解法

1.1 控制方程及湍流模型

一般曲线坐标系(ξ, η, ζ)下的 Navier-Stokes 方程组

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tau}+\frac{\partial(\tilde{F}_1+\tilde{G}_1)}{\partial \xi}+\frac{\partial(\tilde{F}_2+\tilde{G}_2)}{\partial \eta}+\frac{\partial(\tilde{F}_3+\tilde{G}_3)}{\partial \zeta}=0 \tag{1}$$

其中 $\tilde{U}$，$\tilde{F}_1$，$\tilde{F}_2$，$\tilde{F}_3$，$\tilde{G}_1$，$\tilde{G}_2$，$\tilde{G}_3$ 为曲线坐标系下的流场变量、无黏通量及黏性通量。湍流流动的数值模拟，采用的是 Baldwin-Lomax 代数湍流模型[2]。

1.2 数值解法

数值计算采用的是 Harten 提出的 TVD 格式和有限体积数值离散方法。无黏通量的计算参照 Harten 在文献[1]中提出的二阶 TVD 格式计算得到，构造黏性通量时采用了中心差分格式。为了更加准确地求解高速流动的热边界层问题，充分考虑其信息的传播方向，在黏性项的构造上应用上风/下风平均变量的中心差分方法处理。

求解 N-S 方程组时，对于具体的流动问题，需给出合适的边界条件。对于超音速黏性流动，壁面取无滑移条件，上边界取无扰动来流参数，出流边界流动参数由内场外插得到。文中采用时间推进的显式求解格式对方程组进行求解。

2 热边界层计算的近壁网格尺度研究

为了准确地计算出边界层内气动加热，计算中要求近壁面边界层内要有足够的网格分布，以保证计算结果不受网格尺度的影响。但是过小的网格尺度将导致网格点数的增加而使计算效率的下降。所以，在生成网格时，优化网格点的分布，使得不仅能够准确的计算边界层中的传热现象，而且可以保证较高的计算效率，这是计算流体力学中必须要解决的问题。目前，对于这一问题已有的一些计算研究尚有一些不足：文献[3]中给出的以网格尺度近似等于平均自由程尺度在计算中明显增加很多不必要的网格点数，影响了计算效率；文献[4]中以一近壁的网格雷诺数的阶数近似等于 1~3 或小于 10 的标准来生成计算网格，计算结果与网格的相关关系无法确定，有明显的不确定性存在。另外，也有通过初始计算边界层厚度然后在边界层中安排 10~15 点的计算方法，或是通过大量试算得到合适的近壁网格尺度。显然这些方法耗费大量的时间而且很难保证计算与网格生成的独立性。因此，本文考虑到流动参数的变化提出热边界层计算的网格尺度准则，通过大量数值计算结果表明，以这样的网格尺度准则为判据生成的网格不仅能够准确的计算边界层中的摩擦和传热现象，而且可以保证优化的网格点的分布从而保证较高的计算效率。

2.1 黏性流动计算中网格雷诺数约束条件

数值计算黏性流动问题时真实黏性可能会被差分化所引入的误差所掩盖，这种误差主要来自于方程中无黏项的差分逼近。网格雷诺数是黏性流数值模拟中一个重要参数，它主要反映了差分化后 N-S 方程的黏性项是否起到了应有的作用。

对于线性伯格斯方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

式中 c 和 μ 均为常数。定义雷诺数为：$Re=c/\mu$。

在方程(2)中雷诺数的大小反映了黏性项和无黏项各自起的作用。若采用简单的差分格式逼近于方程(2)(差分式中时间导数取前差，空间导数取中心差)。定义网格雷诺数为，$Re_{\Delta x}=\Delta x Re$，同时定义，$\gamma=\mu\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$，$\nu=c\frac{\Delta t}{\Delta x}$，将离散化后的方程(2)改写为

$$u_j^{n+1}=\frac{\gamma}{2}(2-Re_{\Delta x})u_{j+1}^n+(1-2\gamma)u_j^n+\frac{\gamma}{2}(Re_{\Delta x}+2)u_{j-1}^n \tag{3}$$

对于实际物理问题，如果初始分布函数是单调的，则方程(3)的解将使这种单调性保持下

去。根据前面的讨论，差分方程(3)的解的单调性要求其系数为非负，即

$$\mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \le \frac{1}{2} \tag{4}$$

$$Re_{\Delta x} \le 2 \tag{5}$$

(4)式是差分方程中黏性项计算稳定性所要求的，(5)式是为使黏性项起到应有的作用而要求：在黏性流计算时的网格雷诺数应满足(5)式。以上的分析表明黏性流数值计算时对网格的尺度应有一定的要求。还应注意到，(5)式的限制是指局部网格雷诺数，在无黏流占主导作用的区域由于雷诺数很大，方程中的整个黏性项都可以忽略，因而可以不考虑网格雷诺数。在黏性项起作用的区域中往往都是速度比较小，因而局部雷诺数也比较小，通过适当的网格选取可以使局部网格雷诺数不会过大。

2.2 热边界层计算的网格尺度

上面网格雷诺数的理论分析得到的式(5)是广泛被采用的确定黏性计算尺度的依据，为了适应不同算法，很多学者加以修改，如文献[4]中提出

$$Y1 \cdot Re_{\infty} \approx 1 \sim 5 \tag{6}$$

其中，$Y1$ 为近壁法向第一层网格高度，Re_{∞} 为来流雷诺数。

但是，根据本文作者大量计算研究发现：以式(5)或式(6)确定的尺度对于许多高超音速流动的计算问题会导致过小的网格尺度而影响计算效率，同时会使生成的网格展弦比更大，而影响计算的准确性。由于超音速黏性流动中压缩性和黏性是影响流场计算的两个主要因素，所以，本文研究中根据超音速流动的特点，提出应该在式(5)的基础上考虑其他的参数：可以同时考虑来流雷诺数和马赫数建立如下的网格尺度本构关系式

$$Y1 = C Re_{\infty}^{-1} Ma_{\infty}^{\alpha} \tag{7}$$

其中，$Y1$ 为近壁法向第一层网格尺度，Re_{∞} 为来流雷诺数，Ma_{∞} 为来流马赫数。通过研究多种雷诺数以及马赫数下的流动及计算，可得到式(7)中 C 及 α 的确定关系。根据大量实际最小网格尺度的数据，可拟合确定出式(7)中的 C 及 α

(1) $\alpha = -1.9$；

(2) $C = a1 \times Re_{\infty}^{1} + a2 \times Re_{\infty}^{0} + a3 \times Re_{\infty}^{-1} + a3 \times Re_{\infty}^{-2} + \ldots$，线性拟和时，$a1 = 2\,2.82 \times 10^{-4}$，$a2 = -18.632$。

最后应当指出的是，应用式(7)应当注意两点：

(1) 式(7) 应用的来流条件范围：$3.0 \le Ma_{\infty} \le 11.0$，$1.0 \times 10^{5} \le Re_{\infty} \le 2.5 \times 10^{7}$，对于 Ma_{∞}，Re_{∞} 小于该范围的来流条件的最小网格尺度可选用式(5)或式(6)来计算；

(2) 式(7)的建立与本文选用的 TVD 格式相匹配，其他差分格式情况下应用式(7)时应根据具体格式需要进行适当调整。

3 算例分析

首先是对本文的气动加热计算方法及程序进行了算例校验。在此基础上，以实际的高速飞行器为计算模型，通过与飞行试验数据的对比验证，证明了本文的方法在实际型号设计工

作中适用性。

3.1 飞船前体压力热流分布计算

飞船包括前体和后体两部分，来流条件为：$Ma_{\infty}=7.0$，$Re_{\infty}=4.5\times10^{5}$，$T_{\infty}=67\text{K}$，$T_{w}=300\text{K}$。特征长度是头部半径$R_{1}$，物理域内计算网格见图 1，在流动方向布置了 60 个网格单元，法向方向布置了 30 个按指数分布的网格单元。计算中着重计算研究了不同近壁网格尺度对压力和热流分布的影响。计算的压力和热流分布与 Yamamoto 结果[5]的对比见图 2，图 3，图中所示计算结果的三种计算网格方案为：(1) 根据本文提出的尺度关系式(7)，近壁网格尺度为$\Delta y_{min}=0.055\text{mm}$；(2) 根据关系式(5)近壁网格尺度为$\Delta y_{min}=0.009\text{mm}$；(3) $\Delta y_{min}=0.2\text{mm}$。图中 s 表示表示沿流向的物面弧长，$s=0$对应驻点，$s=s_{max}$对应于出口处的值。计算结果表明：(1) 压力分布对于近壁网格尺度的变化不敏感，同时压力分布的计算不需要过高的网格尺度要求就可以计算准确；(2) 热流分布对于近壁网格尺度的变化十分敏感，如果未满足尺度要求，计算相差较大；(3) 采用方案 1 和方案 2 的网格尺度相差 5 倍，计算结果相差很小，计算效率却相差很大，说明采用本文提出的关系式(7)计算近壁网格尺度优于采用关系式(5)。

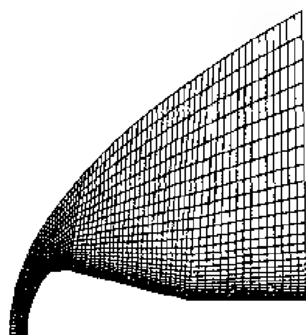


图 . 计算网格

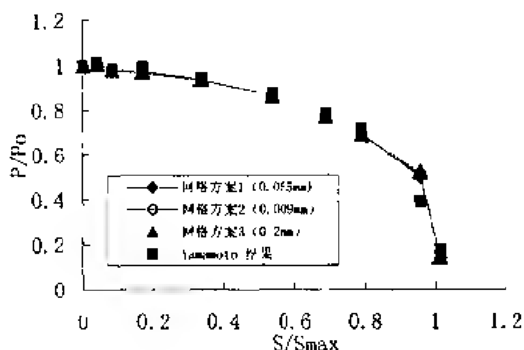


图 2 压力分布($R_1=0.05$)

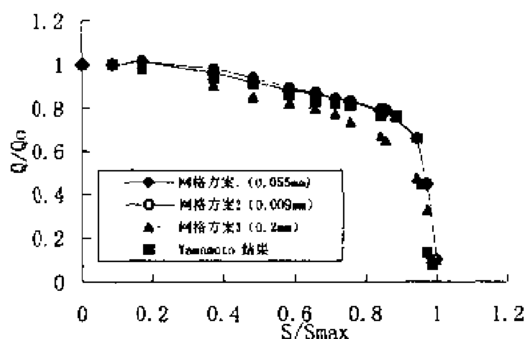


图 3 热流分布($R_1=0.05$)

3.2 实际导弹气动热计算

计算了实际某型导弹一条飞行弹道上温度随飞行时间的分布，导弹飞行时间为 140s，最大马赫数为 3.6 。首先根据其飞行曲线，及当地的大气参数随高度的变化曲线，得到飞行曲线上各点的来流条件，计算出其表面气动加热热流分布，然后以此为边界条件进行弹体表面的温度计算，表面温度计算采用有限元方法计算。下面给出实际计算中的弹体表面几个点处

气动加热热流密度及表面温度随时间变化的曲线。通过与实际飞行试验数据的对比。可以看出弹体蒙皮温度计算结果在弹体外表面 x/L=0.15，0.3 处与飞行试验数据相差不超过 5%。

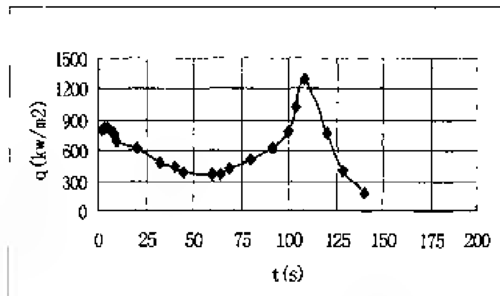


图 4　x/L=0.15 处热流随时间变化图

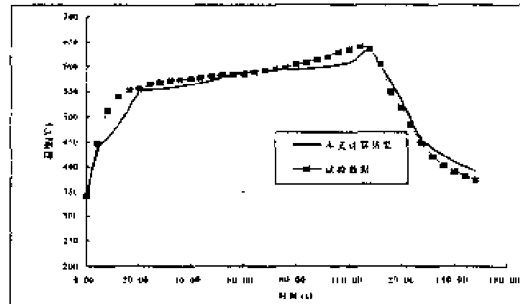


图 5　x/L=0.15 处温度随时间变化图

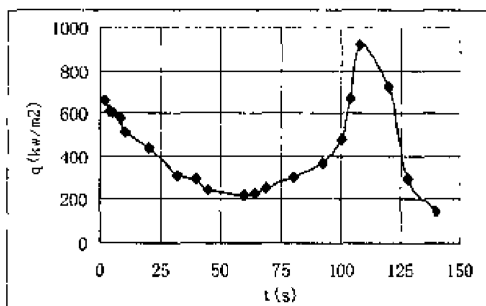


图 6　x/L=0.3 处热流随时间变化图

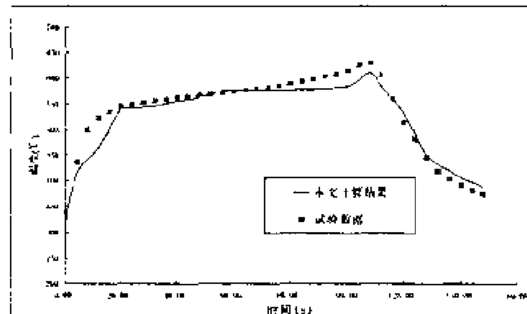


图 7　x/L=0.3 处温度随时间变化图

4 结　论

通过以上飞船计算及实际导弹气动热计算的算例，说明准确的热流计算取决于近壁网格尺度的确定，实践证明本文提出的近壁网格尺度关系式能够准确地求解飞行器超音速绕流流场的气动热，同时证明本文方法在实际型号设计工作中的适用性。

参　考　文　献

1　Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J Comp Physics*，1983，49：357-393

2　Baldwin BS and Lomax H. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. AIAA-78-257，1978

3　Weilmuenster KJ and Gnoffo PA. Solution strategy for three-dimensional configurations at hypersonic speeds. *Journal of Spacecraft and Rocket*，1993，30(4)

4　Hollis BR and Perkins JN. High-enthalpy aerothermodynamics of a mars entry vehicle　Part2：computational results. *Journal of Spacecraft and Rocket*，1997，34(4)

5　Yamamoto Y. Numerical simulation of hypersonic viscous fore-and afterbody flows over capsule-type vehicles at angles of attack. AIAA Paper No. 85-0924，1985

高超声速可压缩流一种自相似解

强希文

(西北核技术研究所，西安　710024)

摘要　当气体为量热完全气体或热完全气体，黏性系数是温度幂指数函数时，给出了一种推导可压缩层流边界层方程的新方法。对于没有外部压力梯度的光滑平板，引进修正的 Levy-Mangle 变换和 Dorodnitsyn-Howarth 变换来求解薄层流边界层内的流动。这些变换描述了根据密度指数给出的相似性参数，其中密度指数考虑了黏性系数随温度幂指数变化的定标关系。从而给出了用封闭耦合的系统中非线性常微分方程组描述的温度场与流函数之间的显式关系式。对于普朗特数、壁温与自由流温度比以及黏性系数与温度幂指数关系中的指数的影响，该方法也为比较根据黏性-温度关系各种假设所得的结果提供了一种较为简单的方法。

关键词　可压缩层流，边界层，自相似解

引　言

当飞行器在空气中作高超声速飞行时，高马赫数和高驻点温度流将会产生如下的特征，即分子的振动和离解、原子和分子的电离。对高超声速流的研究表明存在两种截然不同的情况：低焓条件和高焓条件。低焓条件时的情况可用量热完全气体或热完全气体来建模，而热力学平衡时的混合气体模型则被用来研究高焓时的情况。

对于量热完全气体，比热 C_p 和 C_v 可认为是常数，对热完全气体，可认为其中比热仅是温度的函数。这是在气体分子内的振动能的激发或与分子或原子内的电子运动相关的电子能的激发所造成的。在这两种情况中，均可使用理想气体状态方程。

对更一般的热力学平衡态的完全可压缩气体的情况，比热是两个热力学性质的函数，例如压力和温度。此时应用到真实气体的状态方程，这种情况应被用到高焓流的情况，其中出现离解与电离。

平板的高超声速流可以被划分为如图 1 所示的四个不同的区域[1]，在靠近平板前沿的区域 I，存在一个延迟形成的激波层，而且边界层是该区域存在滑移现象的结果。靠近前沿处，利用滑移条件来描述，且流是不连续的，因而纳维尔-斯托克斯方程在此不适用，此时应利用一阶动力论方法。

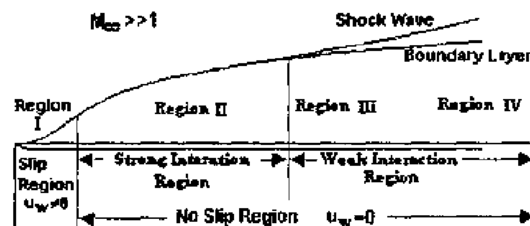


图 1　平板高超声速流场示意图

在不连续区域之后，存在一个强相互作用连续区域 II，在此区域激波层和边界层融合，平板表面存在无滑移条件。在此区域，y 方向的压力梯度可予以忽略，即 $\partial p/\partial y = 0$，但在 x 方向的压力梯度不能够忽略，这是由于黏性层中存在激波的缘故。

Li 和 Nagamatsu[2]发展了一种理论来描述在激波层和边界层之间的高超声速流的强相互作用，并假定平板是尖劈前沿，流体为连续的理想气体。传统理论给出马赫数增加时表面摩擦系数稳定衰减，而 Li 等的理论结果显示，随高超声速流中马赫数的增加，表面摩擦系数实际是增加的。后来，Li 和 Nagamatsu[3]通过不引入坐标变换的直接近似方法，给出了强相互作用区域的自相似解。其结果表明在加热的表面，只要合适的压力梯度存在，边界层内的当地速度可以超过自由流的值。另外也表明，对各种表面温度，热传输系数的变化也能够给出。此外，也表明热传输系数对层流分离现象的效应能够定量化的进行研究。

在远离平板前沿的区域是弱相互作用区域III和IV。在区域III，它接近强相互作用，x 方向与 y 方向的压力梯度在边界层内是非常小的，可以忽略。但是，在边界层外激波和边界层之间的无黏层，y 方向的压力梯度不能忽略。在远离强相互作用的区域IV，普朗特不可压缩边界层理论的经典近似可用于可压缩边界层。在该区域，边界层内及边界层外的 x 方向与 y 方向的压力梯度均可忽略。

Van Driest[4]利用 Crocco 方法推导出一系列常微分方程组来描述可压缩层流边界层。他假定平板上的理想气体服从 Sutherland 定律，所研究的流速直至马赫数为 25。其主要结果是表面摩擦系数和热传输系数是雷诺数、马赫数以及壁温与来流温度之比的函数。

Cohen 和 Reshotko[5]研究了具有热传输和压力梯度的二维稳态可压缩层流边界层的自相似解。他们利用了理想气体假设、单位普朗特数以及线形黏性系数-温度关系。Cohen[5]以及 Bae 和 Emanuel[6]对壁焓与外边界层焓之比在绝热壁情况时的各种值进行了列表。

本工作的基本目的是给出一种在低焓条件时推导可压缩层流边界层自相似解的新方法。其中假定没有离解出现，且黏性是温度的幂函数。

以前对这种边界层的分析大多采用 $\eta \approx \int_0^y (\rho/\rho_r)\mathrm{d}y'$ 作为相似性变量，这在黏性系数与温度之间存在线形关系，即 $\mu/\mu_r = T/T_r$ 时是一种有用的求解方法。但是当考虑更为接近实际的情况时，诸如幂指数定律 $\mu/\mu_r = (T/T_r)^{\alpha}$，这种近似将导致一个更为复杂的且是非显式的方程组。对于幂指数关系的这种情况，本文引入了一种新的修正了的 Levy-Mangle 变换和 Dorodnitsyn-Howarth 变换，它利用 $\eta \approx \int_0^y (\rho/\rho_w)^{\alpha}\mathrm{d}y'$ 作为相似性变量。这样，流体力学方程组可化简为流函数和温度场之间的一个显式的关系式，并用非线性常微分方程组来描述。我们给出了外流马赫数直至 4 时边界层流动的解。其中对普朗特数、壁温与来流温度之比以及幂指数 α 都进行了考虑。

这些解可被用来对远离平板前沿的弱相互作用区域III和IV的高超声速边界层进行数值求解。这些解可提供流动特征的重要数据以及热传输重要数据，以便为将来高超声速飞行器的设计需要提供重要数据。

1 数学模型

假定所考虑的是黏性、具有热传导的牛顿流体定常流动，在高雷诺数的极限情况下的纳维尔-斯托克斯方程可简化为经典的普朗特层流边界层。根据 Driest 的理论[4]，沿光滑平板在 $x>0$ 范围流动，且在 x，y 方向具有零压力梯度的二维流，其定常黏性可压缩的边界层可用如下的方程组来描述

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \upsilon)}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \upsilon \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

$$p = \rho R T \tag{5}$$

注意压力 p 在整个场中保持为常数。

对于量热完全气体或热完全气体的极限情况，在常压下比热仅是温度的函数。此时，焓由下式给出

$$\mathrm{d}i = c_p \mathrm{d}T \tag{6}$$

此时能量方程就变成

$$\rho u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho \upsilon \frac{\partial i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{P_r}\mu \frac{\partial i}{\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{7}$$

其中普朗特数 P_r 由下式给出

$$P_r = \frac{\mu c_p}{k} \tag{8}$$

求解该问题的边界条件为壁面无滑移条件和壁面为常温(y=0)，远离壁面的来流条件($y\to\infty$)

$$\begin{aligned} &u(x,0)=0, \quad \upsilon(x,0)=0, \quad i(x,0)=i_w \\ &u(x,\infty)=u_\infty, \qquad i(x,\infty)=i_\infty \end{aligned} \tag{9}$$

另外，黏度-温度关系的一个较好的近似是假定黏度是温度的幂函数，可用下式表示

$$\frac{\mu}{\mu_r} = \left(\frac{T}{T_r}\right)^\alpha \tag{10}$$

这里 μ_r 和 T_r 分别是参考黏度和参考温度。在较低温度下空气的典型幂指数值 α =0.76；考虑真实气体效应时，在直到 6 000K 的较大范围内，方程(10)在 α =0.69 时和动力论的结果符合得相当好。

2 自相似解

现在来寻找方程(1)~(10)的自相似解。在一定的条件下，利用从物理空间(x, y)到变换空间(ξ, η)的适当的变换，沿平板表面在远离平板前沿处的流场特征具有自相似的形状。

通过对 Levy-Mangle 变换和 Dorodnitsyn-Howarth 变换的变量进行修正与复合，利用幂指数 α 来考虑黏性随温度的变化，则边界层方程具有自相似解。令

$$\xi(x) = \int_0^x \rho_w \mu_w u_\infty \mathrm{d}\xi' \tag{11}$$

$$\eta(x,y) = \frac{\rho_w u_\infty}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^\alpha \mathrm{d}y' \tag{12}$$

上式在 $y=0$ 时 $\eta=0$， $y\to\infty$ 时 $\eta\to\infty$ 。当 $\alpha=1$ 时以上变换又恢复为 Dorodnitsyn-Howarth 变换。

由于在壁面上的密度、黏性系数及来流速度均为常数，故 ξ 仅是 x 的函数，$\xi=\xi(x)=\rho_w\mu_w u_\infty x$ 。令

$$\eta(x,y) = \frac{\rho_w u_\infty}{\sqrt{2\xi}} \bar{y} \tag{13}$$

这里

$$\bar{y}(x,y) = \int_0^y \left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^\alpha \mathrm{d}y' \tag{14}$$

当 $\alpha=1$ 时可得到 Dorodnitsyn-Howarth 变换。边界层方程中所出现的导数分别为

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^{\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \tag{16}$$

这里我们用到

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial y}=\left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^{\alpha} \tag{17}$$

由于在方程(1)，(2)及(7)中所有与导数$\partial\bar{y}/\partial y$相关的项都可去掉，故在我们的分析中可以不需要去计算该项。流函数$\psi(x,y)$可用下式来定义

$$\rho u=\rho_w\frac{\partial \psi}{\partial y},\quad \rho \upsilon=-\rho_w\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{18}$$

利用(15)，(16)以及(18)可以得到

$$\begin{aligned} u&=\left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^{\alpha-1}\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}\\ \upsilon&=-\left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\right)\end{aligned} \tag{19}$$

这样连续性方程(1)自动满足。经过一些代数变换后，x 方向的动量方程(2)和能量方程(7)可重写为如下形式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\partial \bar{y}}-\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2}+\frac{\alpha-1}{\rho}\left[\frac{\partial \rho}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}\right)^2-\frac{\partial \rho}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}\right]=\\ &\qquad\frac{\mu}{\rho_w}\left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^{\alpha}\left\{\frac{\partial^3 \psi}{\partial \bar{y}^3}+\frac{\alpha-1}{\rho}\left[2\frac{\partial \rho}{\partial \bar{y}}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2}+\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{y}^2}+\frac{\alpha-2}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{y}}\right)^2\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{20}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}\frac{\partial i}{\partial x}-\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial i}{\partial \bar{y}}=\frac{\mu}{\rho_w}\left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^{\alpha}\left\{\left[\left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2}+\frac{\alpha-1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \rho}{\partial \bar{y}}\right)\right]^2+\frac{1}{P_r}\frac{\partial^2 i}{\partial \bar{y}^2}\right\} \tag{21}$$

这里我们假定流体为热完全气体，$\mu\rho^{\alpha}$的值为

$$\mu\rho^{\alpha}=\mu_r\left(\frac{p}{RT_r}\right)^{\alpha}=C \tag{22}$$

假定在(22)式中在参考温度的压力、气体常数 R 以及黏度都是已知的，这样$\mu\rho^{\alpha}$的值就是一个给定常数。而且热完全气体的状态方程由下式给出

$$\rho=\frac{p\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{i}\quad 或\quad i=\frac{\gamma p/\rho}{\gamma-1}=\frac{a^2}{\gamma-1} \tag{23}$$

其中a是声速。所以，对给定的压力p有

$$\frac{\rho}{\rho_w}=\frac{i_w}{i} \tag{24}$$

密度在 x 和 $\bar{y}$ 方向的导数变成

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}=-\frac{p\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{i^2}\frac{\partial i}{\partial x} \tag{25}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \bar{y}}=-\frac{p\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{i^2}\frac{\partial i}{\partial \bar{y}} \tag{26}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{y}^2}=-\frac{p\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{i^2}\left[\frac{\partial^2 i}{\partial \bar{y}^2}-\frac{2}{i}\left(\frac{\partial i}{\partial \bar{y}}\right)^2\right] \tag{27}$$

将以上各式代入 x 方向的动量方程以及能量方程可得

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial \bar{y}}-\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2}-\frac{\alpha-1}{i}\left[\frac{\partial i}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}\right)^2-\frac{\partial i}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}\right]=$$

$$\frac{\mu}{\rho_w}\left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^{\alpha}\left\{\frac{\partial^3 \psi}{\partial \bar{y}^3}-\frac{\alpha-1}{i}\left[2\frac{\partial i}{\partial \bar{y}}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2}+\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}\left(\frac{\partial\ i}{\partial \bar{y}^2}-\frac{\alpha}{i}\left(\frac{\partial i}{\partial \bar{y}}\right)^2\right)\right]\right\} \tag{28}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}\frac{\partial i}{\partial x}-\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial i}{\partial \bar{y}}=\frac{\mu}{\rho_w}\left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^{\alpha}\left\{\frac{1}{P_r}\frac{\partial^2 i}{\partial \bar{y}^2}+\left[\left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2}-\frac{\alpha-1}{i}\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}\frac{\partial i}{\partial \bar{y}}\right)\right]^2\right\} \tag{29}$$

假定无量纲焓 i/i_w 仅是 η 的函数，则

$$\frac{i(x,\bar{y})}{i_\infty}=\theta(\eta) \tag{30}$$

流函数 $\psi(x,\eta)$ 可由自相似解给出

$$\psi(x,\eta)=\sqrt{2u_\infty \upsilon_w x}\,f(\eta) \tag{31}$$

从(19)和(31)有

$$u=u_\infty f'(\eta)\left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^{\alpha-1}$$

$$\upsilon=-\left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^{-1}\left[\sqrt{\frac{u_\infty \mu_w}{2x\rho_w}}(f-\eta f')+u_\infty f'\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\right] \tag{32}$$

对于给定压力 p，有

$$\frac{\rho}{\rho_w}=\frac{\theta_w}{\theta} \tag{33}$$

将 $\theta(\eta)$ 及 $\psi(x,\eta)$ 代入动量方程(28)、能量方程(29)式，得

$$f'''+ff''=\frac{\alpha-1}{\theta}\left[f'\theta''+2\theta'f''+ff'\theta'-\alpha\frac{f'(\theta')^2}{\theta}\right] \tag{34}$$

$$\theta''+P_r f\theta'=-\frac{u_\infty^2}{i_\infty}P_r\left[\left(\frac{\theta_w}{\theta}\right)^{\alpha-1}\right]^2\left[f''-(\alpha-1)\frac{f'\theta'}{\theta}\right]^2 \tag{35}$$

另外，从(23)式有

$$\frac{u_\infty^2}{i_\infty}=\frac{(\gamma-1)u_\infty^2}{a_\infty^2}=(\gamma-1)M_\infty^2 \tag{36}$$

其中 $M_\infty=u_\infty/a_\infty$ 是外部流的马赫数，这样能量方程(35)式将变为

$$\theta''+P_r f\theta'=-(\gamma-1)M_\infty^2 P_r\left[\left(\frac{\theta_w}{\theta}\right)^{\alpha-1}\right]^2\left[f''-(\alpha-1)\frac{f'\theta'}{\theta}\right]^2 \tag{37}$$

根据(9)，(32)及(33)式，边界条件可写为

$$\begin{aligned}&f'(0)=0,\quad f(0)=0,\quad \theta(0)=\theta_w\\&f'(\infty)=\theta_w^{-(\alpha-1)},\quad \theta(\infty)=1\end{aligned} \tag{38}$$

这里 $\theta_w=i_w/i_\infty=T_w/T_\infty$ 是壁温与来流温度之比，它对边界层流性质产生强烈的影响，当 $\theta_w<1$ 时壁面是冷壁，当 $\theta_w>1$ 时壁面是热壁。

方程组(34)，(37)以及(38)是一组显式描述流函数与温度场之间关系的非线性常微分方程组。由于可压缩效应，在此将密度看作参变量。x 方向的动量方程和能量方程通过焓来耦合，这和设想的相一致。

对于黏度随温度的变化为线形函数的特殊情况(即 $\alpha=1$)，将得到可压缩层流边界层的 Blasius-Pohlhausen 方程组，即

$$f'''+ff''=0 \tag{34}$$

$$\theta''+P_r f\theta'=-(\gamma-1)M_\infty^2 P_r(f'')^2 \tag{35}$$

此时边界条件为

$$\begin{aligned}&f'(0)=0,\quad f(0)=0,\quad \theta(0)=\theta_w\\&f'(\infty)=1,\quad \theta(\infty)=1\end{aligned} \tag{38}$$

3 结果与讨论

以上通过分析给出了描述高超声速可压缩层流边界层的一组常微分方程组(34)，(37)及(38)，对其进行求解即可得可压缩层流边界层的解。图 2 给出了不同马赫数时沿热壁流向的速度和温度分布。从图中可以看出，速度分布受马赫数的影响不大，但是当 η 一定时，温度随马赫数的增加而增加，且当马赫数大于 3.5 时，由于黏性耗散效应，出现流向壁面的热流。

图 3 是不同马赫数时沿冷壁流向的速度和温度分布。此时，随马赫数的增加，沿流向的速度分布发生变化，此时，流向壁面的热流不仅与黏性耗散有关，更重要的是与壁面对边界层的温度比有关，马赫数越大，黏性耗散效应越明显。

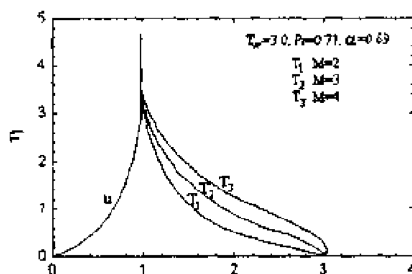


图 2 不同马赫数时沿热壁流向的速度和温度分布

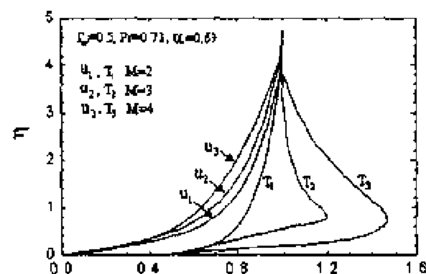


图 3 不同马赫数时沿冷壁流向的速度和温度分布

图 4 给出了马赫数为 3 和 4 时温度比所产生的影响。可以看出，黏性耗散效应对冷壁的

影响要比热壁强烈得多。对热壁条件，黏性耗散只有在马赫数大于 3 时才变得相对重要，而冷壁条件时，马赫数大于 2 时黏性耗散就很明显。

图 5 给出了不同指数时沿壁面流向的速度分布以及温度分布。可以看出，在马赫数较大时，边界层内的温度以及边界层厚度随α的增加稍为增大。

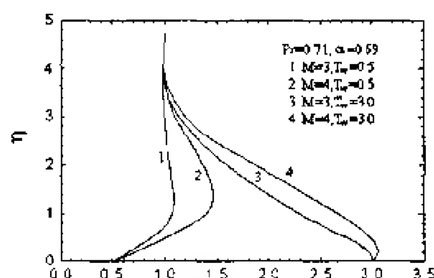


图 4 马赫数为 3 和 4 时温度比所产生的影响

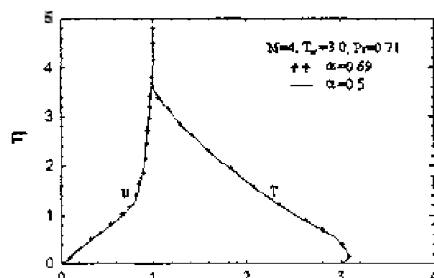


图 5 不同指数时沿壁面流向的速度分布及温度分布

通过给出的计算结果可以看出，该方法考虑了普朗特数、壁温与来流温度比以及黏性系数与温度幂指数关系中的指数的影响，也为比较根据黏性-温度关系各种假设所得的结果提供了一种较为简单的方法。这些解可被用来对远离平板前沿的弱相互作用区域的高超声速边界层进行数值求解。这些解可提供流动特征的重要数据以及热传输重要数据，为高超声速飞行器的设计需要提供参考。

参 考 文 献

1 Anderson DA, et al. Computational fluid mechanics and heat transfer. MacGraw Hill, 1984

2 Li TY, et al. Shock wave effects on the laminar skin friction of an insulated flat plate at hypersonic speeds. *J Aeronautical Sci*, 1953, 20(5): 345~355

3 Li TY, et al. Similar solutions of compressible boundary layer equations. *J Aeronautical Sci*, 1955, 22(9): 607~616

4 Van Driest ER. Investigations of laminar boundary in compressible fluid using the Crocco method. NACA TN-2597, 1952

5 Cohen CB, et al. Similar solutions for the compressible laminar boundary layer with heat transfer and pressure gradient. NACA Report 1293, 1957

6 Bae YY, et al. Boundary layer tables for similar compressible flow. *AIAA J*, 1989, 27(9): 1163~1164

旋转效应对动态失速的影响

高峰 孙茂

(北京航空航天大学流体力学研究所，北京 100083)

摘要 基于 Navier-Stokes 方程的数值解，研究了三维矩形翼在高雷诺数($Re=10^6$)下旋转时，作俯仰运动过程中的流场特性，其迎角在 0°~25° 间按余弦规律变化。有如下结果：在高雷诺数($Re=10^6$)下，迎角较大时，三维机翼转动会在翼梢附近发生动态失速现象，会出现旋涡的后移、脱落。动态失速的范围宽度约为 25%展长，涡脱落区比平动时较窄。动态失速发生的区域被推向翼外部并变得较小的原因是：沿展向的压力梯度和离心力产生了展向流动速度，其稳定了大部分翼展上的旋涡。

关键词 动态失速，旋转影响，三维效应，数值模拟

引 言

机翼、桨叶等升力面作大迎角俯仰运动时，流动将发生分离，会出现动态失速现象。动态失速会对飞行器的气动力及力矩产生重要的影响，所以一直得到人们广泛的关注[1]。当机翼上仰时，流动分离和涡脱落被延迟，产生很高的升力系数。然而一旦机翼上仰到最大角度，迎角减小时，分离涡会迅速地离开上翼面，升力系数迅速减小，阻力系数特别是力矩系数迅速增大。动态失速极大地限制了直升机旋翼、风车、涡轮等的性能。

在许多应用中，机翼或桨叶作旋转运动且迎角较大时，同样会产生动态失速现象。例如：直升机在快速前飞时，其旋翼叶片的迎角会在 5°~25° 作周期变化。旋转运动中的哥氏力、离心力等会产生怎样的影响是令人们感兴趣的问题。以往，人们探讨过旋转效应对边界层分离的影响[2]，表明了旋转效应可推迟边界层分离。但对分离后的旋涡运动有怎样影响，还未见过研究报道。人们以往对动态失速的研究，主要是针对二维翼剖面来进行的。一是因为人们在用旋翼进行有关动态失速的实验时[3]，发现在桨叶外部的某一部分流动发生动态失速，其特性与二维情形类似，主要表现为流动分离和旋涡的脱落，故可用二维翼来研究；二是因为二维翼较简单，可研究得很细致，同时也抓住了主要现象。现在，二维翼剖面动态失速的研究已经十分深入了，对有关失速的机制也有了深入的了解[1,4]。旋转效应如何影响桨叶上的分离涡运动，桨叶的哪一部分会发生动态失速，没有发生动态失速的那些部分有无旋涡，是如何演变的，这些问题对桨叶动态失速的控制是非常有意义的。本文通过对旋转运动和平动的机翼及二维翼剖面的动态失速的对比，探讨旋转效应对动态失速的影响。

为抓住主要因素，考虑了一较理想的情况：矩形机翼以角速度 Ω 绕竖直轴旋转；迎角 α 从 0° 开始，以余弦规律上升到最大迎角 25° 后，再以余弦规律减小到 0°。这样做，既简化了问题，又抓住了主要的流动现象：边界层的分离，分离涡的形成与运动，旋转效应的影响。研究方法为数值计算。

1 数值方法

如图 1 所示，方程组建立在惯性坐标系 $oxyz$ 中，网格固连于矩形翼的坐标系 $o'x'y'z'$，矩形翼的非定常运动是由随时间变化的坐标变换计及的。

本文所用的数值解法，是用 Beam-Warming[5]的 AF 格式对一般曲线坐标系下的 Navier-Stokes 方程进行差分离散，并在离散方程中加入人工黏性项。时间空间导数用二阶精度的中心差分。湍流模型采用 Baldwin-Lomax[6]的两层代数湍流黏性模型，它实质上是 Cebeci-Smith 湍流模型的改进形式。应用 Baldwin-Lomax 湍流模型计算涡黏性系数时，无须象应用 Cebeci-

Smith 湍流模型那样要确定边界层厚度，从而简化了计算过程，提高了效率。远场边界条件为，气流流入部分，速度、温度按来流条件给出，压力用外差来得到。气流流出部分，压力按无穷远处条件给出，其它各变量用外差方法得到。物面满足无滑移条件，绝热条件，物面压力条件可以通过动量方程法向分量得到。

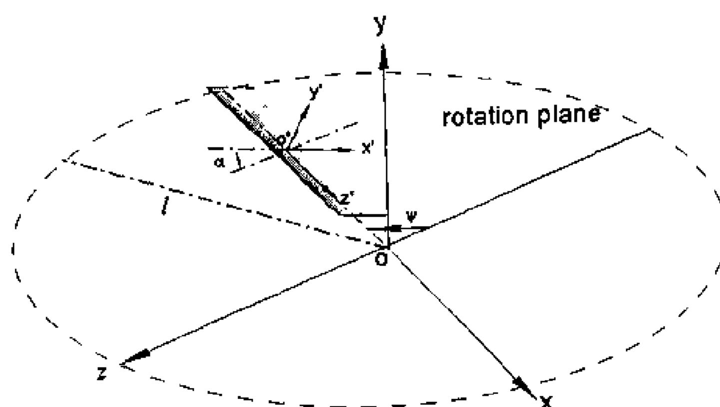


图 1 矩形机翼及坐标系示意图

网格由椭圆方程法生成，采用了 Hilgenstock[7]的方法，该方法可以很好的控制了第一条网格线与物面的距离及网格线与物面的正交性。先生成 $o'x'y'$ 截面的翼型网格，而三维机翼的整体网格是通过平面翼型网格沿展向拼接而成。$o'x'y'$ 截面为 O 型网格，$o'z'y'$ 截面的网格为 H 型网格。

2 结果与讨论

矩形翼绕着 oy 轴转动（图 1），以 0°迎角在初始时刻由静止很快地加速到常角速度 $\dot{\psi}_0$，此后再以 0° 迎角，匀角速度 $\dot{\psi}_0$ 转动一段时间，等到流场达到定常之后，迎角开始变化，其规律为

$$\alpha = \alpha_{min} + \frac{1}{2}(\alpha_{max} - \alpha_{min})(1 - \cos\omega t) \tag{1}$$

其中 α_{min} 和 α_{max} 为迎角的最小值和最大值，在本文中 α_{min}=0°，α_{max}=25°。机翼从 0° 开始按余弦规律增加到最大角度 25°，然后从 25° 再以余弦规律减小到 0°，在此过程中，转动角速度始终保持为 $\dot{\psi}_0$，机翼俯仰的转轴位于距前缘 0.25 弦长处。

所用矩形机翼的外翼端到转轴 O 的总长 l 是 6.0，翼根到转轴为 20%l，矩形机翼的翼展长则为 80%l。网格为 120 (周向)×80 (径向)×111(展向)。

雷诺数的定义为 $Re = cU_\infty / \upsilon$，这里 c 是机翼弦长，U_∞ 是参考速度，υ 是黏性系数。本文所有算例中，雷诺数 Re 为 10^6。

参考速度一般取为 $U_\infty = r_0\dot{\psi}_0$，$r_0$ 定义为：$r_0 = \left(\int_A^{r^2} dA / A\right)^{1/2}$，其中 r 为径向距离，A 为翼面积。对本文所用的矩形翼 $r_0 = 0.643l$，即 $\dot{\psi}_0 = U_\infty / 0.643l$。

振动频率 $k = wc / 2U_\infty$，下面探讨的是 k=0.25 的情况。

图2 是二维机翼平动，俯仰过程中各个迎角的瞬时流场图。迎角变化规律如(1)式定义。从图中不同迎角的流场中，可以清楚的观察到动态失速现象。迎角 23°↑时，旋涡附着在前缘

附近；到 25° 时，旋涡扩大到整个上翼面；而当迎角从 25° 减小到 9°↓ 的变化过程中，附着在上翼面的旋涡迅速的后移、脱落。

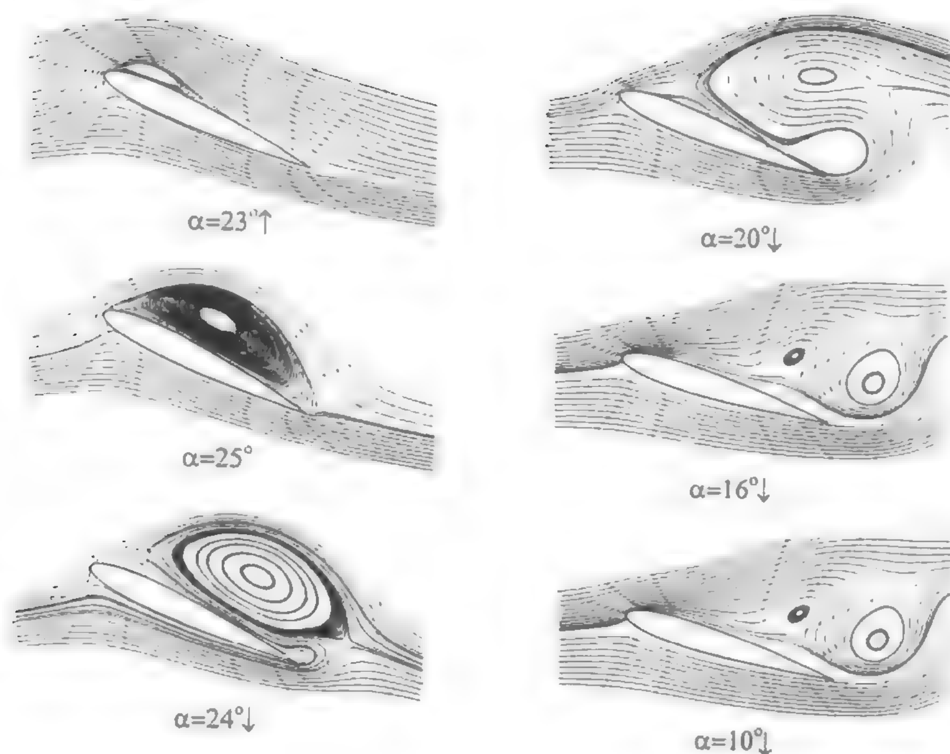


图 2 二维机翼俯仰运动的瞬时流场

图 3 为三维矩形机翼平动，俯仰过程中各个迎角的瞬时空间流场。在图中，可以看到在

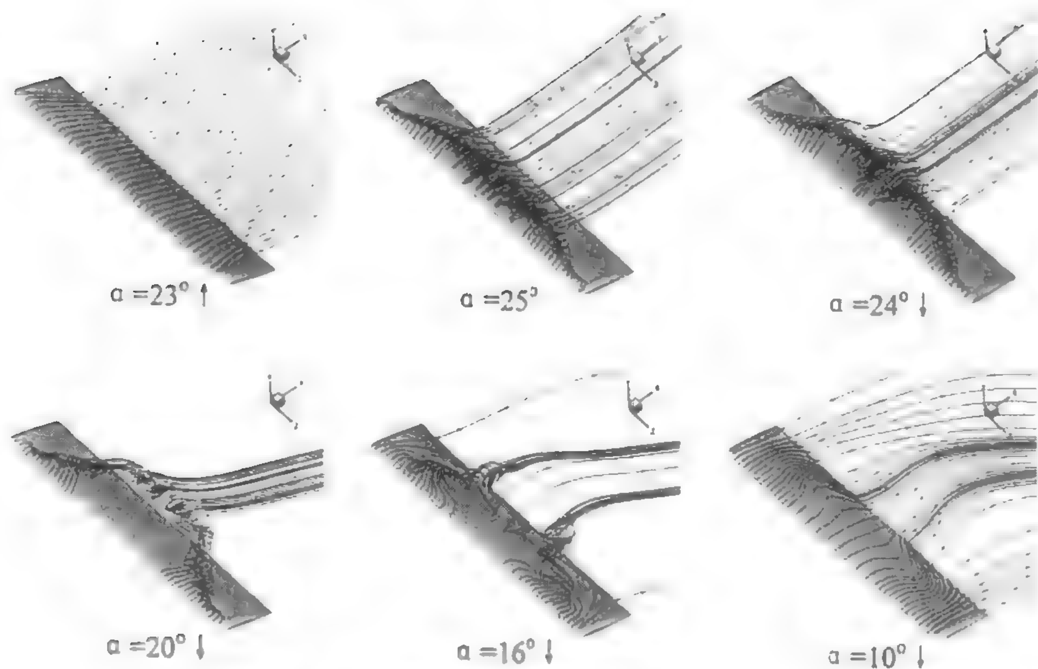


图 3 三维机翼平动的瞬时流场 (k=0.25)

机翼上表面，流线从翼展两侧缠绕在一起卷向翼展中心，形成较大的旋涡附于中间翼展。在翼展中间大约 50%L（L 为展长）的宽度，旋涡的形成、附着与脱落过程与图 2 的二维情况非常相似。在迎角达到 25° 时已形成的旋涡附着在机翼前缘，此后随着迎角的减小，涡心逐渐后移，迎角减小到 20° 时，涡心已离开机翼，当继续减小到 16°，旋涡脱落，此时两侧流线不再是紧密缠绕在一起卷向中间，再从翼展中心流走，而是在距翼展中心还有大约 20%L 处流下去。 在翼展的中间部分，因为存在旋涡的脱落，发生了动态失速现象，不妨把这一部分称为涡脱落区，在本文所讨论的三维机翼平动中，涡脱落区大约占整个展长的 50%。而翼展两侧，旋涡稳定在翼表面某一位置，是涡的稳定区。

三维矩形机翼转动时的流场，是本文研究的重点。图 4 为三维矩形机翼转动，俯仰过程中各个迎角的瞬时空间流场图。在各个不同迎角的流场中，从翼展内侧发出的流线紧密的缠绕在一起沿展向流到翼展外侧，在翼梢附近形成大的旋涡，再向后流下去。在翼梢附近，易见旋涡的后移、脱落过程，迎角在 23°↑时，旋涡附着在前缘，此时类似于三维平动中，迎角等于 25° 时涡脱落区的流场；到 25° 旋涡移动到机翼后缘，类似于三维平动中，迎角等于 24°↓时涡脱落区的流场；当迎角减小到 24° 时，已有部分旋涡离开机翼，类似于三维平动中，迎角等于25° 时涡脱落区的流场；继续减小到 20°，旋涡脱落，这与三维平动中，迎角等于 16°↓时涡脱落区的流场非常相似。所以三维转动的涡脱落区位于翼梢附近，大约占 25%L 的宽度，相比与平动，在翼展内侧具有较宽的涡稳定区。

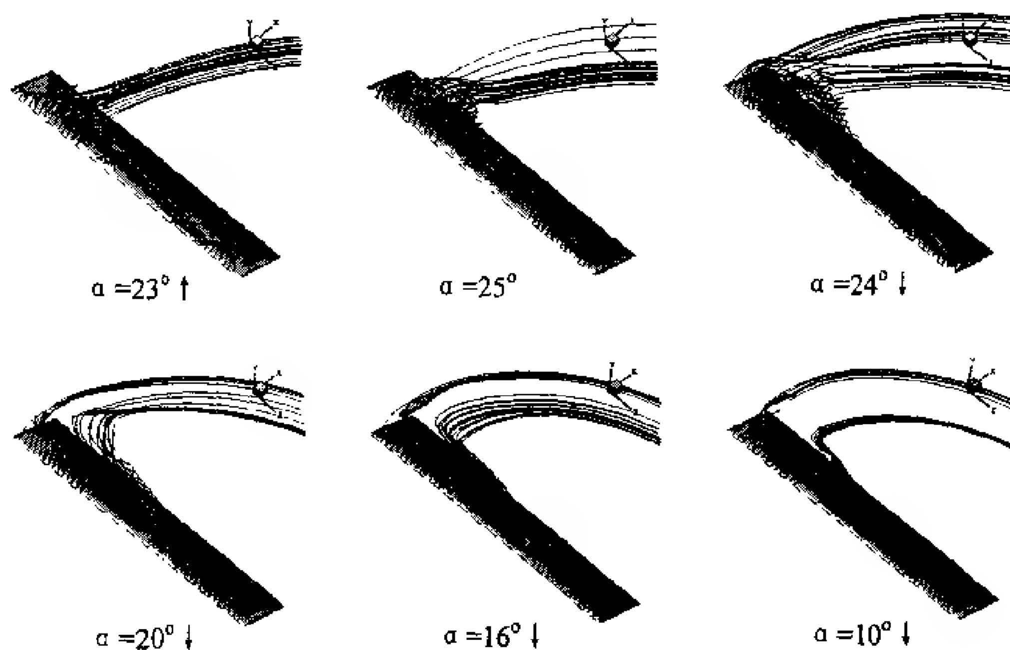


图 4 三维机翼转动的瞬时流场 (k=0.25)

图 5 给出了机翼旋转，迎角等于 25° 时旋涡的受力曲线。横坐标为展向位置，纵坐标为受力，包括压力梯度产生的力(虚线)，离心力（点划线），哥氏力（长虚线）以及三者合力（实

线）。合外力大于零表示力推动旋涡向翼梢运动，小于零则推动旋涡向翼根移动。图中，除了翼梢附近，在整个翼展范围内，合外力都大于零，这就是推动旋涡向翼梢运动的合外力。在展向合外力的作用下，把平动时位于翼展中心的涡脱落区推到翼梢附近，在翼梢处受到阻力的挤压，导致转动机翼的涡脱落区变窄。

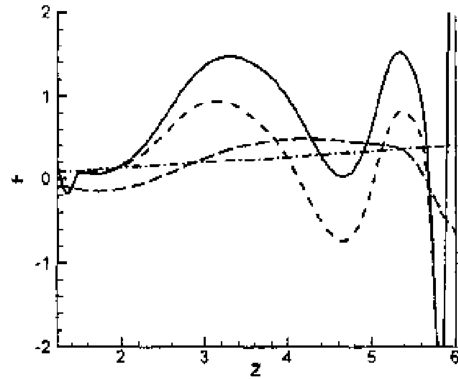


图 5

3 结 论

在高雷诺数（$Re=10^6$）下，迎角较大时，三维机翼转动和平动都会在翼展某个范围内发生动态失速现象，会出现旋涡的后移、脱落。平动时，涡脱落区位于翼展中部大约 50% 展长的范围内，涡脱落区较宽，所以动态失速对机翼的气动力影响会较大。而转动时，涡脱落区位于翼梢附近，其范围的宽度约为 25% 展长，涡脱落区较窄；动态失速发生的区域被推向翼外部并变得较小的原因是：沿展向的压力梯度和离心力产生了展向流动速度，其稳定了大部分翼展上的旋涡。

参 考 文 献

1 Lawrence W Carr. Progress in analysis and prediction of dynamic stall. *J Aircraft*，1988，25(1)：6~17

2 Narramore JC. Navier-Stokes calculations of inboard stall delay due to rotation. *J Aircraft*，1992，29(1)：73~78

3 McCroskey WJ，Fisher，RK Jr Detailed aerodynamic measurements on a model rotor in the blade stall regime. *J American Helicopter Society*，1972，17：20~30

4 Tuncer IH，Wu JC，wang CM. Theoretical and numerical studies of oscillating airfoils. *AIAA J*，1990，28：1615~1624

5 Beam R，Warming R. An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations. *AIAA J*，1978，16：393~402

6 Baldwin B，Lomax H. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. AIAA paper，1978. 78~257

7 Hilgenstock A. A fast method for the elliptic generation for three dimensional grids with full boundary control. Num Grid generation in CFM'88，Pineridge Press Ld，137~146

蜻蜓前后翼拍打时的气动力和流动结构

兰世隆　孙　茂

（北京航空航天大学流体力学研究所，北京 100083）

摘要　用在运动重叠网格上求解 N-S 方程的方法，研究了两翼型作拍打运动时的气动力和流动干扰。考虑蜻蜓拍打运动的三种典型情况：前、后两翼拍打时间相位，180° 相位差和 90° 相位差。

关键词　蜻蜓飞行，两个翼型，相差，N-S 方程数值模拟

引　言

蜻蜓的飞行本领明显高于其它体形较大的昆虫。用准定常理论进行计算且不考虑翅膀间的相互影响，发现产生的升力远小于蜻蜓飞行所需的，因此，蜻蜓翼的非定常运动及前后翼的干扰一定在产生维持蜻蜓飞行的气动力中起重要作用[1, 2]，只有研究前后翼的非定常运动问题及两翼的相互干扰问题，才能弄清楚蜻蜓飞行中的空气动力学原理。本文就前后置的两个翼型做同相、反相及 90° 相差拍打运动（即两翼运动的相差分别为 0，180° 和 90° ）（图 1）。反相位拍打为蜻蜓通常用的模式，同相位常用在需要大升力时，90° 相位差用于同时向前向上飞行时。

1　方　法

采用在有相互运动的重叠网格（图 2）上数值求解不可压缩流 Navier-Stokes 方程的方法来研究此问题。计算格式为 Rogers[3]发展的基于拟压缩性思想的格式。用了三个网格：每一个翼型有一贴体网格，从翼面至 $0.9c$ 处（55×153）；有一直角坐标背景网格延伸到 $20c$ 处（284×141），c 为弦长。背景网格不运动，两翼型网格在其中运动。计算前进行了网格实验。

2　结果与讨论

翼型为相对厚度为 12%的椭圆。不运动时前、后翼相距 0.25c。拍打运动简化为：翼型沿拍打平面向下或向上平动（平动速度为 u ），转向时以 $\dot{\alpha}$ 转动；除在每次下拍（或上挥）的开始或结束时外，平动速度为常数 U 。$u/U = u^+$ ，$\dot{\alpha}c/U = \dot{\alpha}^+$ ，在图 3 中给出。为了比较，也计算了单翼作相同运动的情况。用 C_Y 表示举力(垂直方向力)系数，C_H 表示推力系数。

单翼（下称 SA）　单翼在一周期内的 C_Y 和 C_H 示于图 3 中。可见，C_Y 主要由下拍时产生，C_H 主要由上挥时产生。下拍中产生举力的能力可用 C_Y 在下拍中的平均值（记为 $C_{y,d}$ ）来表示；上挥中产生推力的能力可用 C_H 在其中的平均值（记为 $\overline{C}_{H,u}$ ）来表示。见表 1。SA 的 $C_{y,d}$ 为 2.74，是蜻蜓翼定常条件下最大升力系数的 3 倍。可见非定常作用很大，这些作用主要是：每次下拍（或上挥）开始时的加速运动，动态失速的推迟和下拍（或上挥）结束时的“上仰”运动。（$\overline{C}_{H,u}$ 为 1.97，也较大，原因同上）。限于篇幅，详细分析略，下同。

双翼同相拍打　此时，两翼同时向下拍动或向上挥动，图 1(a)。一周期中的 C_Y 和 C_H 示于图 4 中。可见，前、后翼（分别称为 FA 和 AA）上的 C_Y 和 C_H 随时间的变化。大体上与 SA

的相同，但有一定的差别，由干扰引起。主要的干扰作用是 FA 和 AA 下拍时，有如一个两段翼型，从而 FA 的举力大大增加，其$C_{y,d}$达 3.49，见表 1。

双翼反相拍打 运动见图 1(b)，前半周期，AA 下拍，FA 上挥；后半周期反之。一周期中的C_Y和C_H见图 4。由于前半周期中两翼的涡系产生的干扰（见图 6），AA 的$C_{y,d}$，FA 的$\overline{C}_{H,u}$都小于 SA 的，见表 1。

双翼 90° 相差拍打 运动见图 1(c)。一周期中C_Y和C_H见图 5。前半周期干扰类似于反向拍打情形，但更严重；在后半周期，干扰有利于 AA 的推力，其$\overline{C}_{H,u}$达 2（见表 1）。

将翼型的C_Y和C_H在一周期内平均，然后（对于双翼）又在前后翼之间平均，得总举力、推力总数，分别记为$\overline{C}_Y$和C_H。由$\overline{C}_Y$和$\overline{C}_H$可算出合力系数及合力方向。合力系数记为C_R，方向（前倾角度）记为β。各种情况下的$\overline{C}_Y$，C_H，C_R和β见表2。

表 1　$\overline{C}_{y,d}$ 和 $\overline{C}_{H,u}$

相差	$\overline{C}_{y,d}$	$\overline{C}_{H,u}$
0°	2.74 (SA) 3.49 (FA) 2.57 (AA)	1.97 (SA) 1.21 (FA) 1.56 (AA)
180°	2.61 (FA) 1.85 (AA)	1.34 (FA) 1.67 (AA)
90°	2.03 (FA) 1.50 (AA)	0.72 (FA) 2.00 (AA)

表 2　水平及垂直方向的合力与总合力

相差	$\overline{C}_y$	$\overline{C}_H$	C_R	β
(SA)	1.22	0.76	1.44	32°
0°	1.34	0.46	1.42	18°
180°	0.95	0.62	1.12	33°
90°	0.78	0.68	1.03	41°

3 结　论

(1) 无干扰时（单翼），下拍中平均举力系数为 2.75，约为定常条件下最大升力系数的三倍，上挥时推力系数为 1.97，也较大。产生高气动力的主要原因为：拍打始端的平动加速，失速的推迟及拍打末端的快速“上仰”。

(2) 双翼情形，前、后翼上气动力随时间的变化大体上与单翼相似（下拍产生举力，上挥产生推力），但由于干扰的作用，存在很大的差别。

(3) 同相拍打，干扰产生的主要差别是，前翼下拍时举力增大，上挥时推力减小，这使得（相对单翼）合力系数大小几乎不变，但前倾角减小。

(4) 反相拍打，干扰产生的主要作用是后翼下拍时举力减小，前翼上挥时推力减小，使得合力系减小 20%，前倾角几乎不变。

(5) 90° 相差拍打，干扰产生的主要作用是，后翼下拍时举力和前翼上挥时推力大大减小，而后翼上挥时推力增大，使得合力系数减小 28%，前倾角增大。

参 考 文 献

1 Alexander DE. Unusual phase relationships between the forewings and hindwings in flying Dragonflies. *J of Exp Biol*，1984，109：379~383

2 Wakenling JM and Ellington CP. Drangonfly flight，II. Velocities，accelerations and kinematics of flapping flight. *J of Exp Biol*，1997，200：557~582

3 Rogers SE，Kwak D and Kiris C. Numerical solution of the incompressible Navier-Stokes equations for steady-state and time-dependent problems. *AIAA Journal*，1991，29：603~610

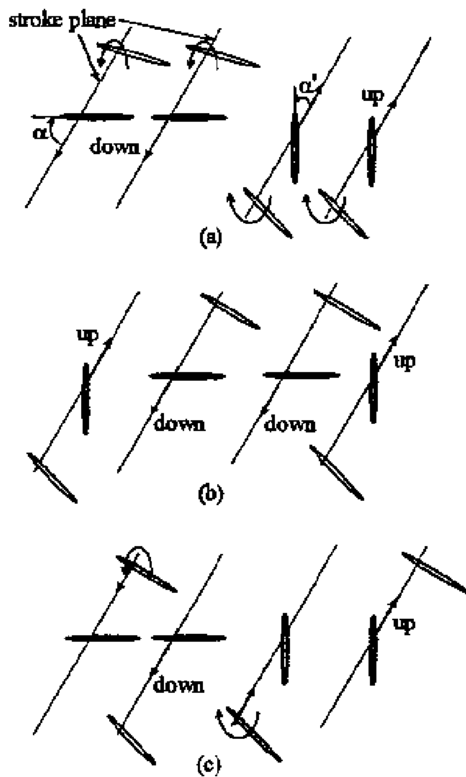


图 1 拍打运动示意图 (a) 同相，(b) 180°相差，(c) 90°相差

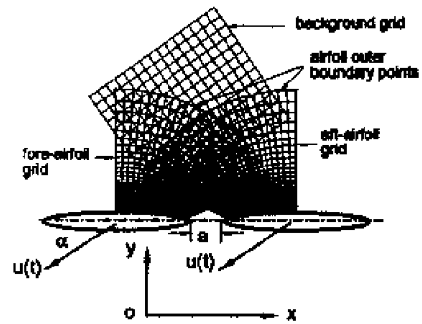


图 2 前后翼及重叠网格

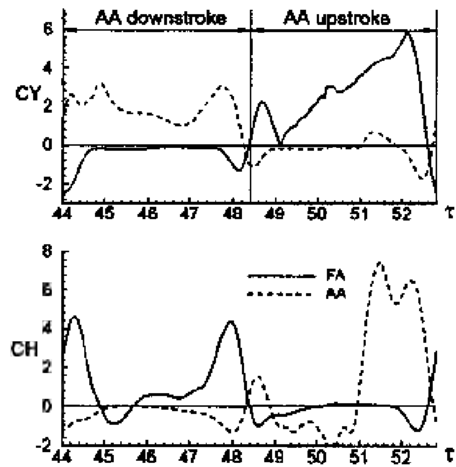


图 4 两翼反相时力与力矩系数

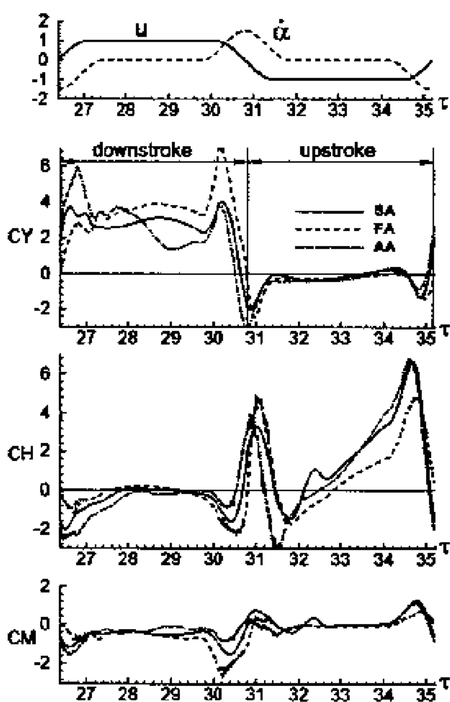


图 3 单翼及两翼同相时的力与力矩系数

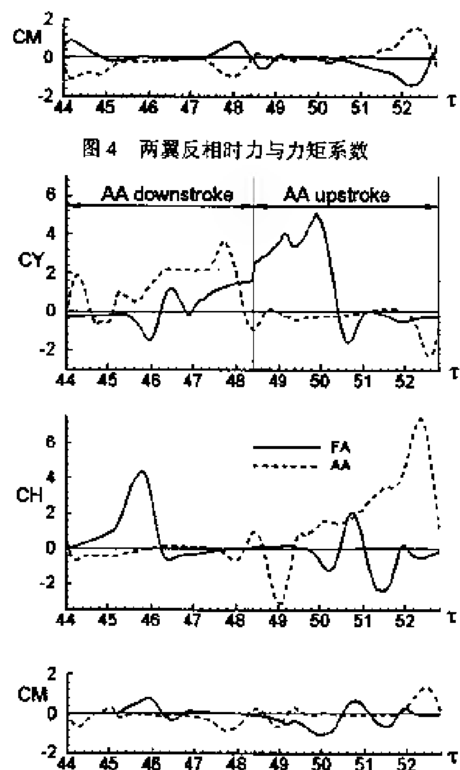
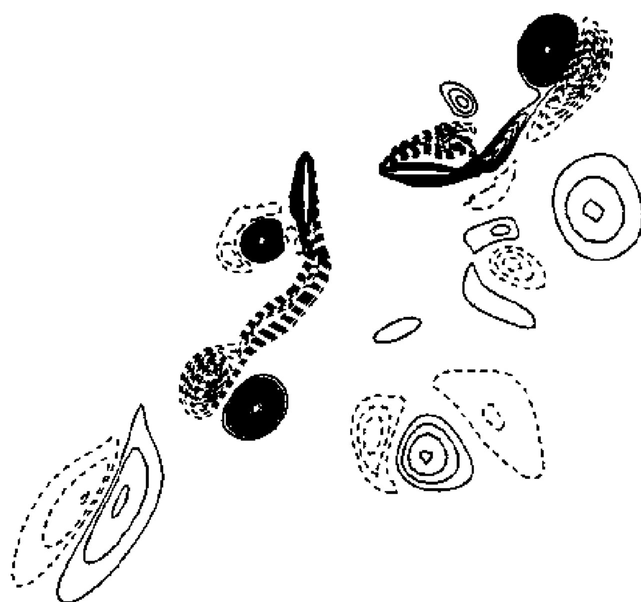
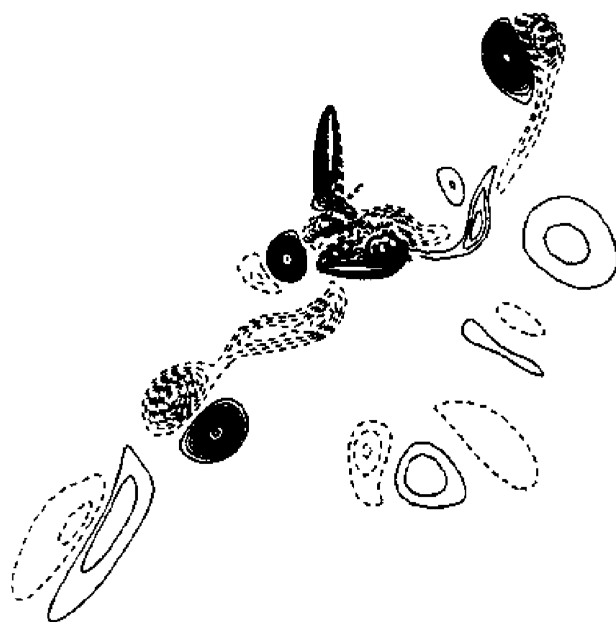


图 5 两翼 90°相差时力与力矩系数



(a) $\tau = 46.2$



(b) $\tau = 47.35$

图 6　两翼反相时两个时刻的涡量分布

微管道中稀薄气体的蠕动传输[1)]

朱光华　方　竞

（北京大学，力学与工程科学系，北京 100871）

摘要　研究了二维微管道中稀薄气体在边界滑移和管道壁面蠕动非线性耦合下的气流流动输运。滑移速度与 Knudsen 数有关，壁面蠕动则与波数相关，经过摄动分析后，得到临界回流压降与 Knudsen 数，波数，雷诺数之关系。

关键词　支气管，自由泵，滑移流，微型电子机械系统(MEMS)，临界回流

引　言

从 1875 年以来，人们一直在研究以 Knudsen 数（$K_n = mfp/a$，mfp 是气体的平均自由程，a 是管道面的特征长度)为主控参数的内管道中稀薄气体的流动。考虑或不考虑滑移的内流动前期探索[1]，主要局限于简单的几何外形，很少考虑管壁表面的形貌[2]。而物理[3~5]或数学意义[6]上的滑移，主要来自于低压环境或流过粗糙/镀膜表面时的处理。如果边界或管壁上的气体分子在碰撞或反弹过程中的动量交换不完全，则流动的宏观速度不为零，便有滑移发生。

近年来，随着微型电子机械系统 (MEMS) 的迅速发展，尤其是微管道类器件的应用，人们开始研究在粗糙壁面管道内的有滑移的流动[7~10]并且发现了由于沿着壁面小波状粗糙度[11]滑移所导致的有趣的物理行为。就微管道的制造而言，由于现今的蚀刻技术的限制[12]，半径 1μm 量级完全圆形截面圆管的加工仍然是非常困难的。此时粗糙度必定存在，微尺寸下内低压或微管道截面之特征尺度接近次微米都会产生滑移 (0.001< K_n<0.15)。

另一方面，在微型电子机械系统中，大多数静电式及共振式传感器是在较大的动态范围工作的。微管道的平均截面尺寸最多是微米的几十倍，而微管道的壁厚几乎是在微米量级。于是，在 MEMS 应用中的微管道极易受到环境噪声，如：振动，外在激发的行波等干扰。当稀薄气体在刚硬厚壁的宏观管道内流动时，我们可以忽略这些动态效应。反之，对于微制造的材料，即使是以硅为基体，当稀薄气体在相当薄壁的微管道内流动时，我们必须考虑这些由于作用在管壁上的非静态噪声所产生的非稳态效应，此时微管道内的稀薄气体流量可能会被这类噪声明显地改变。

本文探讨当行波沿着二维微管道 (定宽及相当长)的柔性壁面向下游传播并存在速度滑移时的流动机制。类似的壁面无滑移的黏性流体蠕动研究可以在文[13]内找到初步结果。关于无滑移蠕动研究的详尽文献，可参考[14]。本文的结果可以应用到支气管或微支气管内的气体流动以及噪声引致的自由泵 (free pumping)。结果表明，对于所有的雷诺数及波数，临界回流值 (critical reflux)与无滑移时的情况不同。在这里，假设流动的马赫数 M_a 远小于 1，所用的控制方程仍是不可压缩 Navier-Stokes 方程及放宽的速度滑移边界条件。

1　流动分析

考虑在一个二维均匀厚度管道内流动的稀薄气体(牛顿黏性流体)，在柔性壁面有一小振幅为 a 的行波传播；上/下壁($y=\pm d$)的位移 (假定)是η 及$-\eta$，其中$\eta = a\cos[2\pi(x-ct)/\lambda)]$，$\lambda$ 是波长，c 是波速，x 是波动传播方向的座标，y 是垂直于平均壁面的座标，见图 1。

---

1)　中国博士后科学基金的资助项目

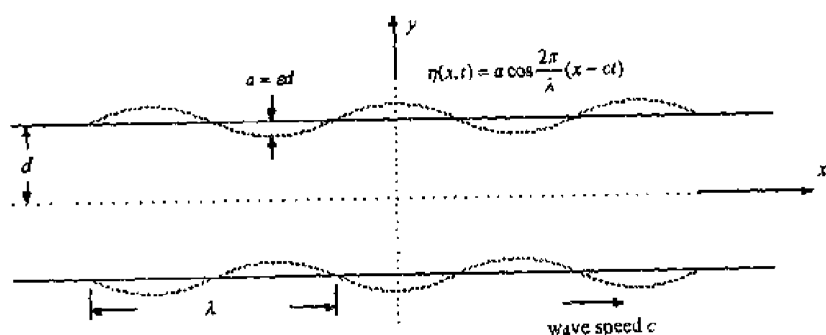


图1 蠕动壁的示意图

1.1 控制方程

为了方便起见，流动方程式将以无量纲变量表示。我们有特征速度 c 及三个特征长度 a，λ，d。故有下列变数

$$x'=\frac{x}{d},\quad y'=\frac{y}{d},\quad u'=\frac{u}{c},\quad v'=\frac{v}{c},$$

$$\eta'=\frac{\eta}{d},\quad \psi'=\frac{\psi}{cd},\quad t'=\frac{ct}{d},\quad p'=\frac{p}{\rho c^2}$$

振幅比 ε，波数 α，及雷诺数 Re 分别定义如下

$$\varepsilon=\frac{a}{d},\quad \alpha=\frac{2\pi d}{\lambda},\quad Re=\frac{cd}{v}$$

我们求出以参数 ε 展开的解

$$\psi=\psi_0+\varepsilon\psi_1+\varepsilon^2\psi_2+\cdots,\qquad \frac{\partial p}{\partial x}=\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0+\varepsilon\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_1+\varepsilon^2\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_2+\cdots$$

此处

$$u=\partial\psi/\partial y,\quad v=-\partial\psi/\partial x$$

二维动量及连续方程消去压力项 p 后，我们可得到以流函数 ψ 表达的方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi+\psi_y\nabla^2\psi_x-\psi_x\nabla^2\psi_y=\frac{1}{Re}\nabla^4\psi,\quad \nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

下标表示偏微分。其摄动方程是

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi_0+\psi_{0y}\nabla^2\psi_{0x}-\psi_{0x}\nabla^2\psi_{0y}=\frac{1}{Re}\nabla^4\psi_0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi_1+\psi_{0y}\nabla^2\psi_{1x}+\psi_{1y}\nabla^2\psi_{0x}-\psi_{0x}\nabla^2\psi_{1y}-\psi_{1x}\nabla^2\psi_{0y}=\frac{1}{Re}\nabla^4\psi_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi_2+\psi_{0y}\nabla^2\psi_{2x}+\psi_{1y}\nabla^2\psi_{1x}+\psi_{2y}\nabla^2\psi_{0x}-\psi_{0x}\nabla^2\psi_{2y}-\psi_{1x}\nabla^2\psi_{1y}-\psi_{2x}\nabla^2\psi_{0y}=\frac{1}{Re}\nabla^4\psi_2$$

及其它高阶项。

1.2 边界条件

流体的边界有对称壁面的运动及非零的速度滑移。边界条件可以在 $y=\eta$ 上表达，然后 ε 的幂次展开[15]。

$$\psi_{0y}\big|_1+\varepsilon\left[\cos\alpha(x-t)\psi_{0yy}\big|_1+\psi_{1y}\big|_1\right]+\varepsilon^2\left[\frac{\psi_{0yyy}\big|_1}{2}\cos^2\alpha(x-t)+\cos\alpha(x-t)\psi_{1yy}\big|_1+\psi_{2y}\big|_1\right]+$$

$$\cdots=-K_n\Big\{\psi_{0yy}\big|_1+\varepsilon\left[\cos\alpha(x-t)\psi_{0yyy}\big|_1+\psi_{1yy}\big|_1\right]+$$

$$\varepsilon^2\left[\frac{\psi_{0yyyy}\big|_1}{2}\cos^2\alpha(x-t)+\cos\alpha(x-t)\psi_{1yyy}\big|_1+\psi_{2yy}\big|_1\right]+\cdots\Big\}$$

$$\psi_{0x}\big|_1+\varepsilon\left[\cos\alpha(x-t)\psi_{0xy}\big|_1+\psi_{1x}\big|_1\right]+\varepsilon^2\left[\frac{\psi_{0xyy}\big|_1}{2}\cos^2\alpha(x-t)+\cos\alpha(x-t)\psi_{1xy}\big|_1+\psi_{2x}\big|_1\right]+$$

$$\cdots=\varepsilon\alpha\sin\alpha(x-t)$$

2　$K_n\sim O(\varepsilon)$ 情况的解

由以上边界条件来考虑$K_n\sim O(\varepsilon)$情况，即稀薄气体的平均自由程与壁面波的振幅是同量级的，我们得到

$$\psi_{0y}(\pm1)=0,\qquad \psi_{0x}(\pm1)=0$$

$$\cos\alpha(x-t)\psi_{0yy}\big|_{\pm1}\pm\psi_{1y}\big|_{\pm1}=\mp K_n\psi_{0yy}(\pm1),\quad \cos\alpha(x-t)\psi_{0xy}\big|_{\pm1}\pm\psi_{1x}\big|_{\pm1}=\mp\alpha\sin\alpha(x-t)$$

$$\frac{\psi_{0yyy}\big|_{\pm1}}{2}\cos^2\alpha(x-t)\pm\cos\alpha(x-t)\psi_{1yy}\big|_{\pm1}\pm\psi_{2y}\big|_{\pm1}=\mp K_n\left[\cos\alpha(x-t)\psi_{0yyy}\big|_{\pm1}\pm\psi_{1yy}\big|_{\pm1}\right]$$

$$\frac{\psi_{0xyy}\big|_{\pm1}}{2}\cos^2\alpha(x-t)\pm\cos\alpha(x-t)\psi_{1xy}\big|_{\pm1}\pm\psi_{2x}\big|_{\pm1}=0$$

从以上方程式及对称条件，在 x-方向的零阶均匀压降，我们有

$$\psi_0=K_0\left[y-\frac{y^3}{3}\right],\qquad K_0=\frac{Re}{2}\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)_c$$

$$\psi_1=\frac{1}{2}\left\{\phi(y)e^{\mathrm{i}\alpha(x-t)}+\phi^*(y)e^{-\mathrm{i}\alpha(x-t)}+\phi_0(y)\right\}$$

此处*表示共轭复数。将ψ_1代入方程式，得到

$$\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y^2}-\alpha^2+\mathrm{i}\alpha Re\left[1-K_0(1-y^2)\right]\right\}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y^2}-\alpha^2\right)\phi-2\mathrm{i}\alpha K_0Re\phi=0,\qquad \phi_{0rrrr}=0$$

边界条件

$$\phi_y(\pm1)=2K_0,\qquad \phi_{0y}(\pm1)=4K_0K_n,\qquad \phi\ (\pm1)=\pm1$$

以上方程式及条件，经过冗长的运算后，可以得到理论解$\phi(y)$，$D(y)$[15]。

3　结果及讨论

为了与先前 Fung 及 Yip[13]的无滑移结果($K_n=0$)比较，我们须定义临界回流条件：当平均速度在管道中心($y=0$)为零时，如果对抗正压降的施压超过此临界值，将会导致管道中心

有向后的回流(reflux)，反之，则不会有回流。相对应的平均二阶压降及雷诺数的乘积是 $a_0 = Re\overline{(\mathrm{d}p/\mathrm{d}x)_2}$ 可以用 $\phi(y)$， $D(y)$ 来表示[15]。

从图 2 可以确认我们的理论解是正确。我们将 Fung 及 Yip[13]的无滑移解扩展到了有滑移的结果(自由泵：$K_0 = 0$ 时)。壁面有滑移时的临界回流压降也比无滑移时[13]为低。临界回流压降是与雷诺数，Knudsen 数，及波数有关[15]，我们在表 1 内列出了详细数值。

表 1　不同雷诺数及波数下的临界回流条件 a_0 比较[15]

		Fung & Yih	Present:No-slip	Slip($K_n = 0.01$)
Re	α	$Re\overline{(\mathrm{d}p/\mathrm{d}x)_2}\big\|_{cr}$	$Re\overline{(\mathrm{d}p/\mathrm{d}x)_2}\big\|_{cr}$	$Re\overline{(\mathrm{d}p/\mathrm{d}x)_2}\big\|_{cr}$
0.01	0.1	3.0035	3.0040	2.8881
	0.2	3.0157	3.0161	2.9002
	0.3	3.0365	3.0365	2.9207
	0.4	3.0656	3.0656	2.9497
	0.5	3.1038	3.1039	2.9877
	0.6	3.1519	3.1519	3.0355
	0.7	3.2105	3.2106	3.0936
	0.8	3.2806	3.2806	3.1629
	0.9	3.3630	3.3630	3.2444
	1.0	3.4587	3.4587	3.3390
0.10	0.1	3.0040	3.0040	2.8881
	0.2	3.0161	3.0161	2.9002
	0.3	3.0365	3.0365	2.9207
	0.4	3.0656	3.0656	2.9497
	0.5	3.1039	3.1039	2.9877
	0.6	3.1519	3.1519	3.0355
	0.7	3.2106	3.2106	3.0936
	0.8	3.2806	3.2806	3.1629
	0.9	3.3630	3.3630	3.2444
	1.0	3.4587	3.4587	3.3380
1.0	0.1	3.0040	3.0040	2.8881
	0.2	3.0160	3.0160	2.9001
	0.3	3.0362	3.0362	2.9203
	0.4	3.0650	3.0650	2.949[illegible]
	0.5	3.1029	3.1029	2.9868
	0.6	3.1505	3.1505	3.0341
	0.7	3.2086	3.2086	3.0917
	0.8	3.2780	3.2780	3.1603
	0.9	3.3597	3.3597	3.2410
	1.0	3.4545	3.4545	3.3347
10.0	0.1	3.0003	3.0003	2.8844
	0.2	3.0015	3.0015	2.8856
	0.3	3.0037	3.0037	2.8879
	0.4	3.0075	3.0075	2.8916
	0.5	3.0135	3.0135	2.8975
	0.6	3.0228	3.0228	2.9065
	0.7	3.0363	3.0363	2.9198
	0.8	3.0556	3.0556	2.9386
	0.9	3.0820	3.0820	2.9645
	1.0	3.1173	3.1173	2.9992

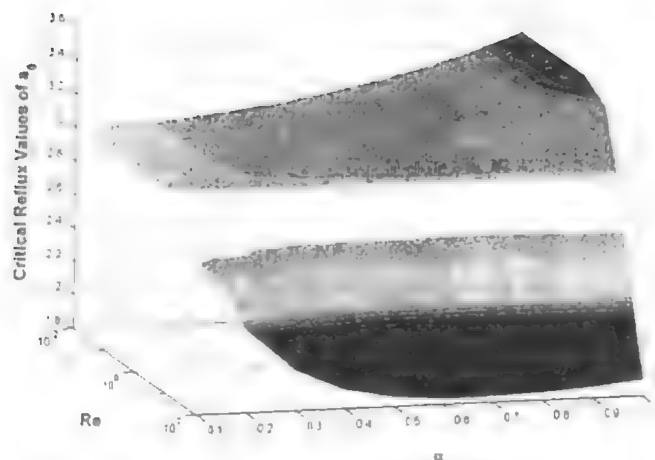


图 2　临界回流条件 $a_0 = Re\overline{(dp/dx)_2}$ 的比较．本文结果与 Fung 及 Yip[13]的结果一致．

参 考 文 献

1 von Helmholtz H and von Piotrowski G. Uber Reibung tropfbarer FlussigkeitenSitz. Math.-Naturwiss Kl Akad Wiss Wien，1860，XL：607

2 Ebert WA and Sparrow EM. Slip flow in rectangular and annular ducts. *J Basic Eng Transactions ASME*，1965，87：1018~1024

3 Brown GP，DiNardo A，Cheng G-K，and Sherwood TK. The flow of gases in pipes at low pressure. *J Appl Phys*，1946，17：802~813

4 Payne H. Temperature jump and velocity of slip at the boundary of a gas. *J Chem Phys*，1953，21：2127~2135

5 M.N. Kogan. *Rarefied Gas Dynamics*. Plenum Press：New York，1969

6 Miksis MJ and Davis SH. Slip over rough and coated surfaces. *J Fluid Mech*，1994，273：125~139

7 Chu W K-H. Slip flow over rough wavy wall. *ZAMM*，1996，76：363

8 Chu W K-H. Stokes slip flow between corrugated walls. *ZAMP*，1996，47：591~598

9 Chu W K-H. Small-Knudsen-number flow in a corrugated tube. *Meccanica*，1999，34：133~137

10 Chu W K-H. Preprint (1998)

11 Komvopoulos K. Surface engineering and microtribology for microelectromechanical systems. *Wear*，1996，200：305~327

12 Esashi M，Minami K and Ono T. Silicon bulk micromachining and nanomachining. *Cond Matter News*，1998，6：31~44

13 Fung YC and Yih CS. Peristaltic transport. *J Appl Mech*，1968，35：669~675

14 Srivastava VP and Srivastava LM. Effects of poiseuille flow on peristaltic transport of a particulate Suspension. ZAMP，1995，46：655~679

15 Chu W K-H. Preprint，1999

二维非定常空气动力学反命题的变分原理

何吉欢

(上海大学力学所，上海 200072)

摘要 应用半反推法建立了二维非定常流动的变分原理，然后应用变域变分理论阐述了反问题的适定性提法，进一步论证了刘高联关于流体力学和气动热弹性力学新一代反命题理论的科学性和准确性。

关键词 变分原理，反命题，非定常流，半反推法

引 言

流体力学问题一般可分为正问题(分析)、反问题（设计)、杂交问题和优化问题。在刘高联的积极倡导下，叶轮机气动力学设计反命题理论已取得丰硕成果[1]。

传统的反问题，即第一代反问题（只对某一名义工况点(冲角 α 和来流 M_∞)规定翼面流速分布)，存在很大的缺陷：1）数学上不适定；2）不切实际甚至无法实现的物形（不封闭或机翼厚度是负值)。为了克服传统反命题的致命缺陷，刘高联在 1980 年起提出了各类杂交命题。杂交命题是反命题和杂交命题的统一与推广。但杂交命题也存在以下主要缺点：1）只适合于单工况点反命题，2）不适合于非定常问题。这些障碍于 1998 年被刘高联顺利攻克，从而诞生了现代反命题理论，即第三代反命题理论。主要包括：1）非定常流动反命题和杂交命题；2）多工况点气动反命题和杂交命题；3）气动热弹性力学反命题。

在第三代反命题理论中，我们也遇到了很多困难，如何给定速度或者压力分布。如果给得不当，也会出现不可实现的机翼，如机翼的厚度是时间的函数等。

本文将用变分理论来阐述刘高联第三代反命题理论的科学性和准确性。

1 正命题的变分理论

这一节我们将应用作者提出的半反推法建立正命题的变分原理。气动控制方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{v})=0 \tag{1}$$

$$\nabla \Phi=\boldsymbol{v} \tag{2}$$

$$(\kappa-1)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}v^{2}\right)+\frac{P}{\rho}=1 \tag{3}$$

$$P=\rho^{\kappa} \tag{4}$$

边界条件：

1) 在 $x=-\infty$ 处 A_1，流量已知

$$\rho v_n=(q_\infty)_{pr} \tag{5}$$

2) 在 $x=\infty$ 处 A_2，给定以下关系式

$$\rho v_n=(q_\infty)_{pr}-\frac{\rho_\infty}{v_\infty}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{6}$$

3) 在振动机翼表面 A_3，我们给定以下条件

$$\rho(v_n - u) = q_{pr} \tag{7}$$

这里 u 是机翼的法向运动速度，q_{pr} 是考虑边界层引起的修正量，可以看成是通过机翼表面的流量。

初始条件：

设机翼振动周期为 T。对任意流动参数 X，成立下列关系式

$$X(x,y,z,t \pm nT) = X(x,y,z,t)\ ,\ (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \tag{8}$$

$$(\Phi)_{t=0} = (\Phi)_{t=T} \tag{9}$$

我们来建立以($\Phi, \boldsymbol{v}, P$ 和 ρ)为独立变量的广义变分原理，应用半反推法[2-5]，我们建立以下一个试泛函

$$J(\Phi,\boldsymbol{v},P,\rho) = \iiint\limits_{\Omega}\left\{\frac{1}{2}\rho v^2 + F\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \tag{10}$$

式中 F 是一个待定函数，可分布识别它。如对 $\boldsymbol{v}$ 独立变分

$$\delta_v J = \iiint\limits_{\Omega}\{\rho\boldsymbol{v} + F_v\}\cdot\delta\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = 0 \tag{11}$$

可得以下一个试欧拉方程

$$\rho\boldsymbol{v} + F_v = 0 \tag{12}$$

这一方程应满足一个场方程，如(2)，于是我们可设

$$F_v = -\rho\nabla\Phi \tag{13}$$

这样我们可以把 F 识别为

$$F = -\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\Phi + F_1 \tag{14}$$

式中 F_1 为一新引入的待定函数。对每一个变量独立变分，我们都可以得到一个相应的欧拉方程，让每一个欧拉方程满足一个场方程，我们可以识别待定函数。最后我们得到以下一个泛函

$$J(\Phi,\boldsymbol{v},P,\rho) = \iiint\limits_{\Omega}\left\{\frac{1}{2}\rho v^2 - \rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\Phi + \frac{\partial\rho}{\partial t}\Phi + \frac{1}{\kappa-1}(\rho - P\ln\rho) + \frac{1}{\kappa(\kappa-1)}(P\ln P - P)\right\}\mathrm{d}\Omega \tag{15}$$

把方程(2)，(3)和(4)作为约束代入上述泛函可得但变量的变分原理

$$J(\Phi) = \iiint\limits_{\Omega}\left\{\frac{1}{\kappa-1}\rho\left(\frac{P}{\rho}-1\right) + \frac{1}{\kappa-1}\left(\rho - \frac{P}{\kappa}\right)\right\}\mathrm{d}\Omega = \iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{\kappa}P\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \tag{16}$$

这就是 Bateman 原理。所以 Bateman 原理可推广至非定常可压无旋流动。

为了把边/初条件转化为自然边界条件，我们假设泛函可写成如下形式

$$\tilde{J}(\Phi,\boldsymbol{v},\rho) = J(\Phi,\boldsymbol{v},\rho) + \iint\limits_{A_1}G\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + \iint\limits_{A_2}H\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{t_0}M\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{t_T}N\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{17}$$

式中 G，H，M 和 N 为待定函数。对 Φ 独立变分，在 A_1 可得

$$-\rho v_n + G_\Phi = 0 \tag{18}$$

它应满足方程(5)，于是我们可识别 G 得

$$G = \Phi(\rho v_n)_{pr} \tag{19}$$

最后可得

$$\tilde{J}(\Phi,v,\rho)=J(\Phi,v,\rho)+\iint_{A_1}\Phi(\rho v_n)_{pr}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t+\iint_{A_2}(q_\infty)_{pr}\left[1-(v_\infty)_{pr}^{-2}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial t}\right]\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t+$$
$$\iint_{t_0}\rho_0\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{t_T}\rho\left(\Phi\big|_{t=0}-\Phi_{\big|t=T}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{20}$$

在 A_3 上，由于机翼的震动，我们在应用变域变分理论，设泛函可写成

$$\tilde{\tilde{J}}(\Phi,v,\rho)=\tilde{J}(\Phi,v,\rho)+\iint_{A_3}F\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \tag{21}$$

应用变域变分，我们得

$$-\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\rho(v_n-u)+F_\Phi=0 \tag{22}$$

它应满足方程(7)，即

$$F_\Phi=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\rho(v_n-u)=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(q_n)_{pr} \tag{23}$$

于是我们可识别 F 得

$$F=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(q_n)_{pr}\Phi \tag{24}$$

这样我们得到了一个完整的广义变分原理

$$\tilde{\tilde{J}}(\Phi,v,\rho)=\tilde{J}(\Phi,v,\rho)+\iint_{A_3}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(q_n)_{pr}\Phi\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \tag{25}$$

2 反命题的变分理论

为了使问题简化，我们设在 A_3 上满足以下关系

$$\rho(v_n-u)=(q_n)_{pr}=0 \tag{7a}$$

设反命题的泛函可表示为

$$J_{\text{Inverse}}(\Phi,v,\rho)=\tilde{\tilde{J}}(\Phi,v,\rho)+\oint_{\text{wing}}F\,\mathrm{d}s \tag{26}$$

设下列关系式成立

$$\delta r_t=j\delta y \tag{27}$$

j 为 y-方向的单位矢量。由于在机翼面上的 y 是未知的，对 y 独立变分得

$$\oint_{\text{wing}}\left\{\int_0^T\frac{1}{\kappa}P\,\mathrm{d}t+F_y\right\}\delta y\,\mathrm{d}s=0 \tag{28}$$

或

$$\int_0^T\frac{1}{\kappa}P\,\mathrm{d}t+F_y=0 \tag{29}$$

从上述关系式，给予我们很多启迪，在机翼表面可以给定以下变量

$$\int_0^T P\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T P_{pr}\,\mathrm{d}t = (P_{pr})_m \tag{30}$$

这和刘高联得到的结果[6,7]完全一致。识别待定函数后得

$$J_{\text{Inverse}}(\Phi, v, \rho) = \tilde{\tilde{J}}(\Phi, v, \rho) - \oint_{\text{wing}} \frac{1}{K} yT(P_{pr})_m\,\mathrm{d}s \tag{31}$$

3 结 论

本文得到了二维反问题的变分原理，得到的结果和刘高联的理论完全一致，这充分说明刘高联理论的科学性和准确性。

参 考 文 献

1 刘高联. 流体力学和气动热弹性力学新一代反命题的研究. 叶轮机气动力学设计反命题"学术研讨会，上海，2000

2 He JH. Semi-inverse method of establishing generalized variational principles for fluid mechanics with emphasis on turbomachinery aero-dynamics *International Journal of Turbo & Jet-Engines*, 1997, 14(1): 23~28

3 He JH. Hybrid problems of determining unknown shape of bladings in compressible S_2-flow in mixed-flow turbomachinery via variational technique. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 71(2): 154~159

4 He JH. Inverse problems of determining the unknown shape of oscillating airfoils in compressible 2D unsteady flow via variational technique. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 2000, 72(1): 154~159

5 He JH. A variational model for micropolar fluids in lubrication journal bearing. *International J. of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2000, 1(2): 139~142

6 Liu GL. Formulation of inverse problem of 2-D unsteady flow around oscillating airfoils by variational technique, *ACTA Aerodynamica Sinica*, 1996, 14(1): 1~6

7 Liu GL, Guo JH. Variable-domain variational formulation of inverse problem IA of 2-D unsteady transonic flow around oscillating airfoils. *Acta Mech*, 1999, 137(3): 195~209

Gurney Flap 对三角翼气动特性影响的实验研究 1)

李亚臣　王晋军

(北京航空航天大学流体力学研究所，北京 100083)

摘要　在北航 D1 风洞中进行了 Gurney flap 对三角翼气动特性影响实验研究，在雷诺数为 250 000 的条件下对不同高度的平板型 Gurney flap 在不同实验状态下得到的实验结果表明，Gurney Flap 在中大升力系数条件下可以提高三角翼的升阻比，尤其以 1%弦长 Gurney flap 最为显著。

关键词　Gurney flap，增升，升阻比，风洞实验

引　言

Gurney flap 是一块 1% ~ 5% 弦长高度的平板，在翼型下表面沿垂直翼型弦线的方向置于翼型尾缘或接近尾缘的地方，用以提高翼型的升力和改善其气动特性。最早开展 Gurney flap 研究的是 Liebeck[1]，他对安装了高度 h 为 1.25% C（C 为翼型弦长）的 Gurney flap 的 Newman 翼型进行了风洞实验，结果与不带 Gurney flap 的翼型相比，升力增加、最大升力系数提高、零升攻角减小，并且相同升力系数下，阻力有所减小。后来，Newhart 和 Pendergraft[2]在水洞中用 NACA0012 翼型加装不同形式的 Gurney flap 证实了 Liebeck 的假设。流动显示结果表明，在实验雷诺数为 8588 时，最有效的 Gurney Flap 高度是 $h=4.2\%C$，且在攻角小于 3.5° 时能有效推迟翼型上表面分离。

Storms 和 Jang[3]在风洞中对 $h=0.5\%$ ~2 %C 的 NACA4412 翼型进行的研究表明，高升力系数下，$h=1\%C$ 的 Gurney flap 可获得较大的升阻比。 Jang 等[4]还利用不可压 Navier-Stokes 方程对 $h=0.5\%$ ~3 %C 的 Gurney flap 进行了数值计算，得到了与 Storms 和 Jang[3]类似的结果。Myose 等[5]对加装了 1% ~ 4%C 的 Gurney flap 的 NACA0011 翼型的研究表明，$h\doteq 2\%C$ 的 Gurney flap 在 $C_L>1.4$ 时可使升阻比增大，而在中小攻角下升阻比减小。Myose 等[6]对 GA(W)-2 翼型进行的研究表明，二段翼型应用 Gurney flap 同样可以达到提高升阻比的目的。

由于已有的研究工作绝大多数是在翼型上进行的，在机翼上进行加装 Gurney flap 的研究很少，尤其是在平板三角翼上加装 Gurney flap 的研究就更少。本研究的目的就是探讨 Gurney flap 对平板三角翼的增升效果。

1　实验设备与技术

实验模型为由硬铝合金加工而成的切角平板三角翼(图 1)，除后缘外，所有边缘均为 60° 倒角，三角翼厚 3mm。共加工了 4 种高度的 Gurney flap：G1，G2，G3 和 G5，高度 h 分别为 1%C，2%C，3%C 和 5%C，厚度均为 0.8mm。Gurney flap 用强力胶粘贴在三角翼尾缘，且垂直于三角翼平面。

---

1)　高等学校骨干教师资助计划项目和国防科技重点实验室基金试点资助项目

实验是在北航 D1 风洞进行的，该风洞为三元回流开口风洞，试验段全长 2m，截面形状为椭圆形，进口尺寸为 1.02m×0.76m，出口尺寸为 1.07m×0.81m，风洞流场品质较好，湍流度 ε<0.3%

三角翼的升力和阻力是用一台内置六分量杆式应变天平在 0°~26°之间每隔 2°测定的。三角翼与天平之间通过一个圆锥形接头相连。实验风速为 20 m/s，基于三角翼根弦长的雷诺数约为 250 000。

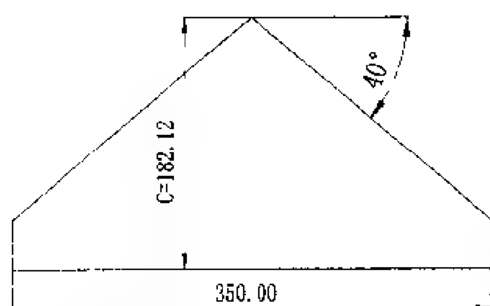


图 1 平板三角翼平面形状图

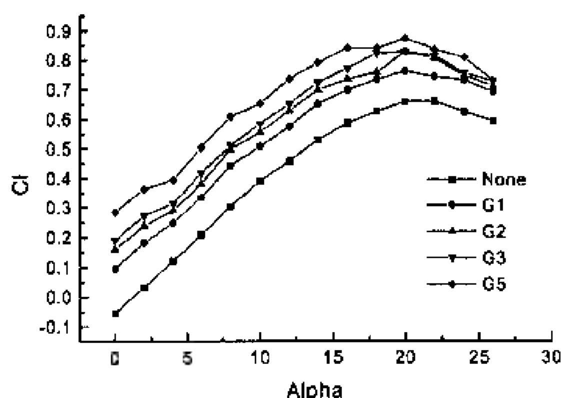


图 2 升力系数随攻角变

2 实验结果与讨论

从图 2 可以看出，所有高度的 Gurney flap 均使三角翼的最大升力系数提高，并且随着 Gurney flap 高度的增加，最大升力系数的增加量提高，升力系数曲线相应上移，并有轻微左偏，相应地，失速攻角稍有减小，这说明 Gurney flap 增加了三角翼的有效弯度。与不加 Gurney flap 的光滑三角翼相比，加装 1%C，2%C，3%C 和 5%C 高度 Gurney flap 后的最大升力系数分别提高了 15.7%，25.7%，25.7%和 32.8%。然而，与其他研究者得出的结果类似，高度较大的 Gurney flap(如 5%C)在使升力系数大幅度增加的同时，也使阻力系数有很大上升(图 3)。

由于 Gurney flap 同时使升力系数和阻力系数增大，因此，只有通过考察升阻比特性才能对其是否真正提高了机翼的气动性能做出判断。图 4 是升阻比随攻角变化的曲线。从图中

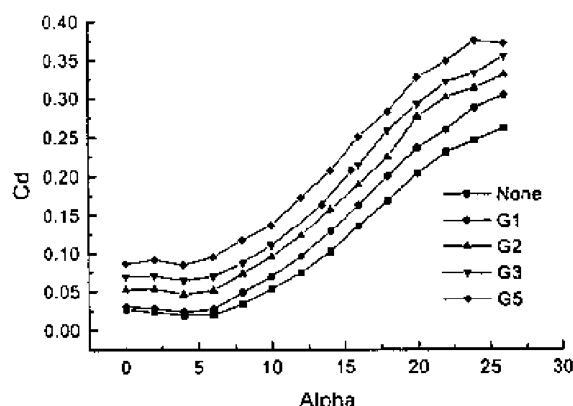


图 3 阻力系数随攻角变化曲线

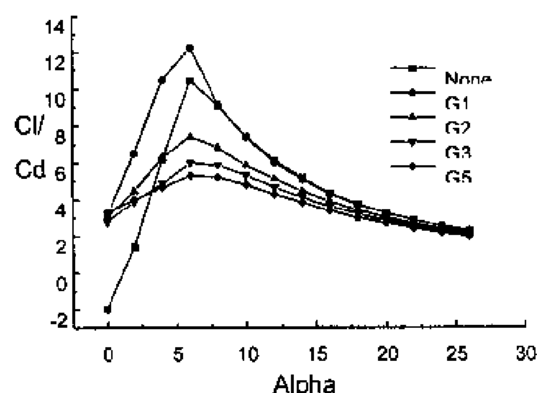


图 4 升阻比随攻角变化曲线

可以看出，与不加 Gurney flap 的光滑三角翼相比，攻角在 0°~3°之间时，所有 Gurney flap 均会使升阻比提高，其中 1% Gurney flap 的作用尤其明显，且在攻角为 6°时，可使升阻比

提高达 17.3%；攻角在 3°～8°之间时，只有 1% Gurney flap 能够继续提高升阻比；攻角大于 8°时，所有高度的 Gurney flap 均不能提高升阻比。

我们知道，飞机在飞行时需要的是一定的升力系数，用以产生足够承载的升力，而并不是一定的攻角。为了比较在特定升力系数下 Gurney flap 对升阻比特性的影响，图 5 给出了不同升力系数下各种 Gurney flap 的升阻比曲线。从该图上我们可以看到，当升力系数在 0.25 以上时，1%C 的 Gurney flap 即可产生高于光滑机翼的升阻比，并且这种状态随着升力系数的增加一直持续；当升力系数大于 0.5 以后，所有高度的 Gurney flap 均能提供高于光滑机翼的升阻比。由此看来，Gurney flap 的最佳应用场合是在中高升力系数的状态下，如飞机起飞、降落以及作机动飞行时，而在较小升力系数情况下，如巡航状态时，不宜使用。可以设计一种能够随时打开/关闭的 Gurney flap 来发挥它在提高升阻比方面的最佳功用。图 6 给出的是不同升力系数下，各种高度 Gurney flap 相对于光滑三角翼产生的升阻比增量。

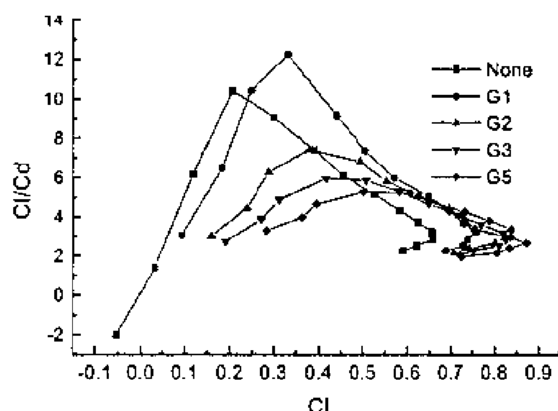


图 5 升阻比随升力系数变化曲线

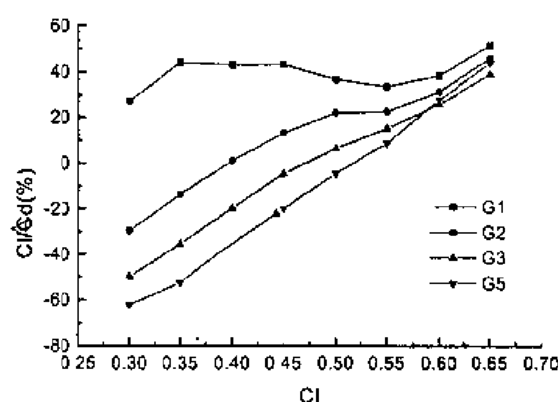


图 6 不同升力系数下的升阻比增量

3 结 论

(1) 与不加 Gurney flap 的光滑三角翼相比，Gurney flap 可以提高最大升力系数，失速攻角略有减小，阻力有所增加；与不加 Gurney flap 的光滑三角翼相比，加装 1%C，2%C，3%C 和 5%C 高度 Gurney flap 后的最大升力系数分别提高了 15.7%，25.7%，25.7%和 32.8%。

(2) 合适的 Gurney flap 确实可以使三角翼获得很高的升阻比，本实验条件下得出的最佳 Gurney flap 高度是 $h=1\%C$,，在攻角为 6°时，获得最大升阻比，较光滑三角翼的最大升阻比提高 17.3%。

(3) Gurney flap 的最佳应用场合为中高升力系数情况下，在小升力系数时不宜使用。

参 考 文 献

1 Liebeck RH. Design of subsonic airfoils for high lift. *Journal of Aircraft*, 1978, 15(9): 547~561

2 Neuhart DH and Pendergraft OC. A water tunnel study of gurney flap. NASA TM 4071, 1988-11. 1~20

3 Storms BL and Jang CS. Lift enhancement of an airfoil using a gurney flap and vortex generators. *Journal of Aircraft*, 1994, 31(3): 542~547

4 Jang CS, Ross JC and Cummings RM. Computational evaluation of an airfoil with a gurney flap. AIAA Paper 92-2708, 1992

5 Myose R, Heron I and Papadakis M. The effect of gurney flaps on a NACA0011 airfoil. AIAA Paper 96-0059, 1996

6 Myose R, Papadakis M and Heron I. Gurney flap experiments on airfoils, wings, and reflection plane model. *Journal of Aircraft*, 1998, 35(2): 206~211

低速俯仰-滚摆耦合复杂流场测量

唐敏中　张　伟

（中国航空工业空气动力研究院，哈尔滨 150001）

摘要　给出 80° 三角翼模型在低速风洞中实施俯仰-滚摆耦合大幅度振动的复杂流场测量结果，包括静态和动态、单自由度俯仰和滚摆、俯仰 滚摆耦合运动条件下的流动显示结果和强迫俯仰、自由滚摆条件下的滚转角时间历程测量结果。六分量气动载荷测量结果。分析了耦合运动以及不同相位角和不同频率对耦合气动特性的影响。结果表明，双自由度的耦合运动比单自由度运动具有更为明显的动态迟滞特性，进一步推迟分离涡的破碎，推迟开始滚摆的攻角 α_{wr}，双自由度耦合运动的气动力系数迟滞环比单自由度运动时更为明显。

关键词　俯仰-滚摆耦合运动，复杂流场，流动显示，滚转角时间历程，气动载荷测量

引　言

为研究先进战斗机在大攻角机动飞行状态下的动态气动特性和非定常复杂流动机理，本课题在“八五”和“九五”前期开展了“低速动态大攻角气动特性试验研究”和“机翼滚摆试验研究”。研究结果表明，飞机模型和三角翼模型在大攻角俯仰运动中的动态迟滞特性明显影响前缘涡的形成、发展和破碎，即上仰中推迟涡的破碎，提高失速攻角，涡核靠近翼面，提高涡升力；下俯中推迟分离流的再附和前缘涡的再现，涡核离开翼面；气动力系数和翼面压力系数形成明显的迟滞环，增大缩减频率，迟滞环扩大[1]。

影响飞机大攻角气动特性和限制飞行包线的一个重要因素是自激滚摆运动。飞机的自激滚摆不仅造成升力损失，而且由于纵横向自由度的耦合严重影响飞行安定性。但对于形成滚摆的真实机理至今仍不清楚。通过对于 80°三角翼模型在低速风洞中滚摆试验研究包括定量流动显示（PIV 测量），获得了形成和维持滚摆的主要原因不仅在于前缘分离涡在滚转中相对翼面位置的动态迟滞特性，而且还在于前缘分离涡强度变化在滚转中的动态迟滞特性[2, 3]。

上述的大攻角动态气动特性研究和复杂流场测量都是在单自由度状态下进行的，而飞机作机动飞行大攻角拉起时，常是俯仰与滚摆耦合在一起完成的 。因此为更真实地模拟机动飞行，分析俯仰-滚摆耦合状况下的复杂流动机理，对于先进战斗机气动布局研究和纵横向耦合气动效应研究以及非定常复杂流场测量，是非常重要和必要的。

本文即是在开展单自由度的俯仰和滚摆试验研究基础上，完成了俯仰-滚摆耦合气动特性试验研究。通过俯仰-滚摆耦合运动下的流动显示和自激滚转角时间历程测量以及双自由度六分量气动载荷测量，获得了非定常复杂流动机理的新的认识。

1　试验设备和试验方法

1.1 试验设备

为进行俯仰-滚摆耦合试验，研制了 FL-5 风洞中双自由度试验装置（图 1），它可使模型实施强迫俯仰和滚摆运动以及自由滚摆运动。俯仰和滚摆运动分别为

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_m / 2(1 - \cos 2\pi f_p t)$$

$$\Phi = \Phi_m / 2(1 - \cos 2\pi f_r t)$$

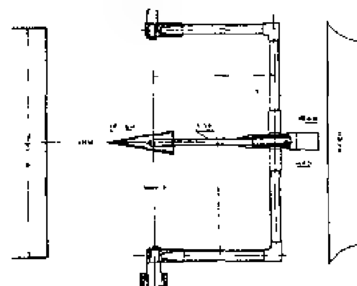


图 1　FL-5 风洞中俯仰—滚摆试验装置

式中俯仰频率 f_p 和滚摆频率 f_r，俯仰振幅 α_m 和滚摆振幅 Φ_m 均可调。在本期试验中，$\alpha_m = 45°$，$f_p = 0\sim0.667\text{Hz}$，$\Phi_m = 45°$，$f_r = 0\sim2 f_p$。滚摆

运动由交流伺服电机（National MSM042A1G）按给定运动规律直接驱动，并由计算机控制改变振幅、频率和相位角。俯仰运动由永磁直流电机（CZY176-25-0）驱动并由高精度数字锁相调速系统控制调频，振幅由大攻角动态试验装置改变。

试验模型为 80°尖前缘平板三角翼，根弦长 400mm。模型经六分量动态应变天平(DDT9101)与尾支杆相联。实时采集六分量天平信号和风速传感器信号，采样速率为 100K/s。经 12 位 A/D 变换和 1000 倍放大后由计算机采集和存储。计算机后处理和采用相位平均技术，得到对应采样攻角和滚转角时的动态气动力系数。在进行自由滚摆试验时，模型可绕其纵轴自由滚转。自激滚转角时间历程由同轴安装在机身轴线上的光电编码器 E6A2-CWZ3C 测量。

1.2 试验方法和试验内容

试验内容有：

流动显示：

(a) 在攻角 α 和滚转角 Φ 静态条件下的流动显示

$\alpha = 0.4° \sim 45.3°$，$\Phi = 0° \sim 45°$

(b) 单自由度(即单独俯仰或单独滚转)下的动态流动显示

$f_p = 0.04 \sim 0.67$ Hz，$f_r = 0.04 \sim 0.67$Hz，$\alpha_m = 45°$，$\Phi_m = 45°$，

(c) 俯仰-滚摆耦合（双自由度）动态流动显示

俯仰和滚摆同相位；滚摆超前俯仰 90°和 180°；滚摆落后俯仰 90°和 180°；滚摆频率为俯仰频率的两倍：$f_p = 0.04 \sim 0.67$Hz。

流动显示时风速为 $V_\infty = 3$m/s，对应三角翼展长 b 的缩减频率 $K = 2\pi fb / 2V_\infty =$ 0.007~0.104。CCD 摄象机安装在模型尾支杆上，与模型同步俯仰。采用新研制的流动显示技术，获得在模型双自由度运动状况下清晰的流动显示图象。

自激滚转角时间历程测量：

(a) 攻角静态 $\alpha = 22.9°$，$25.2°$，$32.0°$，$37.9°$，$42.3°$ 时的滚转角时间历程 $\Phi(t)$。

(b) 在俯仰状态下的自激滚转角时间历程 $\Phi(t)$，$f_p = 0.04 \sim 0.333$Hz。

六分量气动载荷测量：

(a) 单自由度(即单独俯仰或单独滚转)下的动态气动载荷测量

$f_p = 0.04 \sim 0.67$ Hz，$f_r = 0.04 \sim 0.67$Hz，$\alpha_m = 45°$，$\Phi_m = 45°$

(b) 俯仰-滚摆耦合（双自由度）动态流动显示

俯仰和滚摆同相位；滚摆超前俯仰 90°和 180°；滚摆落后俯仰 90°和 180°；滚摆频率为俯仰频率的两倍 ：$f_p = 0.04 \sim 0.67$Hz。

在进行自激滚转角时间历程测量时，风速 $V_\infty = 20$，30m/s，对应缩减频率 K=0.056～0.100，与流动显示时 K 值接近。由滚转角时间历程 $\Phi(t)$ 即可求得角速度 $\mathrm{d}\Phi(t)/\mathrm{d}t$ 和角加速度 $\mathrm{d}^2\Phi(t)/\mathrm{d}t^2$，再由模型的转动惯量即可求得滚转力矩系数 C_{mx}。

2 试验结果与分析

2.1 流动显示

在不同攻角 $\alpha = 15° \sim 37°$ 和不同滚转角 $\Phi = 0°$~$37°$时的静态流动显示表明(左侧数字为 Φ 值，右侧数字为 α 值)，随 Φ 角增大，三角翼左侧（背风侧）前缘有效后掠角增大，推迟前缘分离涡的破碎，离开翼面；三角翼右侧（迎风侧）前缘有效后掠角减小，提前前缘分离涡破碎并靠近翼面。由于偏转产生的左右分离涡非对称性形成恢复滚转力矩。在大攻角和大滚转角下，静态条件时前缘分离涡呈现出明显的非定常特性。左侧涡上下跳动，离翼面高度基本

上随时间变化频率约 5~6Hz。因此大攻角时发生的模型抖动现象可以理解为由于分离涡相对翼面位置非定常变化引起的。

从与静态流动显示结果比较（图 2）可以看出，在耦合运动中直到Φ>15°，α>15°之后，随攻角α增大，上程中的左右涡离翼面距离才出现明显差异，左侧涡明显上升；而在静态中当$\Phi=\alpha=9°$时就已看出差异。在下程中，左右涡离翼面距离始终存在差异，而当Φ，α<15°，差异变化变小，左侧涡明显降落。三角翼在正转中（up），左侧涡柜对翼面位置随正转反应迟钝（即动态迟滞特性），直到Φ>15°之后，左侧涡明显上升；在反转（down）中，左侧涡远离翼面位置随反转反应迟钝，直到$\Phi=15°$附近，左侧涡明显下落。这种特性反映在自激滚转角时间历程特性上，接近$\Phi=15°$ 时将影响角加速度特性。这在 2.2 节中还将进一步阐明。

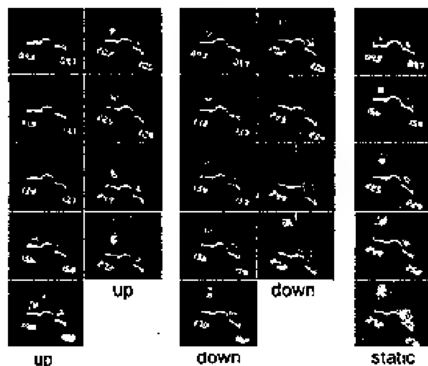


图 2 静、动态流动显示比较 （K=0.052）

图 3 给出当$\alpha=22.9°$，$\Phi=22.5°$时静态，俯仰静态和滚摆动态，俯仰动态和滚摆静态，俯仰动态和滚摆动态 (即双自由度)状况下的流动显示。从图中可以清楚地看到，单独俯仰运动比单独滚摆运动具有更大的迟滞特性，即上程中前缘涡位置更靠近翼面，而在下程中则更远离翼面。在俯仰-滚摆耦合运动中，这种动态迟滞特性虽不是简单的线性迭加，但由于耦合的作用，这种动态迟滞特性比单自由度时更为明显，即进一步推迟前缘涡破碎，因此可望提高升力系数。这与文献[4]中结论一致。

改变滚摆的相位或频率，对耦合运动的影响示于图 4，$\alpha=27.6°$，$K=0.026$。由于滚摆相位角的改变（频率保持不变），所以在相同攻角下，滚转角与同相位时是不同的。如滚摆相位超前 90°时，上程中Φ角$\Phi_u=44.5°$，下程中$\Phi_d=0.5°$。相位超前 90°的上程图象与相位落后 90°的下程图象相似，相位超前 180°的上程图象与相位落后 180°的上程图象相似，反之亦是。滚摆相位落后于俯仰的分离涡特性优于超前时的情形，即推迟涡的破碎，涡位置靠近翼面。

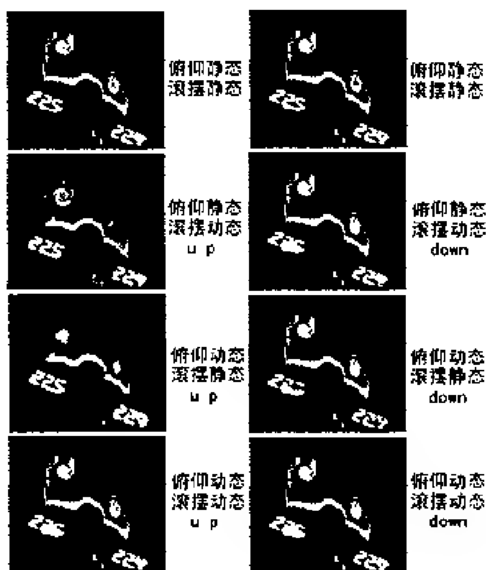


图 3 耦合运动对前缘分离涡的影响
（α=22.9°，Φ=22.5°，K=0.052）

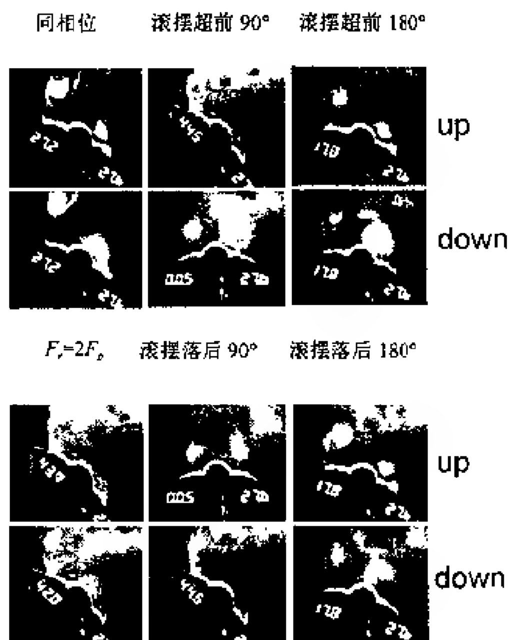


图 4 滚摆相位和频率的影响(α=27.2°，K=0.026)

当滚摆频率为俯仰频率的两倍时 $f_r = 2f_p$，不仅两者频率不同，相位也不同。与同相位的流动图象比较，滚摆引起的迟滞特性增强，尤其在大滚转角时更为明显。

2.2 滚转角时间历程测量

2.2.1 α 静态(单滚摆)

以前的滚摆试验研究已经表明，对于尖前缘 80°三角翼模型在 $V_\infty = 30$m/s 时开始自激滚摆的攻角为 $\alpha_{wr} = 26°$[2]。本期试验进行了当 $\alpha = 22.9° \sim 42.3°$静态时自激滚转角时间历程 $\Phi(t)$ 测量。在 $\alpha = 22.9°$和 25.2°，只要模型受一外界触动，也可以形成典型的滚摆。图 5 给出 $\alpha = 32.0°$ 时的滚转角时间历程 $\Phi(t)$，相平面图 $\mathrm{d}\Phi(t)/\mathrm{d}t \sim \Phi(t)$，某一周期的角加速度 $\mathrm{d}^2\Phi(t)/\mathrm{d}t^2$ 和滚转力矩系数 $C_{mx} \sim \Phi$。在该条件下的自激滚摆频率为 $f_{wr} = 5.5$Hz，滚转角速度 $(\mathrm{d}\Phi(t)/\mathrm{d}t)_{max} = \pm 9.22$rad/s。从时间历程图和相平面图中可以发现，滚摆中还迭加一个低频的 Φ 转动，相平面图中转动方向为顺时针。从某一周期的滚转角曲线，表明滚摆运动接近谐波运动，而在达到最大振幅时，模型有一个“滞止”状态，并不同严格的谐波运动那样，在达到最大振幅后“立即”返回。这与从流动显示中发现的涡运动迟滞特性有关。当模型正转时，左翼（背风侧）涡靠近翼面，而当在 $\Phi = 15°$附近，左翼涡突然离开翼面。正是这种涡流动特性，反映在角加速度特性(图 5(c))中在正负最大振幅处出现方向相反的二个“鼓包”。正是这二个“鼓包”反映在力矩特性上(图 5(d))形成二个勺形，使滚转力矩呈现双“8”字形。在 $\Phi < \pm 10°$ 之间，力矩系数曲线为顺时针环，为不稳定状态；而在两端的两个逆时针环，提供稳定的滚转能量，促使和维持等幅的振动。获得的滚转力矩系数与资料[5，6]的结果完全一致。

随 α 增大，滚摆振幅减小，力矩系数斜率 C_{mx}^{Φ} 增大，而最大力矩系数减小。风速 $V_\infty = 20$m/s 时开始滚摆的对应攻角增大，最大力矩系数减小。

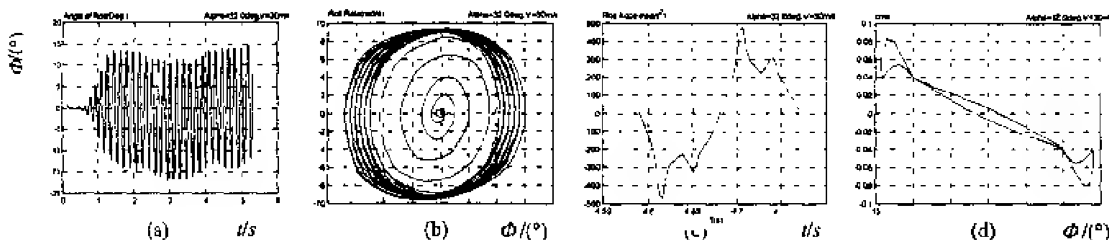


图 5 α 静态时自激滚转角时间历程及力矩特性(α=32.0°)

2.2.2 α 动态(俯仰-滚摆耦合)

在俯仰状态下的自激滚转角时间历程和滚转力矩特性示于图 6，俯仰频率为 K=0.013 (f_p~0.088Hz)，V_∞=30m/s。从图 6(a)可以清楚看出，在 α 动态时开始自激滚摆的攻角 α_{wr} 明显推迟（在第一周期为 38.3°，第二周期为 40°）（α 静态时的 α_{wr}=26°)。这与俯仰时的动态迟滞特性增强相关。在俯仰上程中，滚摆振幅增加，至最大攻角处开始收敛。自激滚摆频率为 7.2Hz，大于单纯滚摆时的频率。在俯仰下程中，呈现先收敛后发散的形式，滚摆频率减小。当攻角减至 $\alpha = 5°$附近，三角翼模型在 $\Phi \approx -17°$静止；又开始上程至 $\alpha = 5°$附近，模型恢复到 $\Phi = 0°$静止。直到俯仰的第二个周期 $\alpha = 40°$模型又开始自激滚摆。因此俯仰—滚摆耦合状况下不仅推迟滚摆开始攻角，而且滚摆不再是等幅等频的典型 Limit Cycle 滚转振动。角速度和相平面也呈现较单滚摆（图 5）更复杂的性状。在俯仰下程中某一周期的角加速度变小，力矩系数曲线中段的顺时针环增大，表明不稳定性增加。

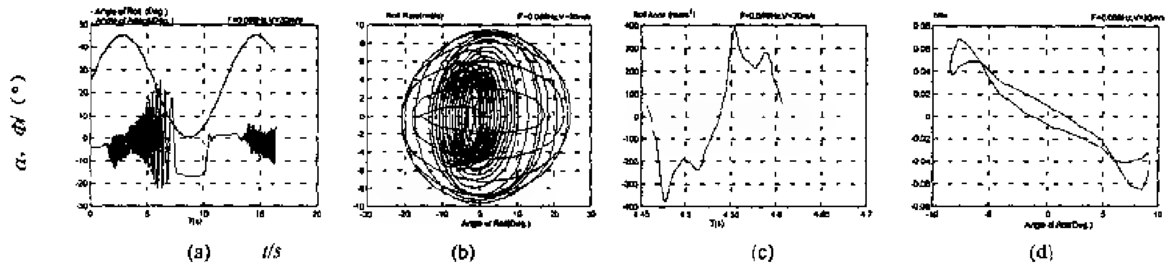


图 6　α动态时自激滚转角时间历程及滚转力矩特性（K=0.013，V=30m/s）

2.3 双自由度气动载荷测量

图 7 为 80°三角翼模型双自由度、同相位运动时（K=0.104）的气动力系数随α和Φ角的变化曲线，可以清晰地看到 C_y，C_{mz} 曲线形成明显的迟滞环，特别是滚转力距系数 cmx 的迟滞环其形状(勺形)、逆时针转动方向和量值（$C_{mx\ min}$= −0.08）均与由滚转角时间历程获得的滚转力矩系数结果相符合。

耦合运动对滚转力矩系数的影响示于图 8。图 8(b)中的 C_{mx} 双“8”形迟滞环进一步说明仅当α≥26°时才发生自由滚摆（wing rock）的结论。

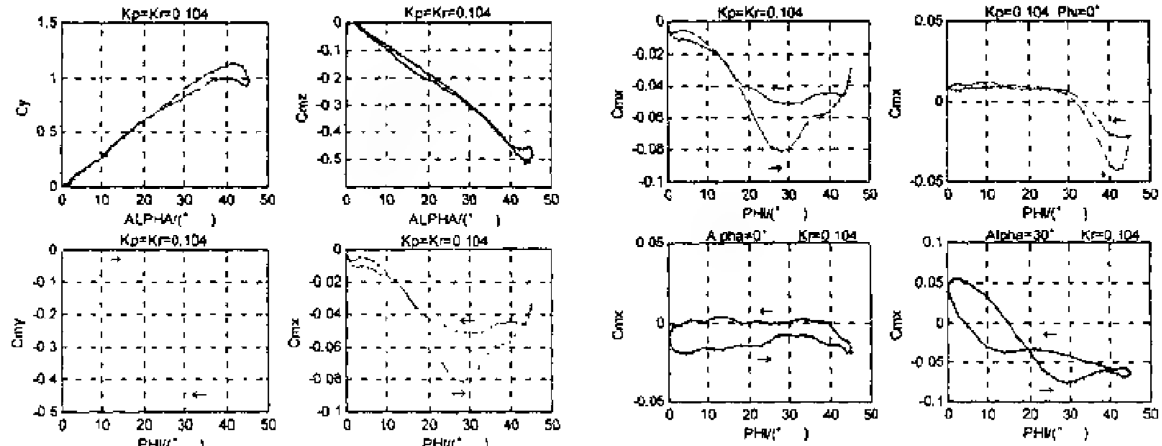


图 7　双自由度运动时气动力系数（K=0.104）

图 8　耦合运动对滚转力矩系数的影响
(a) 同相位；　(b) 单独俯仰（Φ = 0°）；
(c) 单独滚摆（α = 0°）；(d) 单独滚摆（α = 30°）

当滚摆相位落后俯仰 90°时，在小Φ角 C_{mx} 有较大的负值并且具有较大的顺时针环，增大滚转的不稳定性；而当滚摆相位超前 90°时，C_{mx} 仅形成较小的迟滞环。当滚摆频率为俯仰频率的两倍时，C_{mx} 形成两个逆时针环，而不再是双“8”字形。

3　结　论

(1) 俯仰-滚摆耦合运动中前缘分离涡相对翼面距离变化的动态迟滞特性表现比单俯仰和单滚摆状态更严重，即进一步推迟分离涡的破碎。单俯仰状态的动态迟滞特性又比单滚摆时的严重。

(2) 在俯仰-滚摆耦合运动中，随攻角α增大（上程）和随滚转角Φ增大（正转），直至α>15°，Φ>15°，左侧（背风侧）分离涡才突然明显离开翼面；而在俯仰下程和反转中，至Φ≈15°附近，左侧分离涡才突然明显靠近翼面。这种分离涡相对模型运动的反应迟钝特性将影响滚转角的加速度特性，这在自激滚转角时间历程及其角加速度曲线的鼓包上得以反映。

(3) 俯仰-滚摆耦合运动中改变滚摆相位角，则在相同的攻角下，对应不同的滚转角。与同相位时比较，滚摆相位落后于俯仰时的分离涡特性优于滚摆相位超前时的情形，即推迟涡的破碎，涡位置靠近翼面。

(4) 俯仰-滚摆耦合运动中改变滚摆频率，与同频率同相位时比较，增大滚摆频率使滚摆引起的迟滞特性增强，尤其在大滚转角时更为明显。

(5) 在攻角 α 静态时的自由滚摆滚转角时间历程测量表明，模型接近谐波运动，而在模型达到最大振幅处呈现“迟滞”特性，反映在角加速度曲线上出现“鼓包”。正是“鼓包”使力矩系数曲线呈现双“8”字形。中间的顺时针环，促使模型滚转；两端的逆时针环，维持稳定的滚摆。

(6) 在攻角动态即俯仰状态，明显推迟开始滚摆时的攻角 α_{wr}，并形成频率比单滚摆时更高的非等频等幅的滚转振动。随俯仰频率增加，开始滚摆的攻角 α_{wr} 增大，滚摆的频率增加，最大力矩系数增大。

(7) 在俯仰-滚摆耦合运动中获得了六分量气动力系数曲线迟滞环。其滚转力矩系数迟滞环的逆时针方向、勺形形状和量值与由滚转角时间历程求得的滚转力矩系数迟滞环相符合。

(8) 在俯仰-滚摆耦合运动中，气动力系数迟滞环比单独俯仰时迟滞环提前分离，表明双自由度运动时，进一步加强前缘涡相对翼面位置变化的迟滞特性，这与流动显示结果相符合。

(9) 俯仰-滚摆耦合运动中改变滚摆相位角，则在相同的攻角下，对应不同的滚转角。因此对滚转力矩和偏航力矩有较大影响。

参 考 文 献

1 唐敏中. 三角翼低速大攻角气动特性试验研究. 空气动力学学报，1994，12(4)：367~374

2 唐敏中. 低速三角翼滚摆试验研究. 空气动力学学报，1997，12(4)：436~443

3 唐敏中. 机翼滚摆非定常流场的 PIV 测量. 空气动力学学报，1999，9(3)：242~249

4 Kandil OA. Coupled Rolling and Pitching Oscillation Effects on Transonic Shock-Induced Vortex Breakdown Flow of a Delta Wing. AIAA-96-0828，1996

5 Arena Jr. Experimental investigation on limit cycle wing rock of slender wings. *J of aircraft*，1994，31(5)：1148~1155

6 Arena Jr. A Discrete Vortex Model for Predicting Wing Rock of Slender Wings. AIAA-92-4401

作者索引

（按作者姓氏汉语拼音排序）